UNIVERSIDADE FEDERAL DO VALE DO SÃO FRANCISCO

Professor: Felipe Wergete Cruz

Data: 19/08/2014 **Horário**: das 10:00h às 12:00h

Aluno: GABARITO **CPF**: ☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐

3ª Avaliação de Cálculo II

Instruções

◇ Escreva seu nome e o número de seu CPF no lugar indicado desta folha.
◇ Confira que há **6 questões** no caderno de prova.
◇ Não é permitido qualquer tipo de consulta.
◇ Todos os aparelhos eletrônicos deverão permanecer desligados durante a prova.
◇ Leia atentamente o enunciado das questões antes de tentar solucioná-las.
◇ A interpretação da questão faz parte do processo de avaliação.
◇ As respostas somente serão aceitas com **justificativas**.
◇ Não será permitida a saída durante a prova, exceto se entregue em definitivo.

Questões

1. $(1,5$ ponto) Verifique que a função $u(x,t) = \operatorname{sen}(x - at)$ é solução da equação da onda:
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

2. $(1,5$ ponto) Determine $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$, sabendo que $z = z(x,y)$, onde $e^z = xyz$.

3. $(1,5$ ponto) Determine a equação geral do plano tangente e as equações paramétricas da reta normal ao parabolóide hiperbólico $y = x^2 - z^2$ no ponto $(4,7,3)$.

4. $(1,5$ ponto) Determine a derivada direcional de $f(x,y,z) = xy + yz + xz$ em $P = (1,-1,3)$ na direção de $Q = (2,4,5)$.

5. $(1,5$ ponto) Suponha que a temperatura em um ponto (x,y,z) do espaço seja dada por
$$T(x,y,z) = \frac{80}{1 + x^2 + 2y^2 + 3z^2},$$
onde T é medida em graus Celsius e x, y e z em metros. Em que direção no ponto $(1,1,-2)$ a temperatura aumenta mais rapidamente? Qual é a taxa máxima de aumento?
OBS.: Use que $\sqrt{41} \approx 6,4$.

6. $(2,5$ pontos) Determine os valores extremos da função $f(x,y,z) = xyz$ no elipsóide
$$3x^2 + 2y^2 + z^2 = 18.$$

GABARITO

1º

- $\dfrac{\partial u}{\partial t} = -a\cos(x-at)$
- $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -a^2\,\mathrm{sen}(x-at)$
- $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \cos(x-at)$
- $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\mathrm{sen}(x-at)$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

—//—

2º

- $e^z \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x} = yz + xy\dfrac{\partial z}{\partial x} \Rightarrow \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{yz}{e^z - xy} = \dfrac{yz}{xyz - xy}$

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z}{xz - x}$$

- $e^z \cdot \dfrac{\partial z}{\partial y} = xz + xy\dfrac{\partial z}{\partial y} \Rightarrow \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{xz}{e^z - xy} = \dfrac{xz}{xyz - xy}$

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{yz - y}$$

—//—

3º O parabolóide hiperbólico $y = x^2 - z^2$ é a superfície de nível $F=0$ da função $F(x,y,z) = x^2 - y - z^2$. Sabemos que o plano tangente à superfície $F=0$ em $P=(4,7,3)$ é o plano que passa por P e tem vetor norma $\nabla F(P)$. Como

$$\nabla F(x,y,z) = (2x, -1, -2z),$$

então $\nabla F(P) = \nabla F(4,7,3) = (8,-1,-6)$.

Se $A=(x,y,z)$ é um ponto arbitrário do plano tangente, então

$$\nabla F(P) \cdot \overrightarrow{PA} = 0.$$

Assim: $(8,-1,-6)\cdot(x-4, y-7, z-3) = 0$

$$\therefore 8x - y - 6z = 7$$

é a eq. geral do plano.

Já a reta normal, ela passa por ~~P~~ P e é perpendicular ao plano tangente; logo, ela passa por P e tem a direção do vetor $\nabla F(P)$. Suas equações paramétricas são:

$$\begin{cases} x = 4 + 8t \\ y = 7 - t \\ z = 3 - 6t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

— // —

4º $\begin{cases} \overrightarrow{PQ} = (2-1, 4+1, 5-3) = (1, 5, 2). \\ \|\overrightarrow{PQ}\| = \sqrt{1+25+4} = \sqrt{30} \end{cases}$

$$\Rightarrow \vec{u} = \frac{\overrightarrow{PQ}}{\|\overrightarrow{PQ}\|} \therefore \vec{u} = \frac{1}{\sqrt{30}}(1, 5, 2).$$

Por outro lado:

- $\nabla f(x, y, z) = (y+z, x+z, x+y)$
- $\nabla f(P) = \nabla f(1, -1, 3) = (2, 4, 0)$.

Portanto, a derivada direcional de f em P é:

$$D_{\vec{u}} f(1, -1, 3) = \nabla f(1, -1, 3) \cdot \vec{u}$$
$$= (2, 4, 0) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{30}}, \frac{5}{\sqrt{30}}, \frac{2}{\sqrt{30}}\right)$$
$$= \frac{2}{\sqrt{30}} + \frac{20}{\sqrt{30}} = \frac{22}{\sqrt{30}} = \frac{11\sqrt{30}}{15}.$$

— // —

5º Conforme visto em aula, a temperatura aumenta mais rapidamente na direção do vetor gradiente $\nabla T(1, 1, -2)$ e a taxa máxima de aumento é $\|\nabla T(1, 1, -2)\|$.

Vamos calcular o gradiente de T.

$$\nabla T(x,y,z) = \left(-\frac{160x}{(1+x^2+2y^2+3z^2)^2}, -\frac{320y}{(1+x^2+2y^2+3z^2)^2}, -\frac{480z}{(1+x^2+2y^2+3z^2)^2}\right)$$

$$\therefore \nabla T(x,y,z) = \frac{160}{(1+x^2+2y^2+3z^2)^2}(-x,-2y,-3z)$$

$$\Rightarrow \nabla T(1,1,-2) = \frac{160}{(16)^2}(-1,-2,6) = \frac{5}{8}(-1,-2,6).$$

Portanto, a temperatura aumenta mais rapidamente na direção do vetor $\left(-\frac{5}{8}, -\frac{5}{4}, \frac{15}{4}\right)$.

A taxa máxima de aumento é

$$\|\nabla T(1,1,-2)\| = \frac{5}{8}\sqrt{1+4+36} \approx \frac{5}{8}.(6,4) = 4\,°C/m$$

—||—

6º) Vamos determinar os valores de máximo e mínimo de f sujeito à restrição $g(x,y,z) = 3x^2+2y^2+z^2 = 18$.

Método dos Multiplicadores de Lagrange

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g = 18 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} yz = 6\lambda x \\ xz = 4\lambda y \\ xy = 2\lambda z \\ 3x^2+2y^2+z^2 = 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xyz = 6\lambda x^2 \\ xyz = 4\lambda y^2 \\ xyz = 2\lambda z^2 \\ 3x^2+2y^2+z^2 = 18 \end{cases} \quad (*)$$

- Caso $\lambda = 0$: • $x = y = 0$ e $z = \pm\sqrt{18} = \pm 3\sqrt{2}$
- $y = z = 0$ e $x = \pm\sqrt{6}$
- $x = z = 0$ e $y = \pm 3$.

Neste caso, os pontos são

$Q_1 = (0,0,3\sqrt{2})$, $Q_2 = (0,0,-3\sqrt{2})$, $Q_3 = (\sqrt{6},0,0)$, $Q_4 = (-\sqrt{6},0,0)$,

$Q_5 = (0,3,0)$ e $Q_6 = (0,-3,0)$.

- Caso $\lambda \neq 0$:

$$3x^2 = \frac{xyz}{2\lambda}; \quad 2y^2 = \frac{xyz}{2\lambda}; \quad z^2 = \frac{xyz}{2\lambda}.$$

$$\Rightarrow \frac{xyz}{2\lambda} + \frac{xyz}{2\lambda} + \frac{xyz}{2\lambda} = 18 \Rightarrow xyz = 12\lambda$$

Logo, por (*):

$$\begin{cases} 12\lambda = 6\lambda x^2 \\ 12\lambda = 4\lambda y^2 \\ 12\lambda = 2\lambda z^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{2} \\ y = \pm\sqrt{3} \\ z = \pm\sqrt{6} \end{cases}$$

Assim, se $\lambda \neq 0$, os pontos são:

$P_1 = (\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6})$, $P_2 = (\sqrt{2}, \sqrt{3}, -\sqrt{6})$, $P_3 = (\sqrt{2}, -\sqrt{3}, -\sqrt{6})$,

$P_4 = (\sqrt{2}, -\sqrt{3}, \sqrt{6})$, $P_5 = (-\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6})$, $P_6 = (-\sqrt{2}, \sqrt{3}, -\sqrt{6})$,

$P_7 = (-\sqrt{2}, -\sqrt{3}, -\sqrt{6})$ e $P_8 = (-\sqrt{2}, -\sqrt{3}, \sqrt{6})$.

Como:

- $f(P_1) = f(P_3) = f(P_6) = f(P_8) = 6$
- $f(P_2) = f(P_4) = f(P_5) = f(P_7) = -6$
- $f(Q_1) = f(Q_2) = f(Q_3) = f(Q_4) = f(Q_5) = f(Q_6) = 0$,

concluímos que o valor máximo de f é 6 e o mínimo é -6.