UNIVERSIDADE FEDERAL DO VALE DO SÃO FRANCISCO

Professor: Felipe Wergete Cruz

Data: 24/07/2014 **Horário**: das 10:00h às 12:00h

Aluno: GABARITO **CPF**: ☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐

2ª Avaliação de Cálculo II

Instruções

◇ Escreva seu nome e o número de seu CPF no lugar indicado desta folha.
◇ Confira que há **7 questões** no caderno de prova.
◇ Não é permitido qualquer tipo de consulta.
◇ Todos os aparelhos eletrônicos deverão permanecer desligados durante a prova.
◇ Leia atentamente o enunciado das questões antes de tentar solucioná-las.
◇ A interpretação da questão faz parte do processo de avaliação.
◇ As respostas somente serão aceitas com **justificativas**.
◇ Não será permitida a saída durante a prova, exceto se entregue em definitivo.

Questões

1. $(2,0$ pontos$)$ Quantos metros de chapa de ferro são necessários para construir um arco $\widehat{AB}$, de forma parabólica, sendo A e B simétricos com relação ao eixo de simetria da parábola e com as seguintes dimensões: 2 m a distância de A a B e 1 m a do vértice ao segmento AB.
Dado: $\displaystyle\int \sec^3 u\,du = \frac{1}{2}\sec u \operatorname{tg} u + \frac{1}{2}\ln|\sec u + \operatorname{tg} u| + K$, onde K é uma constante.

2. $(1,0$ ponto$)$ Considere a função $f : [1,\infty) \to \mathbb{R}^+$, dada por $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$. Considere, também, o conjunto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x \geq 1 \text{ e } 0 \leq y \leq f(x)\}$. Calcule a área da região plana A.

3. Seja f a função dada por $z = f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$.
(a) $(0,5$ ponto$)$ Determine o domínio e a imagem de f;
(b) $(1,0$ ponto$)$ Determine e esboce as curvas de nível da função f.

4. Faça o que se pede:
(a) $(1,0$ ponto$)$ Determine, se possível, o $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2\,y}{x^4+y^2}$;
(b) $(0,5$ ponto$)$ Calcule $\dfrac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$, onde $f(x,y) = 3x^2 + 2y$.
(c) $(0,5$ ponto$)$ Calcule, por definição, $f_x(x,y)$.

5. (1,5 ponto) Fazendo uma mudança para coordenadas polares, determine o valor de L para que a função

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ L, & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

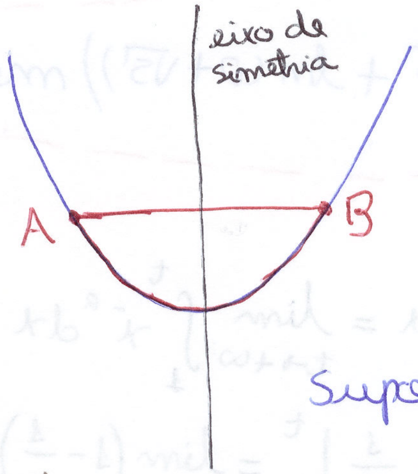
seja contínua em $(0,0)$.

6. (1,0 ponto) Seja f uma função real diferenciável em $\mathbb{R}^2$. Considere a função real g, de uma variável real, dada por $g(t) = f(e^{t^2}, \operatorname{sen} t)$. Supondo que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,0) = 2$, calcule $g'(0)$.

7. (1,0 ponto) Determine uma equação geral do plano que passa pelos pontos $(1,1,2)$ e $(-1,1,1)$ e que seja tangente ao gráfico de $f(x,y) = xy$.

GABARITO

1º



Podemos supor sem perda de generalidade que o eixo de simetria é o eixo Oy e que, neste caso, o vértice está na origem.

Supondo isso, e, pelos dados do problema:

$$\begin{cases} y = f(x) = x^2 \\ A = (-1, 1);\ B = (1, 1) \end{cases}$$

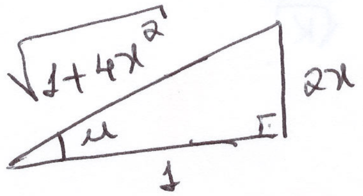
$$\Rightarrow L = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + (2x)^2}\, dx = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + 4x^2}\, dx. \quad (\#)$$

Fazendo $\operatorname{tg} u = 2x$, então $dx = \frac{1}{2}\sec^2 u\, du$.

$$\therefore \int \sqrt{1+4x^2}\, dx = \int \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 u} \cdot \frac{1}{2}\sec^2 u\, du = \frac{1}{2}\int \sec^3 u\, du$$

Assim:

$$\int \sqrt{1+4x^2}\, dx = \frac{1}{4}\sec u \operatorname{tg} u + \frac{1}{4}\ln|\sec u + \operatorname{tg} u| + K. \quad (*)$$



$$\Rightarrow \sec u = \sqrt{1 + 4x^2}$$

Por $(*)$, temos:

$$\int \sqrt{1+4x^2}\, dx = \frac{1}{4} \cdot 2x \sqrt{1+4x^2} + \frac{1}{4}\ln\left|2x + \sqrt{1+4x^2}\right| + K.$$

Substituindo este resultado em $(\#)$, obtemos:

$$L = \left(\frac{1}{2}x\sqrt{1+4x^2} + \frac{1}{4}\ln\left|2x + \sqrt{1+4x^2}\right|\right)\Big|_{-1}^{1} =$$

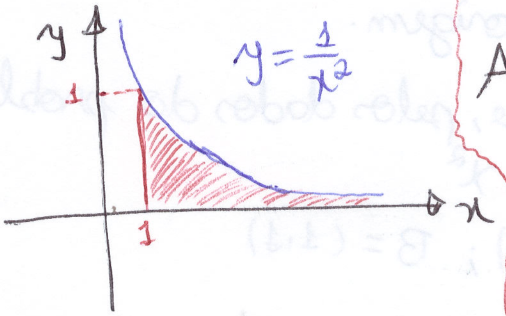
$$= \frac{1}{2}(\sqrt{5} + \sqrt{5}) + \frac{1}{4}\left[\ln(2 + \sqrt{5}) - \ln(-2 + \sqrt{5})\right] =$$

$$= \sqrt{5} + \frac{1}{4} \ln\left(\frac{2+\sqrt{5}}{\sqrt{5}-2}\right) = \sqrt{5} + \frac{1}{4} \ln(2+\sqrt{5})^2 =$$

$$= \sqrt{5} + \frac{1}{2} \ln(2+\sqrt{5}) = \frac{1}{2}\left(2\sqrt{5} + \ln(2+\sqrt{5})\right) \text{ metros}$$

— // —

2º



$$A = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{t \to +\infty} \int_1^t x^{-2}\,dx =$$

$$= \lim_{t\to\infty} -\frac{1}{x}\Big|_1^t = \lim_{t\to\infty}\left(1 - \frac{1}{t}\right) = 1 \text{ u.a.}$$

— // —

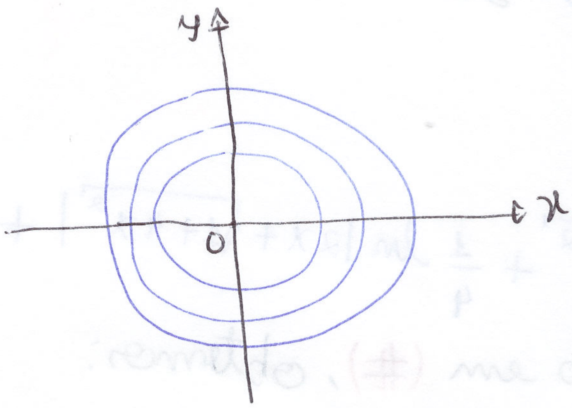
3º (a) $Dom(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, (x,y) \neq (0,0)\} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

$Im(f) = \mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x > 0\}$.

(b) Curvas de nível correspondentes a $z = k$, $k = cte$:

- $k \leq 0 \Rightarrow$ a curva de nível é o conjunto vazio
- $k > 0 \Rightarrow \frac{1}{x^2+y^2} = k \therefore x^2 + y^2 = \frac{1}{k}$

Portanto, as curvas de nível da função f são circunferências concêntricas de centro na origem e raio $\frac{1}{\sqrt{k}}$.



Observe que quanto maior for o valor de k, menor será o raio. E quanto menor for o valor de k, maior será o valor do raio.

— // —

4º (a) Vamos examinar os valores de f ao longo das curvas C_1 e C_2, onde C_1 é a reta $y=0$ (eixo x) e C_2 é a parábola $y=x^2$.

$$f(x,y)=\frac{2x^2y}{x^4+y^2}$$

- Ao longo de C_1

$$f(x,y)=f(x,0)=\frac{2x^2\cdot 0}{x^4+0^2}=0.$$

Logo, $f(x,y)\longrightarrow 0$ quando $(x,y)\to(0,0)$ ao longo de C_1.

- Ao longo de C_2

$$f(x,y)=f(x,x^2)=\frac{2x^2\cdot x^2}{x^4+(x^2)^2}=\frac{2x^4}{2x^4}=1.$$

Logo, $f(x,y)\longrightarrow 1$ quando $(x,y)\to(0,0)$ ao longo de C_2.

Como obtivemos valores diferentes para o limite ao longo de caminhos distintos, concluímos que o limite não existe.

(b) $$\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}=\frac{3(x+h)^2+2y-3x^2-2y}{h}=$$

$$=\frac{3x^2+6xh+3h^2+2y-3x^2-2y}{h}=\frac{6xh+3h^2}{h}=6x+3h$$

(c) $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}(6x+3h)=6x$$

5º Coordenadas polares: $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$

$$\Rightarrow xy\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = r\cos\theta . r\,\text{sen}\,\theta . \frac{r^2\cos^2\theta - r^2\text{sen}^2\theta}{r^2\cos^2\theta + r^2\text{sen}^2\theta} =$$

$$= r^2\,\text{sen}\,\theta . \cos\theta . \frac{r^2(\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta)}{r^2(\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta)} =$$

$$= \frac{r^2}{2} . 2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta . \cos(2\theta) = \frac{r^2}{2}\,\text{sen}(2\theta)\cos(2\theta) =$$

$$= \frac{r^2}{4} . 2\,\text{sen}(2\theta)\cos(2\theta) = \frac{r^2}{4}\,\text{sen}(4\theta).$$

Observe que queremos calcular $\lim_{r\to 0} \frac{r^2}{4}\,\text{sen}(4\theta)$.

Como, para todo θ, $\text{sen}(4\theta) \in [-1,1]$, então

$$-\frac{r^2}{4} \leq \frac{r^2}{4}\,\text{sen}(4\theta) \leq \frac{r^2}{4}.$$

Uma vez que $\lim_{r\to 0} \frac{r^2}{4} = \lim_{r\to 0}\left(-\frac{r^2}{4}\right) = 0$, segue, do Teorema do Confronto, que:

$$\lim_{r\to 0} \frac{r^2}{4}\,\text{sen}(4\theta) = 0, \ \forall\theta.$$

Logo, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r^2}{4}\,\text{sen}(4\theta) = 0.$

Para que f seja contínua na origem, devemos ter

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0).$$

Pelos cálculos acima, concluímos que $L = 0$.

6º Pela Regra da Cadeia, sabemos que

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(e^{t^2}, \operatorname{sen} t) \cdot 2t e^{t^2} + \frac{\partial f}{\partial y}(e^{t^2}, \operatorname{sen} t) \cdot \cos t.$$

Assim:

$$g'(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(1,0) \cdot 2 \cdot 0 \cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial y}(1,0) \cdot 1 = 0 + 2 \cdot 1 = 2$$

— II —

7º Eq. do plano tangente no ponto $(a,b) \in Dom(f)$:

$$z = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b). \quad (\#)$$

Note que:

$$\begin{cases} f_x(x,y) = y \\ f_y(x,y) = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_x(a,b) = b \\ f_y(a,b) = a \end{cases}$$

Além disso, $f(a,b) = ab$. Substituindo em $(\#)$, obtemos:

$$z = ab + b(x-a) + a(y-b)$$

$$\therefore z = ab + bx - ab + ay - ab \quad \therefore z = bx + ay - ab$$

ou $bx + ay - z = ab$ $(*)$

Como os pontos $(1,1,2)$ e $(-1,1,1)$ pertencem a este plano, temos:

$$\begin{cases} b + a - 2 = ab \\ -b + a - 1 = ab \end{cases} \Rightarrow a = 3 \text{ e } b = \frac{1}{2}$$

Por $(*)$, temos que:

$$\frac{1}{2}x + 3y - z = \frac{3}{2} \quad \text{ou} \quad x + 6y - 2z = 3$$