Professor: Felipe Wergete Cruz

Data: 29/05/2014 **Horário:** das 10:00h às 12:00h

Aluno: GABARITO **CPF:** ☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐

1ª Avaliação de Cálculo II

Instruções

◇ Escreva seu nome e o número de seu CPF no lugar indicado desta folha.
◇ É proibido o uso de qualquer tipo de aparelhos eletrônicos.
◇ Não é permitido qualquer tipo de consulta.
◇ Leia atentamente o enunciado das questões antes de tentar solucioná-las.
◇ As respostas somente serão aceitas com **justificativas**.
◇ Escreva **todos** os detalhes dos cálculos que o levarem a uma solução.

Questões

1. Seja S a região limitada pelas curvas $y = x + 6$, $y = x^3$ e $y = -\dfrac{x}{2}$.

   (a) (0,5 ponto) Esboce a região S;

   (b) (1,0 ponto) Integrando com relação a x, encontre o valor da área da região S;

   (c) (1,0 ponto) Integrando com relação a y, encontre o valor da área da região S.

2. Calcule as seguintes integrais:

   (a) (2,0 pontos) $\displaystyle\int e^x \cos(x)\, dx$;

   (b) (2,0 pontos) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{25x^2 - 4}}\, dx$;

   (c) (2,0 pontos) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^5 + 2x^3 + x}$.

   DICA: Lembre-se que $\displaystyle\int \sec(x)\, dx = \ln|\sec(x) + \mathrm{tg}(x)| + \text{constante}$.

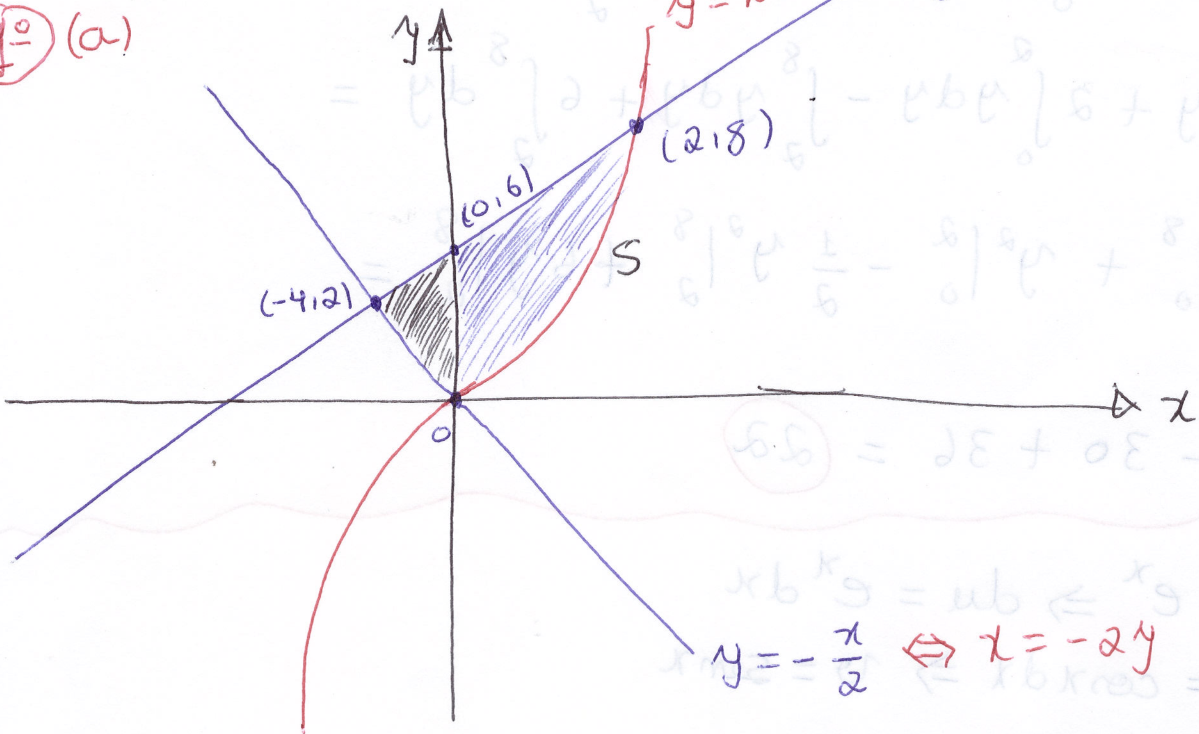
3. (1,5 ponto) A região limitada pela curva $y = \dfrac{x^2}{4}$ e pelas retas $y = 0$, $x = 1$ e $x = 4$, gira em torno do eixo dos x. Encontre o volume do sólido de revolução regado.

1

GABARITO

$x = y^{1/3} \Updownarrow y = x^3$

1º (a)



(b) Área de $S = \int_{-4}^{0} [(x+6) - (-\frac{x}{2})]\,dx + \int_{0}^{2} [(x+6) - (x^3)]\,dx =$

$= \frac{1}{2}\int_{-4}^{0} (3x+12)\,dx + \int_{0}^{2} (x+6-x^3)\,dx =$

$= \left(\frac{3}{4}x^2 + 6x\right)\Big|_{-4}^{0} + \left(\frac{x^2}{2} + 6x - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_{0}^{2} =$

$= 12 + 10 = 22$

(c) Área de $S = \int_0^2 [y^{1/3} - (-2y)]dy + \int_2^8 [y^{1/3} - (y-6)]dy =$

$$= \int_0^8 y^{1/3} dy + 2\int_0^2 y\,dy - \int_2^8 y\,dy + 6\int_2^8 dy =$$

$$= \frac{3}{4} y^{4/3} \Big|_0^8 + y^2 \Big|_0^2 - \frac{1}{2} y^2 \Big|_2^8 + 6y \Big|_2^8 =$$

$$= 12 + 4 - 30 + 36 = 22$$

2º (a) $u = e^x \Rightarrow du = e^x dx$

$dv = \cos x\,dx \Rightarrow v = \operatorname{sen} x$

$$\Rightarrow I = \int e^x \cos x\,dx = e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \operatorname{sen} x\,dx \qquad (*)$$

$u = e^x \Rightarrow du = e^x dx$

$dw = \operatorname{sen} x\,dx \Rightarrow w = -\cos x$

$$\int e^x \operatorname{sen} x\,dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x\,dx$$

Por (*), temos:

$$I = e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x - I \Rightarrow 2I = e^x(\operatorname{sen} x + \cos x)$$

$$\Rightarrow \int e^x \cos x\,dx = \frac{1}{2} e^x (\operatorname{sen} x + \cos x) + C$$

2 | (b) Note que

$$\sqrt{25x^2-4} = \sqrt{4\left(\frac{25}{4}x^2-1\right)} = 2\sqrt{\left(\frac{5}{2}x\right)^2-1}.$$

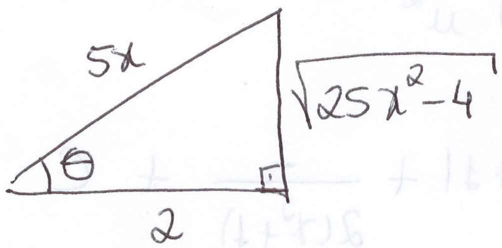
Faça a mudança

$$\begin{cases} \frac{5}{2}x = \sec\theta, \text{ i.e., } x = \frac{2}{5}\sec\theta \\ \Rightarrow dx = \frac{2}{5}\sec\theta \, tg\theta \, d\theta \end{cases}$$

Então:

$$\int \frac{1}{\sqrt{25x^2-4}}dx = \int \frac{\frac{2}{5}\sec\theta \, tg\theta \, d\theta}{2\sqrt{\sec^2\theta-1}} = \frac{1}{5}\int \frac{\sec\theta \, tg\theta}{\sqrt{tg^2\theta}}d\theta =$$

$$= \frac{1}{5}\int \sec\theta \, d\theta = \frac{1}{5}\ln|\sec\theta + tg\theta| + C$$



$$\Rightarrow tg\theta = \frac{\sqrt{25x^2-4}}{2}$$

Logo,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{25x^2-4}} = \frac{1}{5}\ln\left|\frac{5x+\sqrt{25x^2-4}}{2}\right| + C = \boxed{\frac{1}{5}\ln|5x+\sqrt{25x^2-4}|+K}$$

(c) $x^5+2x^3+x = x(x^4+2x^2+1) = x(x^2+1)^2$

Logo:

$$\frac{1}{x^5+2x^3+x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}, \text{ i.e.,}$$

$$\frac{1}{x^5+2x^3+x} = \frac{A(x^2+1)^2}{x(x^2+1)^2} + \frac{(Bx+C)x(x^2+1)}{x(x^2+1)^2} + \frac{(Dx+E)x}{x(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{(A+B)x^4 + Cx^3 + (2A+B+D)x^2 + (C+E)x + A}{x(x^2+1)^2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ C=0 \\ 2A+B+D=0 \\ C+E=0 \\ A=1 \end{cases} \Rightarrow A=1,\ B=D=-1,\ C=E=0$$

Assim:

$$\int \frac{dx}{x^5+2x^3+x} = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x}{x^2+1}\,dx - \int \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx =$$

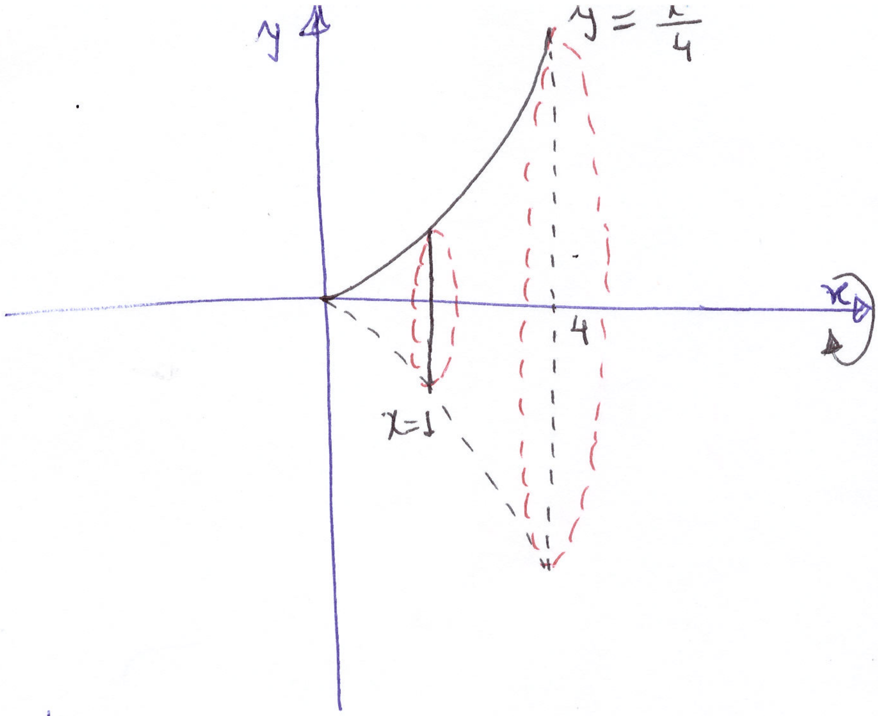
$$= \ln|x| - \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} - \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2}, \text{ onde } u = x^2+1.$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{x^5+2x^3+x} = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + \frac{1}{2(x^2+1)} + C$$

ou

$$= \ln\left(\frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}}\right) + \frac{1}{2(x^2+1)} + C$$

3 | 3º



Volume $= \int_1^4 A(x)\,dx$, onde $A(x) = \pi[R(x)]^2$ e $R(x) = \frac{x^2}{4}$.

Logo,

Volume $= \frac{\pi}{16}\int_1^4 x^4\,dx = \frac{\pi}{80}\,x^5\Big|_1^4 = \frac{1023\pi}{80}$