UNIVERSIDADE FEDERAL DO VALE DO SÃO FRANCISCO

Professor: Felipe Wergete Cruz
Data: 26/08/2014 **Horário:** das 10:00h às 12:00h

Aluno: GABARITO **CPF:**

Exame Final de Cálculo II

Instruções

◇ Escreva seu nome e o número de seu CPF no lugar indicado desta folha.
◇ Confira que há **5 questões** no caderno de prova.
◇ Não é permitido qualquer tipo de consulta.
◇ Todos os aparelhos eletrônicos deverão permanecer desligados durante a prova.
◇ Leia atentamente o enunciado das questões antes de tentar solucioná-las.
◇ A interpretação da questão faz parte do processo de avaliação.
◇ As respostas somente serão aceitas com **justificativas**.
◇ Não será permitida a saída durante a prova, exceto se entregue em definitivo.

Questões

1. $(2,0$ pontos$)$ Encontre o volume do sólido obtido pela rotação da região do primeiro quadrante limitada por $y = 1 + \dfrac{x^2}{2}$ e $y = x^2 - 1$ ao redor do eixo y.

2. Considere a função

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{1+x^2+y^2}-1}, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ L, & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

(a) $(1,0$ ponto$)$ Calcule $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$;

(b) $(1,0$ ponto$)$ Determine o valor de L para que f seja contínua em $(0,0)$. Justifique sua resposta!

3. Seja $f(x,y,z) = \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} + \dfrac{z^2}{16}$, $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

(a) $(1,0$ ponto$)$ Determine a derivada direcional máxima de f no ponto $(3,2,4)$;

(b) $(1,0$ ponto$)$ Encontre uma equação do plano tangente à superfície de nível $f(x,y,z) = 3$ no ponto $(3,2,4)$.

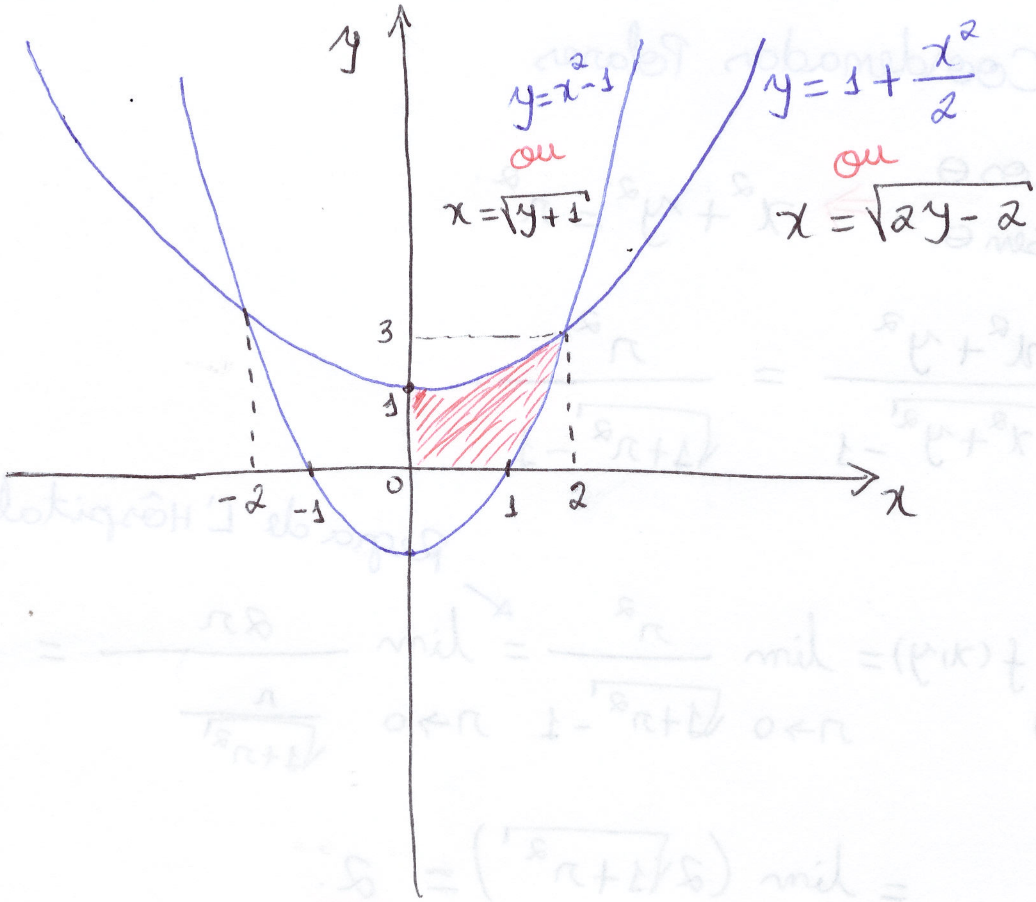
4. Considere a função $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 3x^2 - 3y^2 + 4$.

   (a) $(1,0$ ponto) Determine todos os pontos críticos de f;

   (b) $(1,0$ ponto) Classifique os pontos encontrados no item (a) como ponto de máximo local, mínimo local ou sela, conforme seja o caso.

5. $(2,0$ pontos) Usando o método dos multiplicadores de Lagrange, mostre que se os produtos dos senos dos ângulos de um triângulo é o maior possível, então o triângulo é equilátero.

1º



$$\text{Volume} = \pi \int_0^3 (\sqrt{y+1})^2 dy - \pi \int_1^3 (\sqrt{2y-2})^2 dy =$$

$$= \pi \int_0^3 (y+1)\, dy - \pi \int_1^3 (2y-2)\, dy =$$

$$= \pi \left(\frac{y^2}{2} + y\right)\Big|_0^3 - \pi \left(y^2 - 2y\right)\Big|_1^3 =$$

$$= \pi \left(\frac{9}{2} + 3\right) - \pi\left[(9-6) - (1-2)\right] =$$

$$= \pi \cdot \frac{15}{2} - \pi(3+1) = \left(\frac{15}{2} - 4\right)\pi = \frac{7\pi}{2}$$

2º (a) Coordenadas Polares

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\text{sen}\,\theta \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = r^2.$$

Daí, $\dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{1+x^2+y^2}-1} = \dfrac{r^2}{\sqrt{1+r^2}-1}.$

Logo,

Regra de L'Hôspital

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{r\to 0} \frac{r^2}{\sqrt{1+r^2}-1} = \lim_{r\to 0} \frac{2r}{\frac{r}{\sqrt{1+r^2}}} =$$

$$= \lim_{r\to 0} \left(2\sqrt{1+r^2}\right) = 2.$$

(b) Para que f seja contínua em $(0,0)$, devemos ter

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = L.$$

Segue, do item (a), que $L = 2$.

3º (a) A derivada direcional máxima de f no ponto $(3,2,4)$ é $\|\nabla f(3,2,4)\|$. Como

$$\nabla f(x,y,z) = \left(\frac{2x}{9}, \frac{y}{2}, \frac{z}{8}\right),$$

temos que $\nabla f(3,2,4) = \left(\frac{2}{3}, 1, \frac{1}{2}\right).$

Portanto, o valor procurado é $\dfrac{\sqrt{61}}{6}.$

(b) O vetor $\nabla f(3,2,4)$ é um vetor normal ao plano tangente a superfície de nível $f=3$. Portanto,

$$\nabla f(3,2,4) \cdot \overrightarrow{AP} = 0, \text{ onde}$$

$A=(3,2,4)$ e $P=(x,y,z)$ são pontos do plano em questão.

$$\Rightarrow \left(\frac{2}{3}, 1, \frac{1}{2}\right) \cdot (x-3, y-2, z-4) = 0$$

$$\therefore \frac{2}{3}x - 2 + y - 2 + \frac{1}{2}z - 2 = 0$$

$$\therefore \frac{2}{3}x + y + \frac{1}{2}z = 6 \text{ ou } 4x + 6y + 3z = 36$$

4º (a) Os pontos críticos de f são aqueles onde $\nabla f = \vec{0}$.

Como $\nabla f(x,y) = (3x^2 + 3y^2 - 6x, 6xy - 6y)$, devemos ter

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x = 0 \\ xy - y = 0 \end{cases}$$

A segunda equação nos diz que $x=1$ ou $y=0$.

• Caso $x=1$ A primeira eq. fica $y^2 - 1 = 0$. Logo, $y = \pm 1$.

$\Rightarrow (1,-1)$ e $(1,1)$ são pontos críticos de f.

• Caso $y=0$ A 1ª eq. torna-se $x^2 - 2x = 0$, donde $x=0$ ou $x=2$.

Logo, os pontos críticos de f são $(0,0)$ e $(2,0)$.

CONCLUSÃO: Os pontos críticos de f são $(1,-1)$, $(1,1)$, $(0,0)$ e $(2,0)$.

(b) Para classificar os pontos encontrados, vamos usar o teste da 2ª derivada.

$$\begin{cases} f_{xx}(x,y) = 6x-6 \\ f_{xy}(x,y) = 6y \\ f_{yy}(x,y) = 6x-6 \end{cases}$$

Matriz Hessiana: $H = \begin{pmatrix} 6x-6 & 6y \\ 6y & 6x-6 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \det(H) = (6x-6)^2 - (6y)^2 = 36\left[(x-1)^2 - y^2\right]$$

Note que nos pontos $(1,1)$ e $(1,-1)$, $\det H = -36 < 0$. Logo, estes pontos são pontos de sela. Já nos pontos $(0,0)$ e $(2,0)$, o determinante de H é positivo: 36.

Como $f_{xx}(0,0) = -6 < 0$ e $f_{xx}(2,0) = 6 > 0$, concluímos que $(2,0)$ é ponto de mínimo local e $(0,0)$ é ponto de máximo local.

5º Vamos maximizar a função $f(x,y,z) = \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} y \cdot \operatorname{sen} z$, sujeita a condição $g(x,y,z) = x+y+z = \pi$, onde x, y e z representam as medidas em radianos dos ângulos de um triângulo. Resolveremos o sistema

$$(*) \begin{cases} \nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z) \\ g(x,y,z) = \pi \end{cases}$$

Observe que

$$\nabla f(x,y,z) = (\cos x \operatorname{sen} y \operatorname{sen} z, \operatorname{sen} x \cos y \operatorname{sen} z, \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \cos z)$$

e $\nabla g(x,y,z) = (1,1,1)$.

O sistema (*) é escrito, então, da seguinte forma:

$$\begin{cases} \cos x \operatorname{sen} y \operatorname{sen} z = \lambda \\ \operatorname{sen} x \cos y \operatorname{sen} z = \lambda \\ \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \cos z = \lambda \\ x + y + z = \pi \end{cases}$$

Como $\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \operatorname{sen} z \neq 0$, é fácil ver das 3 primeiras equações que $tg(x) = tg(y) = tg(z)$. Logo, $x = y = z$.

Portanto, $x = y = z = \frac{\pi}{3}$ rad $= 60°$.

Trata-se portanto, de um triângulo equilátero.