Professor: Felipe Wergete Cruz

Data: 21/08/2014 **Horário**: das 16:00h às 18:00h

Aluno: GABARITO **CPF**: ☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐

3ª Avaliação de Geometria Analítica

Instruções

◇ Escreva seu nome e o número de seu CPF no lugar indicado desta folha.
◇ Confira que há **4 questões** no caderno de prova.
◇ Não é permitido qualquer tipo de consulta.
◇ Todos os aparelhos eletrônicos deverão permanecer desligados durante a prova.
◇ Leia atentamente o enunciado das questões antes de tentar solucioná-las.
◇ A interpretação da questão faz parte do processo de avaliação.
◇ As respostas somente serão aceitas com **justificativas**.
◇ Escreva **todos** os detalhes dos cálculos que o levarem a uma solução.
◇ Não será permitida a saída durante a prova, exceto se entregue em definitivo.

Questões

1. $(2,0$ pontos) Obtenha uma equação da superfície esférica que contém o ponto $A = (-1, 6, -3)$ e tangencia o plano $\alpha : 4x + 4y + 7z = 96$ em $T = (7, 3, 8)$.

2. Em cada uma das superfícies quádricas a seguir, determine as curvas de interseção da superfície com os planos $x = 0$, $y = 0$ e $z = 0$. Caso não haja interseção com algum desses planos ou a interseção seja apenas um ponto, especifique as condições para que planos paralelos a este intercepte a superfície, identificando as curvas de interseção. Classifique a quádrica.

   (a) $(2,0$ pontos) $x = \dfrac{y^2}{9} + \dfrac{z^2}{4}$.

   (b) $(2,0$ pontos) $\dfrac{x^2}{25} - \dfrac{y^2}{16} + \dfrac{z^2}{9} = 1$.

3. $(2,0$ pontos) Escreva a equação geral da superfície cilíndrica cuja curva diretriz Γ é dada por $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ z = 0 \end{cases}$ e cujo vetor diretor de uma reta geratriz é dado por $\vec{u} = (1, 1, 2)$.

4. $(2,0$ pontos) Determine a equação geral da superfície cônica de vértice $V = (1, -1, 3)$ que tem por diretriz a curva Γ: $\begin{cases} 4x^2 + 9y^2 = 36 \\ z = 0 \end{cases}$

1º Seja $C=(x_0, y_0, z_0)$ o centro dessa esfera.

Conforme visto em aula, o vetor $\overrightarrow{CT}$ é um vetor normal ao plano tangente α. Note que $\overrightarrow{CT} = (7-x_0, 3-y_0, 8-z_0)$.

Por outro lado, $\vec{n} = (4,4,7)$ também é um vetor normal a α.

Logo, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{CT} = \lambda \vec{n}$. Disto segue que

$$\begin{cases} 7-x_0 = 3-y_0 \\ (8-z_0)-(3-y_0) = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 4+y_0 \\ z_0 = 2+y_0 \end{cases}$$

Logo, $C = (4+y_0, y_0, 2+y_0)$. Neste caso, temos:

$\overrightarrow{CT} = (3-y_0, 3-y_0, 6-y_0)$ e $\overrightarrow{CA} = (-5-y_0, 6-y_0, -5-y_0)$.

Como C e T pertencem a esfera, $\|\overrightarrow{CT}\| = \|\overrightarrow{CA}\| =$ raio.

Assim:

$$2(3-y_0)^2 + (6-y_0)^2 = 2(5+y_0)^2 + (6-y_0)^2$$

$$\therefore 9-6y_0+y_0^2 = 25+10y_0+y_0^2 \Rightarrow 16y_0 = -16 \therefore y_0 = -1$$

$$\Rightarrow C = (3,-1,1).$$

Como $R^2 = \|\overrightarrow{CT}\|^2$, onde R é o raio, então

$$R^2 = \|(4,4,7)\|^2 = 16+16+49 = 81 \therefore R = 9$$

Portanto, a esfera procurada tem equação da forma

$$(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 81.$$

2º (a)

A interseção da quádrica com o plano $x=0$ é o ponto $(0,0,0)$. Só haverá interseção da quádrica com o plano $x=k$ se $k>0$. Neste caso, a interseção é uma elipse de centro $(k,0,0)$, contida no plano $x=k$, de equação

$$\begin{cases} \frac{y^2}{9k} + \frac{z^2}{4k} = 1 \\ x = k \end{cases}$$

As interseções com os planos $y=0$ e $z=0$ nos fornecem as parábolas $x = \frac{1}{4}z^2$ e $x = \frac{1}{9}y^2$, respectivamente.

A quádrica em questão é um parabolóide elíptico.

(b) • Interseção com $x=0$: Hipérbole $\begin{cases} -\frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1 \\ x = 0 \end{cases}$

• Interseção com $y=0$: Elipse $\begin{cases} \frac{x^2}{25} + \frac{z^2}{9} = 1 \\ y = 0 \end{cases}$

• Interseção com $z=0$: Hipérbole $\begin{cases} \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1 \\ z = 0 \end{cases}$

Trata-se de um hiperbolóide de uma folha.

3º Seja $P=(x,y,z)$ um ponto da superfície cilíndrica e $P'=(x_0,y_0,z_0)\in\Gamma$. Note que $x_0^2+y_0^2=4$ e $z_0=0$.

As equações paramétricas da geratriz que passa por P e P' são:

$$\begin{cases} x = x_0 + t \\ y = y_0 + t \quad , t\in\mathbb{R}, \\ z = 2t \end{cases}$$

pois o vetor $\vec{u}=(1,1,2)$ é um vetor diretor da geratriz.

Note que:

$$x_0 = x - \frac{z}{2} \quad e \quad y_0 = y - \frac{z}{2}.$$

Como $x_0^2+y_0^2=4$, temos:

$$\left(x-\frac{z}{2}\right)^2+\left(y-\frac{z}{2}\right)^2 = 4 \quad , \text{ou}$$

$$4x^2+4y^2+z^2-4xz-4yz-16=0.$$

4º Seja $P=(x,y,z)$ um ponto da superfície cônica e $P'=(x_0,y_0,z_0)\in\Gamma$. Temos que $\frac{x_0^2}{9}+\frac{y_0^2}{4}=1$ e $z_0=0$.

Equações paramétricas da geratriz PP': $P=V+t\overrightarrow{VP'}$

$$\begin{cases} x = 1 + t(x_0-1) \\ y = -1 + t(y_0+1) \quad , t\in\mathbb{R} \\ z = 3-3t \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_0 = 1+3\,\frac{x-1}{3-z} \quad e \quad y_0 = -1+3\,\frac{y+1}{3-z}.$$

Como $4x_0^2 + 9y_0^2 = 36$, temos:

$$4\left(1 + \frac{3x-3}{3-z}\right)^2 + 9\left(-1 + \frac{3y+3}{3-z}\right)^2 = 36$$

$$\therefore 4(3x-z)^2 + 9(3y+z)^2 = 36(3-z)^2$$

$$\therefore 4(9x^2 - 6xz + z^2) + 9(9y^2 + 6yz + z^2) = 36(9 - 6z + z^2)$$

$$36x^2 + 81y^2 - 23z^2 - 24xz + 54yz + 216z - 324 = 0$$