UNIVERSIDADE FEDERAL DO VALE DO SÃO FRANCISCO

Professor: Felipe Wergete Cruz
Data: 31/07/2014 **Horário:** das 16:00h às 18:00h

Aluno: GABARITO **CPF:**

2ª Avaliação de Geometria Analítica

Instruções

◇ Escreva seu nome e o número de seu CPF no lugar indicado desta folha.
◇ Confira que há **5 questões** no caderno de prova.
◇ Não é permitido qualquer tipo de consulta.
◇ Todos os aparelhos eletrônicos deverão permanecer desligados durante a prova.
◇ Leia atentamente o enunciado das questões antes de tentar solucioná-las.
◇ A interpretação da questão faz parte do processo de avaliação.
◇ As respostas somente serão aceitas com **justificativas**.
◇ Escreva **todos** os detalhes dos cálculos que o levarem a uma solução.
◇ Não será permitida a saída durante a prova, exceto se entregue em definitivo.

Questões

1. (2,5 pontos) Obtenha uma equação vetorial da reta concorrente com r e s, paralela à reta h, onde

$$r : X = (2,2,1) + \lambda(5,4,3), \qquad s : \begin{cases} x = -1+2t \\ y = t \\ z = -t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$$

e h é a reta que contém os pontos $A = (1,0,1)$ e $B = (0,0,0)$.

2. (2,5 pontos) Obtenha uma equação geral do plano α que contém a reta $r : x = -4z = 4y$ e forma com o plano $\beta : x + z = 0$ um ângulo de $60°$.

3. Seja r uma reta que contém o ponto $P = (0,0,2)$ e é paralela ao plano Oxy. Calcule a distância de r à reta $s : X = (1,2,1) + \lambda\,(0,1,0)$, supondo que:

   (a) (1,0 ponto) r e s são retas paralelas;

   (b) (1,0 ponto) r e s são retas reversas.

4. (0,5 ponto) Escreva as equações paramétricas da reta $3x - 5y + 1 = 0$ em $\mathbb{R}^2$.

5. (2,5 pontos) Determine a equação da parábola cujo vértice e foco são, respectivamente, $(3,3)$ e $(3,1)$. Determine, também, as equações de sua diretriz e eixo. Esboce a parábola.

GABARITO

1º Seja $\tilde{r}$ a reta procurada. Denotemos por P e Q as interseções de r com $\tilde{r}$ e de s com $\tilde{r}$, respectivamente. Então:

$P = (2+5\lambda, 2+4\lambda, 1+3\lambda)$, para algum $\lambda \in \mathbb{R}$ e

$Q = (-1+2t, t, -t)$, para algum $t \in \mathbb{R}$.

Segue que o vetor

$$\vec{PQ} = (-3+2t-5\lambda, -2+t-4\lambda, -1-t-3\lambda)$$

é um vetor diretor de $\tilde{r}$.

Como $\tilde{r} \parallel h$ e o vetor $\vec{u} = (1,0,1)$ é um vetor diretor de h, segue que existe $\mu \in \mathbb{R}$ tal que

$$\vec{PQ} = \mu \vec{u}.$$

Portanto:

$$\begin{cases} -3+2t-5\lambda = \mu \\ -2+t-4\lambda = 0 \\ -1-t-3\lambda = \mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3+2t-5\lambda = -1-t-3\lambda \\ -2+t-4\lambda = 0 \end{cases}$$

ou ainda

$$\begin{cases} 3t-2\lambda = 2 \\ t-4\lambda = 2 \end{cases} \therefore\ t = \frac{2}{5} \text{ e } \lambda = -\frac{2}{5}$$

Isso nos diz que $P = \left(0, \frac{2}{5}, -\frac{1}{5}\right)$ e $Q = \left(-\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, -\frac{2}{5}\right)$.

Portanto, a reta $\tilde{r}$ é a reta que passa por P e tem a direção do vetor $\vec{u} = (1,0,1)$, i.e.,

$$\tilde{r}: X = \left(0, \frac{2}{5}, -\frac{1}{5}\right) + k(1,0,1),\ k \in \mathbb{R}.$$

— // —

2º Sejam:

$\vec{n} = (a, b, c)$ um vetor normal do plano α

$\vec{u} = (4, 1, -1)$ um vetor diretor da reta r

$\vec{m} = (1, 0, 1)$ um vetor normal do plano β

Como $r \subset \alpha$, então:

$$\vec{n} \perp \vec{u} \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow (a, b, c) \cdot (4, 1, -1) = 0.$$

$$\therefore 4a + b - c = 0 \therefore c = 4a + b$$

Podemos, portanto, reescrever $\vec{n}$ da seguinte maneira:

$$\vec{n} = (a, b, 4a + b).$$

O cosseno do ângulo entre os planos α e β é calculado da seguinte forma:

$$\cos 60^\circ = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{m}|}{\|\vec{n}\| \cdot \|\vec{m}\|}.$$

Como $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, elevando ao quadrado a igualdade acima, concluímos que

$$\|\vec{n}\|^2 \|\vec{m}\|^2 = 4(\vec{n} \cdot \vec{m})^2. \quad (*)$$

Agora, note que:

$$\begin{cases} \|\vec{n}\|^2 = a^2 + b^2 + (4a+b)^2 = 17a^2 + 8ab + 2b^2 \\ \|\vec{m}\|^2 = 1^2 + 0^2 + 1^2 = 2 \\ (\vec{n} \cdot \vec{m})^2 = (a \cdot 1 + b \cdot 0 + (4a+b) \cdot 1)^2 = (5a+b)^2 = 25a^2 + 10ab + b^2. \end{cases}$$

Substituindo em $(*)$, obtemos:

$$2(17a^2 + 8ab + 2b^2) = 4(25a^2 + 10ab + b^2)$$

$$\therefore 33a^2 + 12ab = 0 \Rightarrow a(33a + 12b) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ \text{ou} \\ a = -\frac{12}{33} b \end{cases}$$

• Se $a=0$, então $\vec{n}$ é da forma $(0,b,b)$, com $b\neq 0$.
Podemos, então, tomar $\vec{n}=(0,1,1)$. $\leftarrow b=1$

• Se $a=-\frac{12}{33}b$, então $\vec{n}$ tem a seguinte forma:

$$\left(-\frac{12}{33}b,\ b,\ -\frac{48}{33}b+b\right)=\left(-\frac{12}{33}b,\ b,\ -\frac{15}{33}b\right),\ b\neq 0.$$

$\leftarrow b=-11$

Podemos, portanto, tomar $\vec{n}=(4,-11,5)$.

Como $(0,0,0)\in r$ e $r\subset\alpha$, então o plano α passa pela origem.

As soluções são, portanto:

$$y+z=0 \quad \text{e} \quad 4x-11y+5z=0.$$

—//—

③ (a) Sejam:

$$\begin{cases} A=(1,2,1) \text{ um ponto de } s; \\ \vec{v}=(0,1,0) \text{ um vetor diretor de } s. \end{cases}$$

Se r e s são paralelas, então:

(#) $d(r,s)=\dfrac{\|\vec{v}\times\vec{AP}\|}{\|\vec{v}\|}$, onde $P=(0,0,2)\in r$.

Como $\vec{AP}=(-1,-2,1)$ e $\vec{v}\times\vec{AP}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & -2 & 1\end{vmatrix}=(1,0,1)$,

segue, por (#), que

$$d(r,s)=\frac{\sqrt{1^2+0^2+1^2}}{\sqrt{0^2+1^2+0^2}}=\sqrt{2}$$

(b) Seja $\vec{u}=(a,b,c)$ um vetor diretor da reta r. Como r é paralela ao plano Oxy, segue que $\vec{u}\perp\vec{k}$, onde $\vec{k}=(0,0,1)$.

$\Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{k}=0 \therefore c=0 \quad \Rightarrow \vec{u}=(a,b,0)$.

Como r e s são reversas:

$$d(r,s) = \frac{|[\vec{AP}, \vec{u}, \vec{v}]|}{\|\vec{u} \times \vec{v}\|} \quad (*)$$

Note que:

- $[\vec{AP}, \vec{u}, \vec{v}] = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 \\ a & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = a$

- $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (0,0,a)$

Por $(*)$:

$$d(r,s) = \frac{|a|}{\sqrt{0^2+0^2+a^2}} = \frac{|a|}{\sqrt{a^2}} = \frac{|a|}{|a|} = 1$$

—//—

4º $\quad 3x - 5y + 1 = 0 \Rightarrow 5y = 1 + 3x \therefore y = \frac{1}{5} + \frac{3}{5}x.$

Fazendo $x = t$, obtemos:

$$\begin{cases} x = t \\ y = \frac{1}{5} + \frac{3}{5}t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = 3 + 5t \\ y = 2 + 3t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$$

—//—

5º Como o eixo é a reta que passa pelo vértice e pelo foco, segue que a equação do eixo da parábola é $x - 3 = 0$. Note que $d(V,F) = 2$. Uma vez que o eixo da parábola é uma reta vertical ($x = 3$), sabemos que a diretriz é, então, uma reta horizontal. Além disso, a distância do vértice para a reta diretriz é a mesma do vértice ao foco, i.e., 2. Portanto, a equação da diretriz é $y - 5 = 0$.

Seja $P=(x,y)$ um ponto qualquer da parábola.

É claro que a distância de P até a diretriz r é $5-y$.

Como $P \in \mathcal{P}$, então, por definição:

$$d(P,F) = d(P,r), \quad (*)$$

onde $d(P,F) = \sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2}$.

Logo, por $(*)$:

$$\sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2} = 5-y.$$

Elevando ao quadrado:

$$x^2-6x+9+y^2-2y+1 = 25-10y+y^2$$

$$\therefore x^2-6x-15 = -8y \text{ ou } y = -\frac{1}{8}x^2+\frac{3}{4}x+\frac{15}{8}$$