UNIVASF
UNIVERSIDADE FEDERAL DO VALE DO SÃO FRANCISCO

Professor: Felipe Wergete Cruz
Data: 28/08/2014 **Horário:** das 16:00h às 18:00h

Aluno: GABARITO **CPF:**

Exame Final de Geometria Analítica

Instruções

◇ Escreva seu nome e o número de seu CPF no lugar indicado desta folha.
◇ Confira que há **3 questões** no caderno de prova.
◇ Não é permitido qualquer tipo de consulta.
◇ Todos os aparelhos eletrônicos deverão permanecer desligados durante a prova.
◇ Leia atentamente o enunciado das questões antes de tentar solucioná-las.
◇ A interpretação da questão faz parte do processo de avaliação.
◇ As respostas somente serão aceitas com **justificativas**.
◇ Escreva **todos** os detalhes dos cálculos que o levarem a uma solução.
◇ Não será permitida a saída durante a prova, exceto se entregue em definitivo.

Questões

1. Considere os pontos $A = (1, 0, 1)$, $B = (1, 1, 1)$, $C = (2, 2, 1)$ e $D = (2, 1, 2)$.

   (a) $(1,0$ ponto$)$ Escreva a equação geral do plano α que passa por A, B e C.

   (b) $(1,0$ ponto$)$ Determine a projeção ortogonal do ponto D sobre o plano α.

   (c) $(1,0$ ponto$)$ Determine o volume do tetraedro $ABCD$, usando a fórmula $V = \dfrac{1}{3}A_b\,h$.

   (d) $(1,0$ ponto$)$ Determine o volume do tetraedro $ABCD$, usando o produto misto.

2. Sabemos que

$$\begin{cases} x &= u\cos\theta - v\,\text{sen}\,\theta \\ y &= u\,\text{sen}\,\theta + v\cos\theta \end{cases}$$

   são as **equações de rotação** de θ radianos no sentido anti-horário. Considere a cônica de equação

$$101\,x^2 + 60\sqrt{3}\,xy + 41\,y^2 = 1441.$$

   (a) $(1,5$ ponto$)$ Faça uma rotação conveniente para eliminar o termo quadrático misto, identificando o ângulo de rotação.

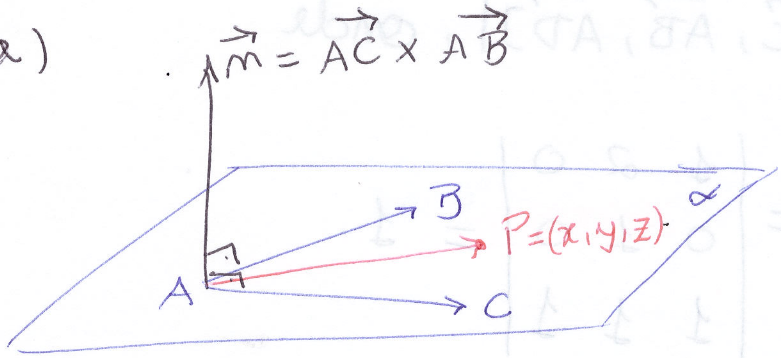
   (b) $(1,5$ ponto$)$ Identifique a cônica.

3. Qual é o conjunto descrito pelas equações abaixo? Identifique, quando possível, os seus elementos!

   (a) (1,5 ponto) $x^2 + y^2 + z^2 - \sqrt{3}x - 4y + 8 = 0$.

   (b) (1,5 ponto) $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 8z + 12 = 0$.

1º (a)



$\vec{AC} = (1,2,0)$

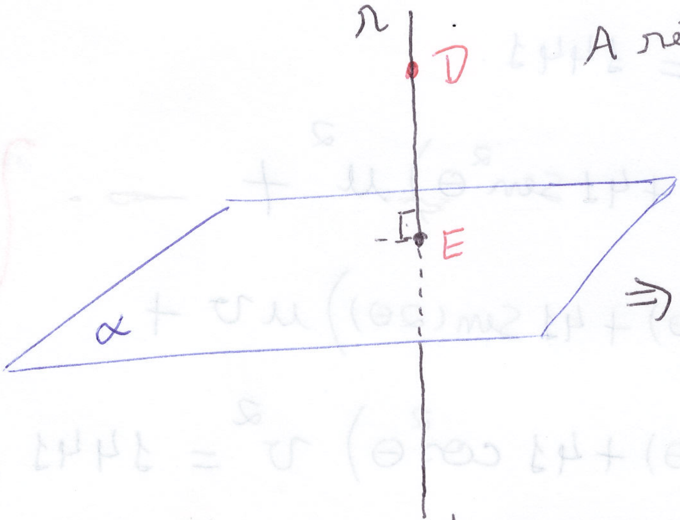
$\vec{AB} = (0,1,0)$

$$\vec{m} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (0,0,1)$$

$P \in \alpha \iff \vec{m} \perp \vec{AP} \iff \vec{m} \cdot \vec{AP} = 0$, onde $\vec{AP} = (x-1, y, z-1)$.

$\therefore\ 0\cdot(x-1) + 0\cdot y + 1\cdot(z-1) = 0 \Rightarrow z = 1$ eq. geral

(b)



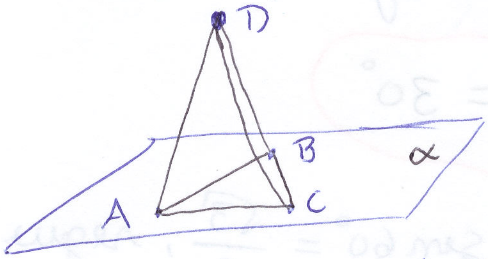
A reta r passa por D e é paralela ao vetor $\vec{m}$.

$$\Rightarrow r: \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = 2+t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$$

Nosso objetivo é encontrar o ponto $E = r \cap \alpha$.

$\Rightarrow 1 = z = 2+t \ \therefore\ \underline{t=-1} \ \therefore\ E = (2,1,1)$

(c)



Volume $= \frac{1}{3} A_b \cdot h$, onde h = altura, i.e.,

$h = d(D,E) = \sqrt{0^2+0^2+1^2} = 1$.

Note que A_b = área da base $= \frac{1}{2} \| \vec{AC} \times \vec{AB} \| = \frac{1}{2} \|(0,0,1)\| = \frac{1}{2}$.

$\Rightarrow$ volume $= \frac{1}{6}$

(d) volume $= \frac{1}{6} |[\vec{AC}, \vec{AB}, \vec{AD}]|$, onde

$$[\vec{AC}, \vec{AB}, \vec{AD}] = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

$$\Rightarrow \text{volume} = \frac{1}{6} \cdot |1| = \frac{1}{6}$$

—//—

2º (a) e (b)

$$101x^2 + 60\sqrt{3}\,xy + 41y^2 = 1441$$

$$101(u\cos\theta - v\,\text{sen}\,\theta)^2 + 60\sqrt{3}(u\cos\theta - v\,\text{sen}\,\theta)(u\,\text{sen}\,\theta + v\cos\theta) +$$
$$+ 41(u\,\text{sen}\,\theta + v\cos\theta)^2 = 1441.$$

$$\Rightarrow (101\cos^2\theta + 30\sqrt{3}\,\text{sen}(2\theta) + 41\,\text{sen}^2\theta)\,u^2 +$$
$$+ (60\sqrt{3}\cos(2\theta) - 101\,\text{sen}(2\theta) + 41\,\text{sen}(2\theta))\,uv +$$
$$(101\,\text{sen}^2\theta - 30\sqrt{3}\,\text{sen}(2\theta) + 41\cos^2\theta)\,v^2 = 1441. \quad (*)$$

Para eliminarmos o termo quadrático misto, devemos ter

$60\sqrt{3}\cos(2\theta) - 101\,\text{sen}(2\theta) + 41\,\text{sen}(2\theta) = 0$, ou seja,

$$60\,\text{sen}(2\theta) = 60\sqrt{3}\cos(2\theta) \therefore \text{tg}(2\theta) = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow 2\theta = \frac{\pi}{3}\,\text{rad} \therefore \theta = \frac{\pi}{6}\,\text{rad} = 30^\circ$$

Como $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\text{sen}\,30^\circ = \frac{1}{2}$ e $\text{sen}\,60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, segue,

de (*), que:

$$\left(101 \cdot \frac{3}{4} + 30\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 41 \cdot \frac{1}{4}\right) u^2 +$$

$$+\left(101 \cdot \frac{1}{4} - 30\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 41 \cdot \frac{3}{4}\right) v^2 = 1441 ,$$

é a equação da cônica no sistema rotacionado. Ou ainda:

$$\left(\frac{303}{4} + \frac{180}{4} + \frac{41}{4}\right) u^2 + \left(\frac{101}{4} - \frac{180}{4} + \frac{123}{4}\right) v^2 = 1441$$

$$\frac{524}{4} u^2 + \frac{44}{4} v^2 = 1441$$

$$131 u^2 + 11 v^2 = 1441 = 131 \cdot 11$$

$$\therefore \frac{u^2}{11} + \frac{v^2}{131} = 1$$

Trata-se de uma elipse rotacionada de 30° no sentido anti-horário.

—||—

3º (a) $x^2 + y^2 + z^2 - \sqrt{3}x - 4y + 8 = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 - \sqrt{3}x + \frac{3}{4} - \frac{3}{4} + y^2 - 4y + 4 - 4 + z^2 + 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + (y-2)^2 + z^2 = \frac{3}{4} + 4 - 8$$

$$0 \leq \left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + (y-2)^2 + z^2 = -\frac{13}{4} < 0$$

Trata-se do conjunto vazio!

(b) $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 8z + 12 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 - 4 + y^2 - 2y + 1 - 1 + z^2 + 8z + 16 - 16 + 12 = 0$

$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+4)^2 = 4 + 1 + 16 - 12$

$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+4)^2 = 9$

Trata-se de uma esfera de centro $(2, 1, -4)$ e raio 3.