Professor: Felipe Wergete Cruz
Data: 11/04/2013 **Horário**: das 08:00h às 10:00h

Aluno: GABARITO **CPF**: □□□□□□□□□□□

3ª Avaliação

Instruções

- Lembre que você será avaliado pelo que tiver escrito, não pelo que tiver pensado. Resolva as questões com calma e atenção, explicando/justificando sua resolução.
- Não deixe "cálculos espalhados" pelas páginas. Lembre-se que no Ocidente escrevemos da esquerda para à direita e de cima para baixo nessa ordem de prioridade. Se quiser economizar papel, divida explicitamente a página em colunas. Use conectivos como "se", "então", "porque", etc. Regras gramaticais, coesão e coerência também valem para textos matemáticos. O que estiver escrito fora desse padrão poderá ser considerado errado. Linguagem correta é essencial para a limpidez do raciocínio.
- A interpretação da questão faz parte do processo de avaliação.
- É proibido o uso de calculadoras, celulares ou pagers.
- Não é permitido qualquer tipo de consulta.
- Leia atentamente o enunciado das questões antes de tentar solucioná-las.

Questões

1. $(2,5$ pts$)$ Identifique a cônica de equação $x^2 + 3y^2 - 6x + 12y + 12 = 0$. Determine os elementos desta cônica: vértices, focos, centro (caso haja), diretriz (caso haja) e assíntotas (caso haja).
2. $(2,5$ pts$)$ Encontre a equação da hipérbole que passa pelo ponto $(2,1)$ com focos em $(0,0)$ e $(2,0)$. Escreva as equações das assíntotas. Determine as coordenadas dos vértices e do centro. Desenhe a hipérbole identificando os elementos encontrados.
3. $(2,0$ pts$)$ Encontre a equação da parábola de foco $(1,2)$ e vértice $(1,1)$.
4. $(3,0$ pts$)$ Reduza a equação $x^2 + y^2 - 2xy - 8\sqrt{2}x - 8\sqrt{2}y = 0$ à forma mais simples, através de eventuais translação e rotação. Dê o ângulo de rotação e descreva o conjunto representado (ou seja, identifique a cônica).

1º $x^2 + 3y^2 - 6x + 12y + 12 = 0$

$$\Rightarrow x^2 - 6x + 9 - 9 + 3(y^2 + 4y + 4 - 4) + 12 = 0$$

$$(x-3)^2 - 9 + 3(y+2)^2 - 12 + 12 = 0$$

$$(x-3)^2 + 3(y+2)^2 = 9$$

$$\boxed{\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{3} = 1}$$ Elipse de centro $(3,-2)$

$$a^2 = 9;\ b^2 = 3;\ c^2 = a^2 - b^2 \therefore c^2 = 9 - 3 = 6$$

$$\Rightarrow a = 3;\ b = \sqrt{3};\ c = \sqrt{6}.$$

Seja $\tilde{x} = x - 3$ e $\tilde{y} = y + 2$. Então

$$\frac{\tilde{x}^2}{9} + \frac{\tilde{y}^2}{3} = 1.$$

Seja $\tilde{O} = (3,-2)$. No sistema $\tilde{x}\tilde{O}\tilde{y}$, temos:

$\tilde{A}_1 = (-3,0)$, $\tilde{A}_2 = (3,0)$, $\tilde{B}_1 = (0,-\sqrt{3})$ e $\tilde{B}_2 = (0,\sqrt{3})$ Vértices

$\tilde{F}_1 = (-\sqrt{6},0)$ e $\tilde{F}_2 = (\sqrt{6},0)$ Focos

Logo, em xOy, temos:

Vértices

$A_1 = (0,-2)$, $A_2 = (6,-2)$, $B_1 = (3,-\sqrt{3}-2)$ e $B_2 = (3,\sqrt{3}-2)$

$F_1 = (-\sqrt{6}+3,-2)$ e $F_2 = (\sqrt{6}+3,-2)$ ← Focos

$C = (3,-2)$ ← centro

2º Como os focos estão sobre o eixo x, concluímos que o eixo real também está sobre o eixo x. Além disso, o centro da hipérbole é o ponto $(1,0)$, pois o centro é o ponto médio dos focos. Logo, a eq. da hipérbole é do tipo

$$\frac{(x-1)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (\#)$$

onde $\underline{a}$ e $\underline{b}$ são nºs reais positivos que iremos encontrar.

Seja $P=(2,1)$. Como P pertence à hipérbole, temos:

$$\frac{(2-1)^2}{a^2} - \frac{1^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \boxed{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} = 1} \quad (*)$$

Note que os vértices da hipérbole são os pontos

$$A_1 = (a_1, 0) \quad e \quad A_2 = (a_2, 0).$$

Logo, como A_1 e $A_2 \in$ à hipérbole, temos:

$$\frac{(x-1)^2}{a^2} = 1 \therefore (x-1)^2 = a^2 \therefore |x-1| = a$$

$$\Rightarrow x = 1 + a \text{ ou } x = 1 - a$$

$$\therefore a_1 = 1 - a \quad e \quad a_2 = 1 + a$$

$$\Rightarrow A_1 = (1-a, 0) \quad e \quad A_2 = (1+a, 0).$$

Por def. de hipérbole:

$$|d(P,F_1) - d(P,F_2)| = 2a,$$

onde $P = (2,1)$, $F_1 = (0,0)$ e $F_2 = (2,0)$.

Logo:

$$|\sqrt{5} - 1| = 2a$$

$$\therefore \boxed{a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}} \quad (\#)$$

Por (*), temos: $b^2 = \dfrac{a^2}{1-a^2}$.

Como $a^2 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ e $1-a^2 = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, segue que

$$b^2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1} \Rightarrow b^2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

Por $(\widetilde{\#})$, temos:

$$\boxed{\frac{(x-1)^2}{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} - \frac{y^2}{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} = 1}$$

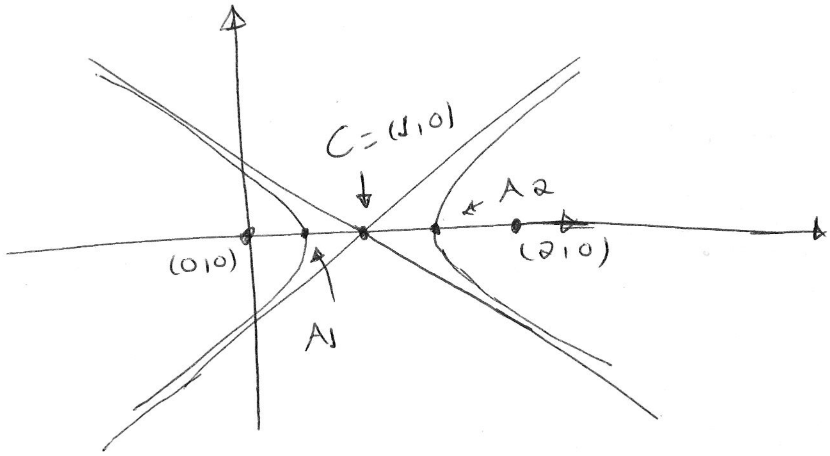
Como visto antes, os vértices são:

$A_1 = (1-a, 0)$ e $A_2 = (1+a, 0)$.

Logo:

$$A_1 = \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}, 0\right) \quad \text{e} \quad A_2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, 0\right)$$

O centro é $C = (1,0)$.



Vimos em aula que as eq. das assíntotas são

$$y = \pm \frac{b}{a}(x-1), \text{ onde } \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sqrt{5}-1}}.$$

Logo, as assíntotas são:

$$y = \pm \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sqrt{5}-1}}(x-1).$$

Ver esboço acima.

3º) Como o foco e o vértice estão sobre a reta vertical $x=1$, concluímos que a concavidade da parábola é voltada para cima e sua eq. é da forma

$$(y-k) = \frac{1}{4p}(x-h)^2, \text{ onde } h = k = 1.$$

Note que neste caso a reta diretriz tem eq. $y=0$ (eixo x), pois $d(V,F) = d(V, \text{diretriz})$. Como a eq. da diretriz é da forma $y = 1-p$, segue que $p=1$. Portanto, a eq. da parábola é:

$$y-1 = \frac{1}{4}(x-1)^2 \Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{5}{4}}$$

4º Lembre-se que

$$\begin{cases} x = x'\cos\theta - y'\operatorname{sen}\theta \\ y = x'\operatorname{sen}\theta + y'\cos\theta \end{cases}$$

Devemos "eliminar" o termo $x'y'$. Note que o coeficiente de $x'y'$ é:

$-2\operatorname{sen}\theta\cos\theta + 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta - 2\cos^2\theta + 2\operatorname{sen}^2\theta$.

Para que $x'y'$ "desapareça", devemos ter:

$$-2\cos(2\theta) = 0 \therefore \cos(2\theta) = 0$$

$$\Rightarrow 2\theta = \frac{\pi}{2} \therefore \boxed{\theta = \frac{\pi}{4} \text{ rad} = 45^\circ}$$

Logo:

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y') \text{ e } y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y').$$

Portanto, a eq. é:

$$\frac{1}{2}x'^2 + \frac{1}{2}y'^2 + \frac{1}{2}x'^2 + \frac{1}{2}y'^2 - 2\left(\frac{1}{2}x'^2 - \frac{1}{2}y'^2\right) -$$

$$-8\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y') - 8\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y') = 0$$

$$\Rightarrow 2y'^2 - 8x' + 8y' - 8x' - 8y' = 0$$

$$\Rightarrow 2y'^2 - 16x' = 0 \Rightarrow \boxed{x' = \frac{1}{8}y'^2} \text{ (Parábola)}$$