UNIVASF
UNIVERSIDADE FEDERAL DO VALE DO SÃO FRANCISCO

Professor: Felipe Wergete Cruz
Data: 11/04/2013 **Horário**: das 10:00h às 12:00h

Aluno: GABARITO **CPF**: ☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐

3ª Avaliação

Instruções

- Lembre que você será avaliado pelo que tiver escrito, não pelo que tiver pensado. Resolva as questões com calma e atenção, explicando/justificando sua resolução.
- Não deixe "cálculos espalhados" pelas páginas. Lembre-se que no Ocidente escrevemos da esquerda para à direita e de cima para baixo nessa ordem de prioridade. Se quiser economizar papel, divida explicitamente a página em colunas. Use conectivos como "se", "então", "porque", etc. Regras gramaticais, coesão e coerência também valem para textos matemáticos. O que estiver escrito fora desse padrão poderá ser considerado errado. Linguagem correta é essencial para a limpidez do raciocínio.
- A interpretação da questão faz parte do processo de avaliação.
- É proibido o uso de calculadoras, celulares ou pagers.
- Não é permitido qualquer tipo de consulta.
- Leia atentamente o enunciado das questões antes de tentar solucioná-las.

Questões

1. (2,5 pts) Identifique a cônica de equação $x^2 + 2y^2 - 6x + 12y + 23 = 0$. Determine os elementos desta cônica: vértices, focos, centro (caso haja), diretriz (caso haja) e assíntotas (caso haja).
2. (2,5 pts) Seja $\mathcal{H}$ a hipérbole que tem as retas $x - y + 2 = 0$ e $x + y - 2 = 0$ como assíntotas e um dos focos no ponto $(2, 2)$. Determine a equação de $\mathcal{H}$ assim como seu centro, seus vértices e focos. Desenhe $\mathcal{H}$ identificando os elementos encontrados.
3. (2,0 pts) Um ponto P se move de modo que a soma dos quadrados de suas distâncias aos pontos $(2, 0)$ e $(-1, 0)$ é sempre igual a 5. Determine e identifique a equação do lugar geométrico descrito por P.
4. (3,0 pts) Reduza a equação $4x^2 + y^2 - 4xy - 8\sqrt{5}x - 16\sqrt{5}y = 0$ à forma mais simples, através de eventuais translação e rotação. Dê o ângulo de rotação e descreva o conjunto representado (ou seja, identifique a cônica).

(1°) $x^2 + 2y^2 - 6x + 12y + 23 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 6x + 9 - 9 + 2(y^2 + 6y + 9 - 9) + 23 = 0$

$\Rightarrow (x-3)^2 - 9 + 2(y+3)^2 - 18 + 23 = 0$

$\Rightarrow (x-3)^2 + 2(y+3)^2 = 4$

$\Rightarrow \boxed{\dfrac{(x-3)^2}{4} + \dfrac{(y+3)^2}{2} = 1}$ Elipse de centro $(3, -3)$.

$a^2 = 4$; $b^2 = 2$; $c^2 = a^2 - b^2 \therefore c^2 = 4 - 2 \therefore c^2 = 2$

$\Rightarrow a = 2$; $b = c = \sqrt{2}$.

Seja $x' = x - 3$ e $y' = y + 3$, $O' = (3, -3)$. Em $x'O'y'$, temos $\dfrac{x'^2}{4} + \dfrac{y'^2}{2} = 1$ (elipse com centro na origem).

Sabemos que, neste caso: ← Vértices

$A_1' = (-2, 0)$, $A_2' = (2, 0)$, $B_1' = (0, -\sqrt{2})$, $B_2' = (0, \sqrt{2})$

Focos: $F_1' = (-\sqrt{2}, 0)$ e $F_2' = (\sqrt{2}, 0)$.

Logo, em xOy, temos:

<u>Vértices</u>: $A_1 = (1, -3)$, $A_2 = (5, -3)$, $B_1 = (3, -\sqrt{2} - 3)$, $B_2 = (3, \sqrt{2} - 3)$

<u>Focos</u>: $F_1 = (-\sqrt{2} + 3, -3)$ e $F_2 = (\sqrt{2} + 3, -3)$

2º) Sabemos que o ponto de interseção das assíntotas é o centro da hipérbole. Logo: $C = (0,2)$.

Também sabemos que as eq. das assíntotas são:

$$y - k = \pm \frac{b}{a}(x - h),$$

onde (h,k) é o centro da hipérbole e $\underline{a}$ e $\underline{b}$ são as medidas dos semi-eixos real e imaginário, respectivamente.

Logo, como $(h,k) = (0,2)$, temos:

$$y - 2 = \pm \frac{b}{a} x \Rightarrow \boxed{y = \pm \frac{b}{a} x + 2}.$$

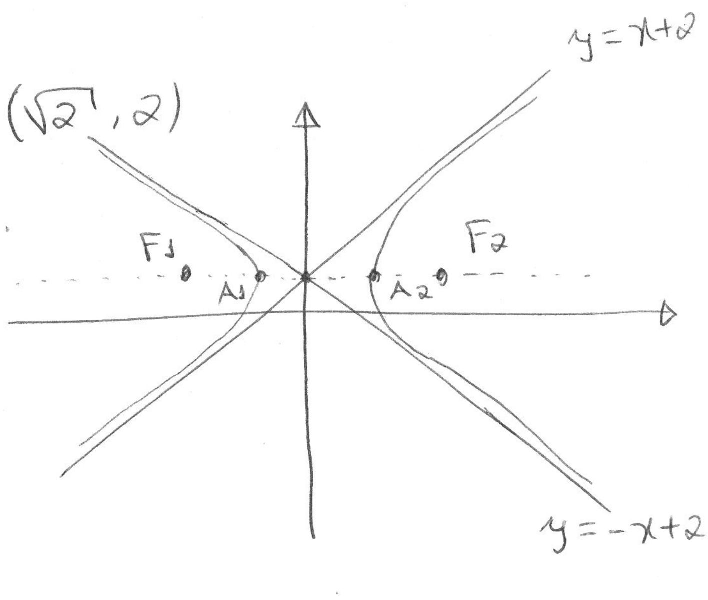
Como $a, b > 0$, segue que $\frac{b}{a} = 1$ (por hipótese): $a = b$.

Por definição, $c = d(C, F)$, onde C é o centro e F é um dos focos da hipérbole. Logo: $c = 2$.

Como $c^2 = a^2 + b^2$, temos $2a^2 = 4 \therefore \boxed{a = b = \sqrt{2}}$.

Portanto, a eq. da hipérbole é:

$$\frac{x^2}{2} - \frac{(y-2)^2}{2} = 1.$$



__Vértices__: $A_1 = (-\sqrt{2}, 2)$, $A_2 = (\sqrt{2}, 2)$

__Focos__: $F_1 = (-2,2)$, $F_2 = (2,2)$.

__Centro__: $C = (0,2)$

3º) Seja $P=(x,y)$ um ponto qualquer do plano tal que $d(P,F_1)^2+d(P,F_2)^2=5$, onde $F_1=(2,0)$ e $F_2=(-1,0)$. Então

$$\left[(x-2)^2+y^2\right]+\left[(x+1)^2+y^2\right]=5$$

$$\therefore\ x^2-4x+4+y^2+x^2+2x+1+y^2=5$$

$$\cancel{2x^2+2y^2+5=5}$$

$$2x^2-2x+2y^2+5=5\ \therefore\ x^2-x+y^2=0$$

$$\Rightarrow x^2-x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+y^2=0$$

$$\therefore\ \boxed{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}}$$

~~Elipse~~ Circunferência de centro $\left(\frac{1}{2},0\right)$ e raio $\frac{1}{2}$.

④ Lembre-se que

$$\begin{cases} x = x'\cos(\theta) - y'\operatorname{sen}(\theta) \\ y = x'\operatorname{sen}(\theta) + y'\cos(\theta) \end{cases}$$

O objetivo é "eliminar" o termo misto $x'y'$. Ou seja, devemos anular o seguinte coeficiente:

$$4(-2\operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta)) + 2\operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta) - 4(\cos^2(\theta) - \operatorname{sen}^2(\theta)),$$

i.e.,

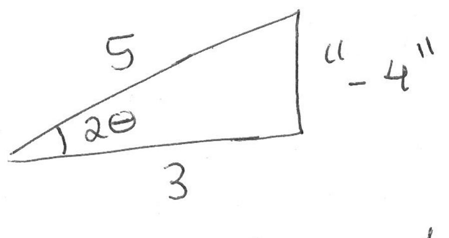
$$-3\operatorname{sen}(2\theta) - 4\cos(2\theta) = 0$$

$$3\operatorname{sen}(2\theta) = -4\cos(2\theta) \Rightarrow \boxed{tg(2\theta) = -\frac{4}{3}}$$

Como $tg(2\theta) < 0$, podemos supor que 2θ está no 4º quadrante, i.e; ~~2θ ∈~~ $2\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, ou

$\theta \in \left(-\frac{\pi}{4}, 0\right)$ (rotação no sentido horário)

$\Rightarrow \cos(\theta) > 0$ e $\operatorname{sen}(\theta) < 0$. (∗)



$\Rightarrow \cos(2\theta) = \frac{3}{5}$

Como $\cos^2(\theta) = \frac{1+\cos(2\theta)}{2}$ e $\operatorname{sen}^2(\theta) = \frac{1-\cos(2\theta)}{2}$,

temos que:

$$\cos^2(\theta) = \frac{4}{5} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}^2(\theta) = \frac{1}{5}.$$

Pela Observação (∗): $\operatorname{sen}(\theta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ e $\cos(\theta) = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

$$\Rightarrow \boxed{\theta = \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{2}\right)}$$

Assim:

$$x = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x' + y') \quad \text{e} \quad y = \frac{1}{\sqrt{5}}(-x' + 2y'). \qquad (\#)$$

Substituindo (#) na eq. geral da cônica, temos:

$$4\left(\frac{4x'^2}{5} + \frac{y'^2}{5}\right) + \left(\frac{x'^2}{5} + \frac{4y'^2}{5}\right) -$$

$$-4\left(-\frac{2}{5}x'^2 + \frac{2}{5}y'^2\right) - 8\sqrt{5}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}(2x' + y') -$$

$$-16\sqrt{5}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}(-x' + 2y') = 0, \quad \text{isto é:}$$

$$5x'^2 - 40y' = 0 \;\therefore\; \boxed{y' = \frac{1}{8}x'^2} \quad \text{Parábola}$$

~~Parábola com vértice na~~

Em $x'Oy'$, temos:

$$\begin{cases} V' = (0,0) & \text{vértice} \\ F' = (0,2) & \text{foco} \\ \text{diretriz: } y' = -2 & \\ \text{eixo de simetria: } x' = 0 \ (\text{eixo } y') & \end{cases}$$

Logo, em xOy:

$V = (0,0)$, $F = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{4}{\sqrt{5}}\right)$

diretriz: $y = -\frac{1}{2}x - \sqrt{5}$

eixo de simetria: $y = 2x$