

Professor: Felipe Wergete Cruz**Data:** 07/03/2013**Horário:** das 08:00h às 10:00h**Aluno:** GABARITO**CPF:**

2ª Avaliação

Instruções

- Lembre que você será avaliado pelo que tiver escrito, não pelo que tiver pensado. Resolva as questões com calma e atenção, explicando/justificando sua resolução.
- Não deixe “cálculos espalhados” pelas páginas. Lembre-se que no Ocidente escrevemos da esquerda para à direita e de cima para baixo nessa ordem de prioridade. Se quiser economizar papel, divida explicitamente a página em colunas. Use conectivos como “se”, “então”, “porque”, etc. Regras gramaticais, coesão e coerência também valem para textos matemáticos. O que estiver escrito fora desse padrão poderá ser considerado errado. Linguagem correta é essencial para a limpidez do raciocínio.
- A interpretação da questão faz parte do processo de avaliação.
- É proibido o uso de calculadoras, celulares ou pagers.
- Não é permitido qualquer tipo de consulta.
- Leia atentamente o enunciado das questões antes de tentar solucioná-las.

Questões

1. (2,0 pts) Determine a equação geral do plano que contém os pontos $A(1, 2, 0)$, $B(0, 1, 2)$ e $C(1, 1, 1)$.
2. Considere o ponto $P(1, 0, 2)$ e a reta $r : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = t \end{cases}$.
 - (a) (1,0 pt) Ache o pé da perpendicular à reta r relativa ao ponto P .
 - (b) (1,0 pt) Determine as equações paramétricas da reta s que passa por P e corta r perpendicularmente.

3. Considere as retas $r : \begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = 3 + t \end{cases}$ e $s : \begin{cases} x = -\lambda \\ y = -1 - 2\lambda \\ z = 1 + 3\lambda \end{cases}$.

- (a) (2,0 pts) Qual é a posição relativa destas retas no espaço? Justifique.
- (b) (2,0 pts) Ache as equações gerais dos planos paralelos π_1 e π_2 que contêm r e s , respectivamente.
- (c) (2,0 pts) Calcule a distância entre r e s .

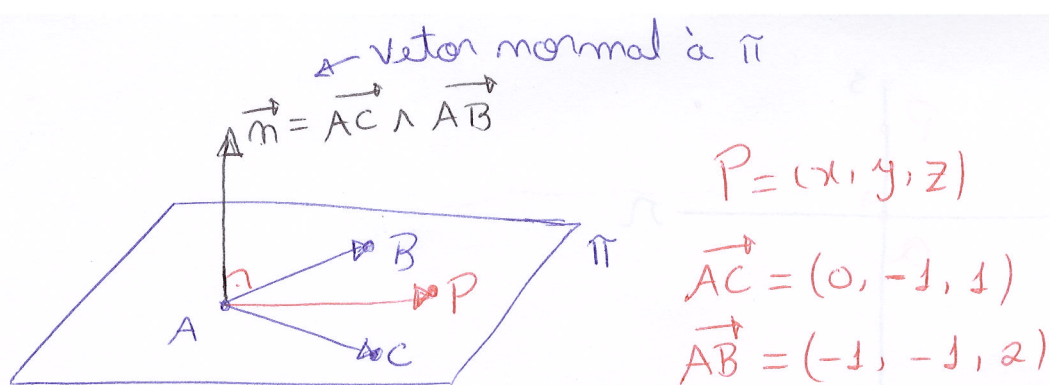
Instruções

- Leia atentamente o enunciado das questões antes de tentar solucioná-las.
- Não é permitido qualquer tipo de consulta.
- É proibido o uso de calculadoras, celulares ou pagens.
- A interpretação da questão faz parte do processo de avaliação.
- O que estiver escrito fora desse padrão poderá ser considerado errado. Lâminas corretas e essenciais para a limpeza do raciocínio.
- Não deixe "cálculos espalhados" pelas páginas. Lembre-se que no Ocidente escrevemos da esquerda para a direita e de cima para baixo nessa ordem de prioridade. Se quiser economizar papel, divida explicitamente a página em colunas. Use conectivos como "se", "então", "por-que", etc. Regras gramaticais, coerção e coesão também valem para textos matemáticos.
- Não deixe "cálculos espalhados" pelas páginas. Lembre-se que no Ocidente escrevemos da esquerda para a direita e de cima para baixo nessa ordem de prioridade. Se quiser economizar papel, divida explicitamente a página em colunas. Use conectivos como "se", "então", "por-que", etc. Regras gramaticais, coerção e coesão também valem para textos matemáticos.
- Leia atentamente o enunciado das questões antes de tentar solucioná-las.
- Não é permitido qualquer tipo de consulta.
- É proibido o uso de calculadoras, celulares ou pagens.
- A interpretação da questão faz parte do processo de avaliação.

Questões

1. (2,0 pts) Determine a equação geral do plano que contém os pontos $A(1,2,0)$, $B(0,1,2)$ e $C(1,1,1)$.
2. Considere o ponto $P(1,0,2)$ e a reta $r : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = t \end{cases}$.
- (a) (1,0 pt) Ache o pé da perpendicular à reta r relativa ao ponto P .
- (b) (1,0 pt) Determine as equações paramétricas da reta s que passa por P e corta r perpendicularmente.

1º



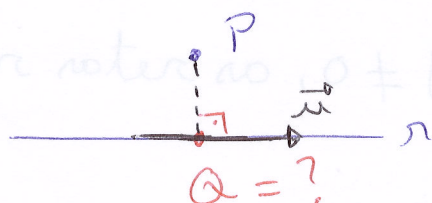
$$\vec{m} = \vec{AC} \wedge \vec{AB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (-1, -1, -1)$$

$$\vec{m} \cdot \vec{AP} = 0 \Rightarrow (-1, -1, -1) \cdot (x-1, y-2, z) = 0$$

$$\therefore -x+1-y+2-z=0$$

$$\therefore \boxed{x+y+z=3}$$

2º (a) Note que $P \notin \pi$.



Como $Q \in r$, temos que $Q = (1+t, 2-t, t)$, para algum $t \in \mathbb{R}$.

Seja $\vec{u} = (1, -1, 1)$ um vetor diretor de r .

Note que $\vec{PQ} \perp \vec{u} \Rightarrow \vec{PQ} \cdot \vec{u} = 0$.

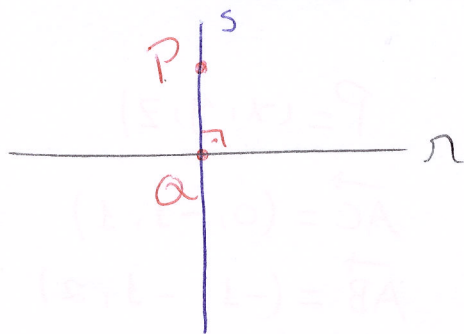
Logo: $(t, 2-t, t-2) \cdot (1, -1, 1) = 0$

$\vec{PQ} \Rightarrow t - 2 + t + t - 2 = 0 \therefore 3t = 4 \therefore t = \frac{4}{3}$

$$\Rightarrow Q = \left(1 + \frac{4}{3}, 2 - \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

$$\therefore \boxed{Q = \left(\frac{7}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)}$$

(b)



A reta s é a reta que passa por P e Q .

Logo $\overrightarrow{PQ} = \left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ é um vetor diretor de s .

$$\Rightarrow s: \begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 2t \\ z = 2 - 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

3º (a) Sejam $A = (0, 1, 3) \in \pi$ e $B = (0, -1, 1) \in s$.

Considere $\vec{u} = (1, 1, 1)$ e $\vec{v} = (-1, -2, 3)$ vetores diretores de π e s , respectivamente.

Sabemos que $\text{re}[\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}] \neq 0$, as retas π e s não são reversas.

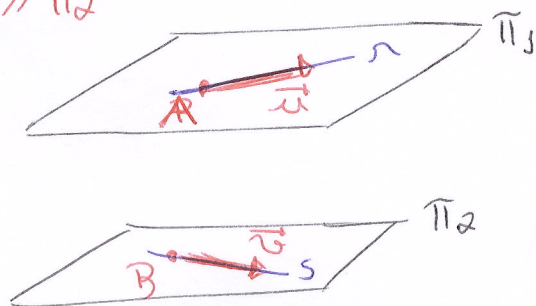
Note que

$$[\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}] = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -10 \neq 0.$$

Logo, π e s são reversas!!!

— // —

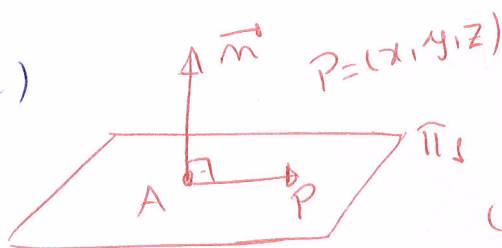
(b) $\pi_1 \parallel \pi_2$



Note que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores diretores de π_1 e π_2 .
Logo $\vec{n} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ é vetor normal de π_1 e de π_2 .

$$\vec{m} = \vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = (5, -4, -1).$$

Logo: (i)



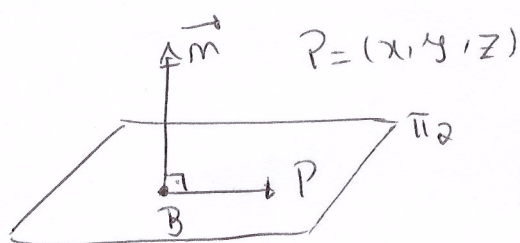
$$\vec{AP} \cdot \vec{m} = 0$$

$$(x, y-1, z-3) \cdot (5, -4, -1) = 0$$

$$\therefore 5x - 4y + 4 - z + 3 = 0$$

$$\therefore \boxed{5x - 4y - z = -7} \text{ eq. geral de } \pi_1$$

(ii)



~~$$\vec{BP} \cdot \vec{m} = 0$$~~

~~$$(x+1, y+2, z-3) \cdot (5, -4, -1) = 0$$~~

~~$$5x + 5 = 4y - 8 - z + 3 = 0$$~~

~~$$5x - 4y - z = -3$$~~

$$\vec{BP} \cdot \vec{m} = 0 \Rightarrow (x, y+1, z-1) \cdot (5, -4, -1) = 0$$

$$\therefore 5x - 4y - 4 - z + 1 = 0$$

$$\therefore \boxed{5x - 4y - z = 3} \text{ eq. geral de } \pi_2$$

- II -

(c) Note que $d(r, s) = d(\pi_1, \pi_2) = d(A, \pi_2)$, onde

$A = (0, 1, 3) \in \pi_1$. Além disso:

$$d(A, \pi_2) = \frac{|\vec{AB} \cdot \vec{m}|}{\|\vec{m}\|}, \text{ onde } \vec{m} = \vec{u} \wedge \vec{v} \text{ é vetor normal de } \pi_2$$

$$\Rightarrow d(r, s) = \frac{|\vec{AB} \cdot \vec{u} \wedge \vec{v}|}{\|\vec{m}\|} = \frac{|-10|}{\sqrt{25+16+1}} \Rightarrow \boxed{d(r, s) = \frac{10}{\sqrt{42}}}$$