UNIVERSIDADE FEDERAL DO VALE DO SÃO FRANCISCO

Professor: Felipe Wergete Cruz
Data: 07/03/2013 **Horário**: das 10:00h às 12:00h

Aluno: GABARITO **CPF**:

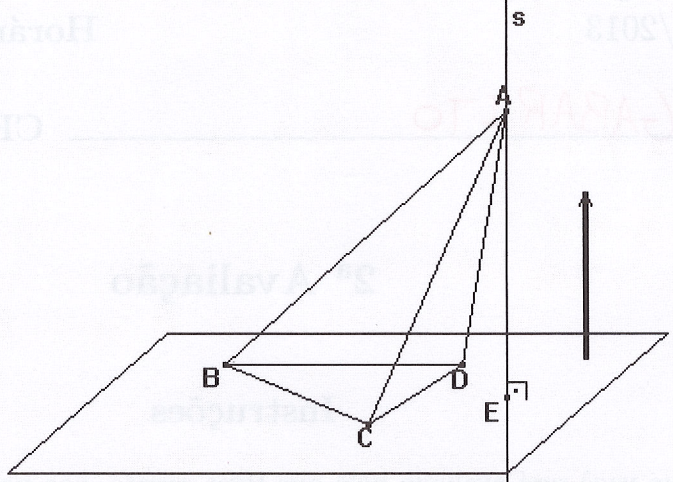
2ª Avaliação

Instruções

- Lembre que você será avaliado pelo que tiver escrito, não pelo que tiver pensado. Resolva as questões com calma e atenção, explicando/justificando sua resolução.
- Não deixe "cálculos espalhados" pelas páginas. Lembre-se que no Ocidente escrevemos da esquerda para à direita e de cima para baixo nessa ordem de prioridade. Se quiser economizar papel, divida explicitamente a página em colunas. Use conectivos como "se", "então", "porque", etc. Regras gramaticais, coesão e coerência também valem para textos matemáticos. O que estiver escrito fora desse padrão poderá ser considerado errado. Linguagem correta é essencial para a limpidez do raciocínio.
- A interpretação da questão faz parte do processo de avaliação.
- É proibido o uso de calculadoras, celulares ou pagers.
- Não é permitido qualquer tipo de consulta.
- Leia atentamente o enunciado das questões antes de tentar solucioná-las.

Questões

1. (2,0 pts) Escreva as equações paramétricas da reta que passa pelo ponto $P = (0,0,2)$ e é paralela à reta $r : \dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y+3}{3} = z$.
2. (2,0 pts) Determine a equação geral do plano que contém a reta $r : P = (0,0,1) + t\,(1,1,0)$ e é perpendicular ao plano $\pi : x + 2y + z = 2$.
3. Considere o tetraedro $ABCD$ da figura abaixo, onde $A(1,0,0)$, $B(0,2,0)$, $C(3,1,0)$ e $D(1,4,2)$.



(a) (2,0 pts) Determine as coordenadas do ponto E, obtido pela projeção ortogonal do vértice A sobre o plano da face BCD.

(b) (2,0 pts) Determine a distância do vértice A ao plano da face BCD.

4. (2,0 pts) Determine a distância entre as retas reversas

$$r : \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 2 - t \end{cases} \quad \text{e} \quad s : \begin{cases} x = \lambda \\ y = -2 + \lambda \\ z = 3 \end{cases}$$

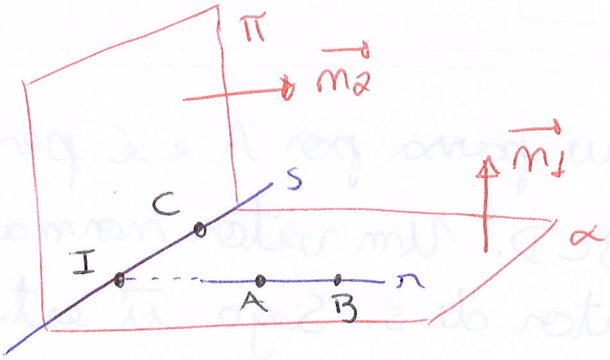
1º) Seja s a reta paralela à r que passa por P.

Como $\vec{u} = (3,3,1)$ é um vetor diretor de r e $s \parallel r$, segue que s passa por P e tem a direção de $\vec{u}$. Logo:

$$s: \begin{cases} x = 3t \\ y = 3t \\ z = 2+t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

2º) Seja α o plano que contém r e é perpendicular à π.

Sejam $\vec{n_1}$ e $\vec{n_2}$ vetores normais dos planos α e π, respectivamente. Então $\vec{n_1} \perp \vec{n_2}$, onde $\vec{n_2} = (1,2,1)$.



Sejam $A = (0,0,1)$ e $B = (1,1,1)$ pontos de r.

Seja $I \in r \cap \pi$. Conclui-se facilmente que $I = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1\right)$.

Sejam $s = \alpha \cap \pi$ e $C \in s$, $C \neq I$.

Como $C \in \pi$, então $C = (a, b, 2-a-2b)$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Note que $\vec{n_1} = \vec{AB} \wedge \vec{AC}$

$\Rightarrow \vec{n_1} = (1-a-2b,\ a+2b-1,\ b-a)$.

Como $\vec{n_1} \perp \vec{n_2}$, então

$1 - a - 2b + 2a + 4b - 2 + b - a = 0 \Rightarrow \boxed{b = \frac{1}{3}}$

Logo, $\vec{m_1} = \left(\frac{1}{3} - a, a - \frac{1}{3}, \frac{1}{3} - a\right)$.

$$\Rightarrow \alpha: \left(\frac{1}{3} - a\right)x + \left(a - \frac{1}{3}\right)y + \left(\frac{1}{3} - a\right)z = d$$

$$\Rightarrow \alpha: (1-3a)x + (3a-1)y + (1-3a)z = 3d$$

Como $A \in r \subset \pi$, então:

$$1 - 3a = 3d$$

$$\Rightarrow \alpha: 3dx - 3dy + 3dz = 3d$$

$\therefore$ $\boxed{\alpha: x - y + z = 1}$ (resposta)

3º (a) Seja $\underline{s}$ a reta que passa por A e é perpendicular ao plano da face BCD. Um vetor normal desse plano é também vetor diretor de s. Seja $\vec{u}$ este vetor.

Então: $\vec{u} = \vec{BC} \wedge \vec{BD} = (-2, -6, 7)$.

Logo, $s: \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -6t \quad , t \in \mathbb{R}. \\ z = 7t \end{cases}$

Seja α o plano da face BCD. Lembre-se que $\vec{u}$ é vetor normal de α. Logo

$$\vec{BP} \cdot \vec{u} = 0, \quad \forall\ P = (x, y, z) \in \alpha.$$

$$\Rightarrow (x, y-2, z) \cdot (-2, -6, 7) = 0$$

$\therefore -2x - 6y + 12 + 7z = 0 \quad \therefore \boxed{\alpha: 2x + 6y - 7y = 12}$

Note, por fim, que $\alpha \cap s = \{E\}$.

Assim, $2(1-2t) + 6(-6t) - 7(7t) = 12$

$\therefore 2 - 4t - 36t - 49t = 12$

$-89t = 10 \therefore \boxed{t = -\frac{10}{89}}$

$\Rightarrow E = \left(1 + 2\cdot\frac{10}{89}, 6\cdot\frac{10}{89}, -7\cdot\frac{10}{89}\right)$

$\therefore \boxed{E = \left(\frac{109}{89}, \frac{60}{89}, \frac{-70}{89}\right)}$

—//—

(b) Note que $d(A,\alpha) = d(A,E) = \|\vec{AE}\| = d$.

Como $\vec{AE} = \left(\frac{20}{89}, \frac{60}{89}, -\frac{70}{89}\right)$, então

$$d = \sqrt{\frac{(20)^2 + (60)^2 + (70)^2}{(89)^2}} = \sqrt{\frac{8900}{(89)^2}} = \sqrt{\frac{100}{89}} = \frac{10}{\sqrt{89}}$$

(4º) Sejam $A = (0,0,2) \in r$ e $B = (0,-2,3) \in s$.

Considere $\begin{cases} \vec{u} = (1,0,-1) \text{ vetor diretor de } r \\ \quad\text{e} \\ \vec{v} = (1,1,0) \quad " \quad " \quad " \; s \end{cases}$

Sabemos que $d(r,s) = \frac{|[\vec{AB}, \vec{u}, \vec{v}]|}{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|}$.

É fácil ver que $|[\vec{AB}, \vec{u}, \vec{v}]| = 3$ e que $\|\vec{u}\wedge\vec{v}\| = \sqrt{3}$.

Logo: $d(r,s) = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$.