

GABARITO / TURMA EX

PROVA 1

1º (a) Basta verificar que os pontos A, B e C não são colineares. Se A, B e C fossem colineares, existiria um n.º real λ tal que $\vec{AB} = \lambda \vec{AC}$.

Como $\vec{AB} = B - A = (1, 2, 1)$ e $\vec{AC} = C - A = (-1, 2, 0)$, então para que A, B e C fossem colineares, teríamos

$$(1, 2, 1) = \lambda(-1, 2, 0),$$

o que não pode, pois, do contrário, teríamos

$$\lambda = -1, \lambda = 1 \text{ e } 1 = 0,$$

o que é um absurdo.

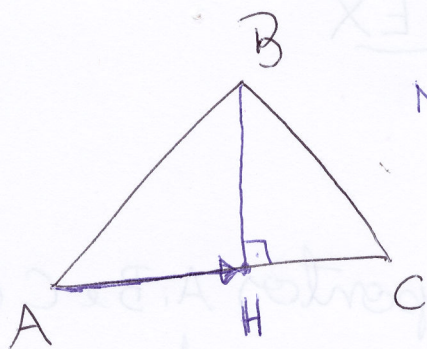
Conforme visto em aula, a área do triângulo é dada por:

$$A = \frac{1}{2} \|\vec{BC} \wedge \vec{AB}\|,$$

$$\text{onde } \vec{BC} \wedge \vec{AB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (2, 1, -4).$$

$$\text{Logo: } A = \frac{1}{2} \sqrt{(2)^2 + (1)^2 + (-4)^2} \Rightarrow A = \frac{\sqrt{21}}{2}$$

(b)



Note que

$$\vec{AH} = \text{Proj}_{\vec{AC}} \vec{AB}$$

$$\text{Logo, } \vec{AH} = \left(\frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{\vec{AC} \cdot \vec{AC}} \right) \vec{AC} =$$

$$= \frac{-1 + 4 + 0}{1 + 4 + 0} (-1, 2, 0)$$

$$\Rightarrow \vec{AH} = \left(-\frac{3}{5}, \frac{6}{5}, 0 \right)$$

Por outro lado, $\vec{AH} = H - A$, ou seja,

$$H - A = \left(-\frac{3}{5}, \frac{6}{5}, 0 \right)$$

$$\Rightarrow H = A + \left(-\frac{3}{5}, \frac{6}{5}, 0 \right)$$

$$\therefore H = \left(1 - \frac{3}{5}, 0 + \frac{6}{5}, 0 + 0 \right)$$

$$\therefore H = \left(\frac{2}{5}, \frac{6}{5}, 0 \right)$$

A altura do triângulo relativa ao vértice B é igual a $\|\vec{BH}\|$. Como $\vec{BH} = H - B = \left(-\frac{8}{5}, -\frac{4}{5}, -1 \right)$,

$$\text{então a altura é } \sqrt{\frac{64}{25} + \frac{16}{25} + 1} = \frac{\sqrt{105}}{5}$$

(C) Basta verificar que os vetores $\vec{OA}$, $\vec{OB}$ e $\vec{OC}$ não são coplanares, isto é, que $[\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}] \neq 0$.

Note que

$$[\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

Vimos que o volume do tetraedro $OABC$ é dado por $\frac{1}{6} |[\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}]|$.

$$\text{Logo, } V = \frac{1}{6} \cdot |-2| \Rightarrow V = \frac{1}{3}$$

(d) Para que $ABCD$ seja um paralelogramo, devemos ter $\vec{AB} = \vec{DC}$.

Seja $D = (a, b, c)$. Então $\vec{AB} = (1, 2, 1)$ e

$\vec{DC} = (-a, 2-b, -c)$. Logo,

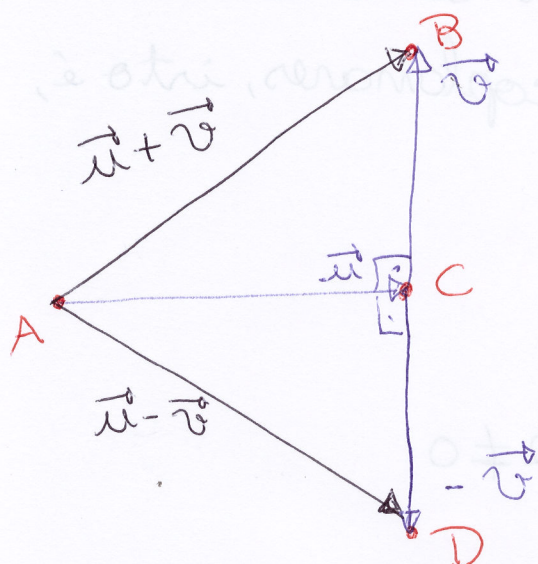
$$-a = 1, \quad 2-b = 2 \quad \text{e} \quad -c = 1$$

$$\Rightarrow a = -1, \quad b = 0 \quad \text{e} \quad c = -1.$$

$$\therefore D = (-1, 0, -1)$$

(2º)

1ª Maneira: Hipótese: $\vec{u} \perp \vec{v}$



U Teorema de Pitágoras aplicado ao ΔABC ,
nos dá: $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$. (*)

E aplicando Pitágoras no ΔACD , obtemos

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{-v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2. (\#)$$

Por (*) e (#), obtemos $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u} - \vec{v}\|$.

2ª Maneira: Hipótese: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

$$\begin{aligned} (i) \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 &= (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \\ &= \|\vec{u}\|^2 + \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} + \|\vec{v}\|^2 = \\ &= \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2, \text{ pois } \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u} = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (ii) \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 &= (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \\ &= \|\vec{u}\|^2 - \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{v} \cdot \vec{u} + \|\vec{v}\|^2 = \\ &= \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2. \end{aligned}$$

Por (i) e (ii) segue que $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u} - \vec{v}\|$.