

GABARITO / TURMA 11

PROVA 1

1º) Devemos encontrar m^{os} reais a e b tais que
 $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$.

Ansim:

$$(-12, 6) = a(2, -4) + b(-5, 4)$$

$$\begin{cases} 2a - 5b = -12 \\ -4a + b = 6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = -1 \text{ e } b = 2$$

Logo: $\vec{w} = -\vec{u} + 2\vec{v}$

2º) (a) Devemos mostrar que $\vec{AB} = \vec{DC}$ e $\vec{AD} = \vec{BC}$.

É fácil ver que

$$\begin{cases} \vec{AB} = (1, 1, 2) \\ \vec{AD} = (-2, 1, 2) \\ \vec{BC} = (-2, 1, 2) \\ \vec{DC} = (1, 1, 2) \end{cases}$$

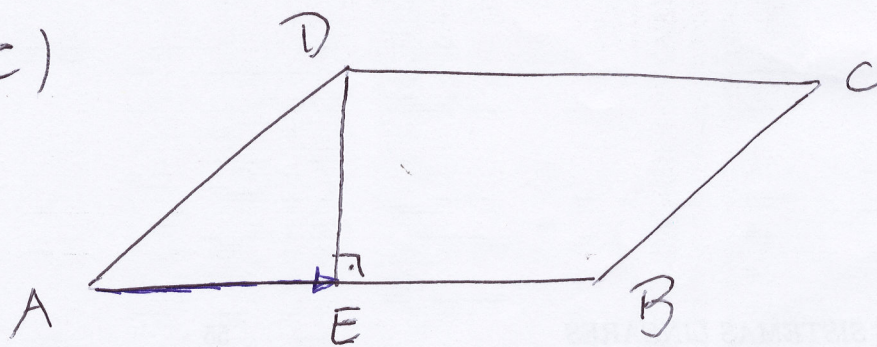
Logo, como $\vec{AB} = \vec{DC}$ e $\vec{AD} = \vec{BC}$, $ABCD$ é um paralelogramo.

(b) Área = $\|\vec{AB} \wedge \vec{AD}\|$, onde

$$\vec{AB} \wedge \vec{AD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (0, -6, 3)$$

$$\Rightarrow \text{Área} = \sqrt{0^2 + (-6)^2 + 3^2} \Rightarrow \text{Área} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

(c)



Note que $\vec{AE} = \text{Proj}_{\vec{AB}} \vec{AD}$.

$$\text{Logo, } \vec{AE} = \left(\frac{\vec{AD} \cdot \vec{AB}}{\vec{AB} \cdot \vec{AB}} \right) \vec{AB} = \frac{-2+1+4}{1+1+4} (1, 1, 2) \Rightarrow$$

$$\vec{AE} = \frac{3}{6} (1, 1, 2) \therefore \vec{AE} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1 \right)$$

Por outro lado, $\vec{AE} = E - A$. Assim,

$$E - A = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1 \right)$$

$$\therefore E = A + \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1 \right)$$

$$\therefore E = \left(4 + \frac{1}{2}, 0 + \frac{1}{2}, 1 + 1 \right)$$

$$\therefore E = \left(\frac{9}{2}, \frac{1}{2}, 2 \right) \quad (\text{resposta})$$

3º Note que $\vec{AB} = B - A = (1, -1, m+2)$. Logo,

$$\vec{AB} \cdot \vec{v} = 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot (m+2)$$

$$\therefore \vec{AB} \cdot \vec{v} = -m - 1 \quad (\#)$$

Por outro lado, sabemos que

$$\vec{AB} \cdot \vec{v} = \|\vec{AB}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(60^\circ). \quad (\#)$$

$$\text{Como } \|\vec{AB}\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + (m+2)^2} = \sqrt{m^2 + 4m + 6} \text{ e}$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{4 + 1 + 1} = \sqrt{6}, \text{ temos, por } (\#):$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{v} = \frac{\sqrt{6} \sqrt{m^2 + 4m + 6}}{2} \quad (\#\#)$$

Por $(\#)$ e $(\#\#)$, segue que

$$(-m - 1)^2 = \left(\frac{\sqrt{6} \sqrt{m^2 + 4m + 6}}{2} \right)^2$$

$$\Rightarrow m^2 + 2m + 1 = \frac{6(m^2 + 4m + 6)}{4}$$

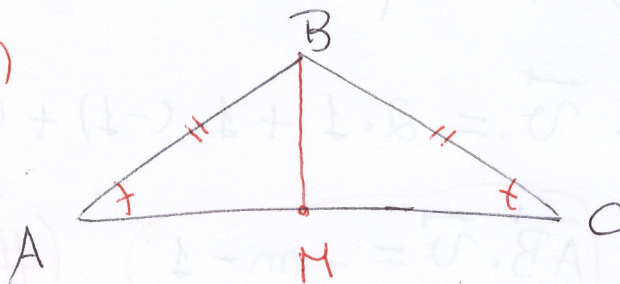
$$\Rightarrow m^2 + 8m + 16 = 0$$

$$\Rightarrow m = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 16}}{2} \Rightarrow m = -4 \quad (\text{resposta})$$

4º) Seja ABC um triângulo isósceles de base AC.

Então $\|\vec{AB}\| = \|\vec{BC}\|$. (*)

Seja M o pto médio de AC.



Vamos mostrar que $\vec{BM} \perp \vec{AC}$, ou seja, $\vec{AC} \cdot \vec{BM} = 0$.

Para isto, vamos escrever $\vec{AC}$ e $\vec{BM}$ em função dos vetores $\vec{AB}$ e $\vec{BC}$. Note que:

$$\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC} \quad (*)$$

$$\vec{BM} = \vec{BC} + \vec{CM} \quad (\#)$$

Como M é pto médio de AC, temos que

$$\vec{CM} = \frac{1}{2} \vec{CA} \quad \leftarrow \text{Por } (\#)$$

$$\text{Logo, } \vec{BM} = \vec{BC} + \frac{1}{2} \vec{CA} = \vec{BC} - \frac{1}{2} \vec{AC}.$$

Por (*), temos:

$$\vec{BM} = \vec{BC} - \frac{1}{2} (\vec{AB} + \vec{BC}) : \vec{BM} = -\frac{1}{2} \vec{AB} + \frac{1}{2} \vec{BC} \quad (**)$$

Usando (*) e (**), vamos fazer o produto escalar dos vetores $\vec{AC}$ e $\vec{BM}$.

$$\begin{aligned} \vec{AC} \cdot \vec{BM} &= (\vec{AB} + \vec{BC}) \cdot \left(-\frac{1}{2} \vec{AB} + \frac{1}{2} \vec{BC} \right) = \\ &= -\frac{1}{2} \|\vec{AB}\|^2 + \frac{1}{2} \vec{AB} \cdot \vec{BC} - \frac{1}{2} \vec{BC} \cdot \vec{AB} + \frac{1}{2} \|\vec{BC}\|^2 \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2} (\|\vec{AB}\|^2 - \|\vec{BC}\|^2) = -\frac{1}{2} \cdot 0 = 0, \quad \text{como queríamos.}$$

Por (*)