Lógica de Predicados: sintaxe e semântica

Engenharia da Computação
Universidade Federal do Vale do São Francisco

Lógica Aplicada à Computação

Eliane Pozzebon
www.univasf.edu.br/~eliane.pozzebon/logica

Programa

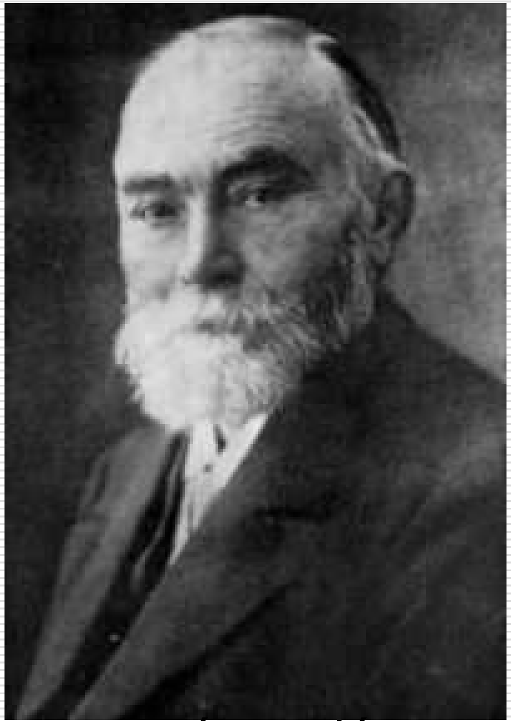
- Introdução
- Sintaxe do Cálculo dos Predicados
- Semântica do Cálculo dos Predicados
- Regras de Inferência

Introdução

- A Lógica das Proposições tem um poder de representação limitado.
- A Lógica Proposicional se utiliza apenas sentenças completas, isto é, as proposições para representar o conhecimento sobre o Mundo.
- A Lógica de Primeira Ordem ou Lógica dos Predicados, ou Cálculo dos Predicados, é uma extensão da Lógica das Proposições em que se consideram variáveis e quantificadores sobre as variáveis.
- A Lógica dos Predicados se preocupa em introduzir noções lógicas para expressar qualquer conjunto de fatos através de Classes de Atributos e de Quantificadores.

Introdução

- **Friedrich Ludwig Gottlob Frege**, descobriu uma maneira de reordenar várias orações para tornar sua forma lógica clara, com a intenção de mostrar como as orações se relacionam em certos aspectos.



Matemático, lógico e filósofo alemão. (1848-1925)

Introdução

- Antes de Frege, a lógica formal não obteve sucesso além do nível da lógica de orações: ela podia representar a estrutura de orações compostas de outras orações, usando palavras como "e", "ou" e "não", mas não podia quebrar orações em partes menores.
- A lógica de orações explica como funcionam palavras como "e", "mas", "ou", "não", "se-então", "se e somente se", e "nem-ou". Frege expandiu a lógica para incluir palavras como "todos", "alguns", e "nenhum". Ele mostrou como podemos introduzir variáveis e quantificadores para reorganizar orações.

Introdução

- "Todos os humanos são mortais" se torna "Para todo x, se x é humano, então x é mortal.", o que pode ser escrito simbolicamente como:

$$\forall x(H(x) \to M(x))$$

Introdução

"Alguns humanos são vegetarianos" se torna "Existe algum (ao menos um) x tal que x é humano e x é vegetariano", o que pode ser escrito simbolicamente como:

$$\exists x(H(x) \land V(x))$$

Introdução

Frege adiciona à lógica de orações:

- o vocabulário de quantificadores (o A de ponta-cabeça, e o E invertido) e variáveis;
- e uma semântica que explica que as variáveis denotam objetos individuais e que os quantificadores têm algo como a força de "todos" ou "alguns" em relação a esse objetos;
- métodos para usá-los numa linguagem.

Introdução

- As sentenças, na lógica dos predicados, quase sempre, de dois termos:
  - O ser
    - De quem ou de que se diz algo – o sujeito
  - Aquilo que se diz
    - Do ser - predicado

1. Introdução

Por exemplo, a sentença:

- todos os alunos são inteligentes;
- nenhum aluno é inteligente;
- alguns alunos são inteligentes;
- alguns alunos não são inteligentes;

Para saber se a sentença é falsa ou verdadeira, é necessária saber de quais alunos estamos falando.

- Todo aluno da Computação é inteligente. Luciano é aluno da Computação. Logo, Luciano é inteligente

Sintaxe do Cálculo dos Predicados

- Lógica de Primeira Ordem considera o mundo com:
  - Objetos (casas, cores, etc.)
  - Relações (maior que, dentro, tem cor, etc.)
  - Propriedades (vermelho, redondo, etc.)
  - Funções (pai de, melhor amigo, etc.)

Sintaxe do Cálculo dos Predicados

- Os elementos sintáticos básicos da lógica de predicados:
  - Símbolos de constantes
    - Representam objetos (*p, q, r,* ...)
  - Símbolos de predicados
    - Representam relações (*conectivos*)
  - Símbolos funções
    - Representam funções (*f, g, h,* ...)
  - Símbolos de variáveis
    - Representam informações específicas *p(x)*
  - Símbolos de pontuação
    - (,)

Sintaxe do Cálculo dos Predicados

- Termo
  - É uma expressão lógica que se refere ao um objeto.
  - Exemplo 1:
    - símbolos de constantes são termos.
    - símbolos de variáveis são termos.
  - Exemplo 2: funções.
    - PernaEsquerda(x)
      - A função PernaEsquerda é um termo
      - O parâmetro ou variável x também é um termo.

Sintaxe do Cálculo dos Predicados

- Variáveis
  - Designam objetos "desconhecidos" do Universo. "Alguém". São normalmente representados por letras minúsculas.
- Letras Nominais
  - Designam objetos "conhecidos" do Universo. "João", "Pedro", etc. São normalmente representados por letras minúsculas.
- Predicados
  - Descrevem alguma coisa ou característica de um ou mais objetos. São normalmente denotados por letras maiúsculas.
  - João ama Maria: $A(a,b)$
  - João ama alguém: $\exists x A(a,x)$
  - João ama todo mundo: $\forall x\ A(a,x)$

Sintaxe do Cálculo dos Predicados

- Sentenças Atômicas
  - Uma sentença atômica é formada a partir de um símbolo de predicado, seguido por uma lista de termos entre parênteses.
  - Exemplo 1:
    - Irmão(Ricardo,João)
  - Exemplo 2:
    - Casado(Pai(Ricardo),Mãe(João))

Sintaxe do Cálculo dos Predicados

- Sentenças Complexas
  - Os conectivos lógicos são usados para construir sentenças complexas.
  - Exemplo:
    ¬Irmão(PernaEsquerda(Ricardo),João)
    Irmão(Ricardo,João) ^ Irmão(João,Ricardo)
    Rei(Ricardo) v Rei(João)
    ¬Rei(Ricardo) → Rei(João)

Sintaxe do Cálculo dos Predicados

- Quantificadores
  - São operadores lógicos que em vez de indicarem relações entre sentenças, expressam relações entre conjuntos designados pelas classes de atributos lógicos.
  - Quantificador Universal (∀):
    - Este tipo de quantificador é formado pelas expressões "todo" e "nenhum".
  - Quantificador Existencial (∃):
    - Este tipo de quantificador é formado pelas expressões "existe um", "existe algum", "pelo menos um" ou "para algum".

Sintaxe do Cálculo dos Predicados

- Quantificadores
  - Exemplos:
    - Todo homem é mortal, ou seja, qualquer que seja x (do Universo), se x é Homem, então x é Mortal.
      - $\forall x\ (H(x) \rightarrow M(x))$.
    - Nenhum homem é vegetal, ou sejam qualquer que seja x, se x é Homem, em x NÃO É Vegetal.
      - $\forall x\ (H(x) \rightarrow \neg V(x))$.
    - Pelo menos um homem é inteligente, ou seja, existe pelo menos um x em que x seja Homem e x seja Inteligente.
      - $\exists x(H(x) \wedge I(x))$

Sintaxe do Cálculo dos Predicados

- Quantificadores
  - Correspondência entre quantificadores
    - $\forall x(H) = \neg((\exists x)(\neg H))$
    - $((\exists x)(H)) = \neg((\forall x)(\neg H))$

Sintaxe do Cálculo dos Predicados

- Ordem de precedência dos conectivos:
  - Maior precedência
    - $\neg$
  - Precedência intermediária superior
    - $\forall$, $\exists$
  - Precedência intermediária inferior
    - $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$
  - Precedência inferior
    - ^ e V

Semântica do Cálculo de Predicados

- A semântica trata das interconexões entre a linguagem e aquilo a que ela se refere.
- Interpretações na lógica de predicados:
  - Símbolo de constante
    - Para constante A, i_A é um elemento do universo do discurso.
  - Símbolo de função
    - Para cada função f, i_f de n argumentos é uma função, para $n \geq 0$.
  - Símbolo de predicado
    - Para cada predicado p, i_p de n argumentos é uma relação, para $n \geq 0$, em particular, se n = 0, p é uma variável proposicional.

Semântica do Cálculo de Predicados

- A interpretação de uma fórmula (seu valor lógico) é determinada a partir das interpretações dos símbolos não lógicos (constantes, símbolos funcionais e símbolos predicativos) e da função *f* que atribui um valor para cada variável.

Regras de Inferência

- Todas as regras definidas no Cálculo Proposicional continuam válidas no Cálculo de Predicados, apenas referenciando-as para os quantificadores.
- Intercâmbio de Quantificadores
  - $\neg(\forall x \neg F(x)) \;=\; \exists x F(x)$ $\quad\sim(\sim q) = q$
  - $\neg(\forall x F(x)) \;=\; \exists x \neg F(x)$ $\quad$ De Morgan
  - $\forall x \neg F(x) \;=\; \neg(\exists x F(x))$
  - $\forall x F(x) \;=\; \neg(\exists x \neg F(x))$

- $\forall x\, \neg GostarPagar(x,Impostos) \equiv \neg\exists\, x\, GostarPagar(x,Impostos)$
  - Como $\forall$ é na verdade uma conjunção sobre o universo de objetos e o $\exists$ é uma disjunção, não é surpreendente que eles obedeçam as Lei de De Morgan.

Regras de Inferência

- Igualdade ou Identidade
  - É um símbolo que se adiciona ao Cálculo de Predicados com o propósito de expressar o fato de dois termos se referirem ao mesmo objeto, ou seja, “é idêntico a” ou “é a mesma coisa que”.
  - Exemplos:
    - O Pai de João é Henrique.
    - Pai_de(João)= Henrique
    - Pai de João e Henrique se referem ao mesmo objeto.
    - O Pai de João é também Avô de Pedro.
    - Pai_de(João) = Avô_de(Pedro)

Regras de Inferência

- Eliminação Universal (EU)
  - De uma fbf quantificada universalmente $\forall x\ F(x)$, infere-se uma fbf da forma $F(a)$, a qual resulta de se substituir cada ocorrência da variável x em F por uma letra nominal a.
- Introdução do Existencial (IE)
  - De uma fbf F contendo uma letra nominal a, infere-se uma fbf da forma $\exists x F(x)$, onde $F(x)$ é o resultado de se substituir uma ou mais ocorrências de a em F por uma variável x QUE NÃO OCORRA em F.
  - a pode ocorrer em uma hipótese não utilizada ainda, ou em uma premissa, normalmente a é um termo independente (ground term);
  - IE permite introduzir somente um quantificador existencial por vez e somente do lado esquerdo da fórmula.

Regras de Inferência

- Eliminação do Existencial (EE)
  - De uma fbf quantificada existencialmente $\exists x F(x)$ podemos inferir F(a), contanto que a letra nominal não ocorra em F(x), nem em qualquer hipótese, nem em qualquer passo anterior da derivação.

Exercício

Toda atriz é bonita.

As avós não são bonitas.

Algumas avós são inteligentes.

Provar que:

Vão existir mulheres que são inteligentes e não são atrizes.

Resposta

A = Atriz

B = Bonita

C = Avós

D = inteligentes

1. $\forall x\ A(x) \rightarrow B(x)$	Toda atriz é bonita.
2. $\forall x\ C(x) \rightarrow \neg B(x)$	As avós não são bonitas.
3. $\exists x\ C(x) \wedge D(x)$	Algumas avós são inteligentes.
4. $\exists x\ D(x) \wedge \neg A(x)$	Vão existir mulheres que são inteligentes e não são atrizes

Exercícios

a) Todo político é esperto. Zé é político. Portanto, Zé é experto.

b) Todo político é esperto. Zé é experto. Portanto, Zé é político.

c) Todo político é esperto. Nenhum cientista é esperto. Portanto, nenhum cientista é político.

d) Todo político é esperto. Existe indivíduo esperto que é inteligente. Portanto, algum político é inteligente.

e) Há político honesto. Há operários honestos. Portanto, há operários que são políticos.

f) Todo barbeiro em Petrolina barbeia somente quem não se barbeia. Logo, o Sr. Orlando, barbeiro de Petrolina, não se barbeia.