



UNIVERSIDADE FEDERAL DO VALE DO SÃO FRANCISCO  
COLEGIADO DE ENGENHARIA ELÉTRICA

## LABORATÓRIO DE CONTROLE I

### Experimento 4: ESTUDO DE COMPENSADORES DE FASE

COLEGIADO DE ENGENHARIA ELÉTRICA  
DISCENTES: Lucas Pires Barbosa  
Quelle Gomes dos Santos  
Rafael Pereira Lima  
Vital Pereira Batista Júnior

PROFESSOR: Eduard Montgomery

JUAZEIRO-BA  
2010

## OBJETIVO

Entender como se utilizam os amplificadores operacionais como compensadores de fase nas formas: atraso, avanço e avanço-atraso.

## INTRODUÇÃO

Os compensadores não são utilizados somente para melhorar a resposta transiente de um sistema; são utilizados também *de forma independente* para melhorar as características de erro de regime estacionário. Anteriormente, quando o ganho do sistema foi ajustado para atender às especificações de resposta transiente, ocorreu uma deterioração do desempenho do erro de regime estacionário, uma vez que a resposta transiente e a constante de erro estacionário estavam relacionadas com o ganho. Quanto maior o valor do ganho, menor o erro de regime estacionário, porém maior sobre valor percentual. Por outro lado, a redução do ganho para diminuir o sobrevalor percentual aumentava o erro de regime estacionário. Ao serem utilizados compensadores dinâmicos, é possível projetar circuitos de compensação que permitiram atender simultaneamente às especificações de erro transiente e de erro de regime estacionário. Não é mais necessário estabelecer compromisso entre resposta transiente e erro de regime estacionário, desde que o sistema opere na faixa linear.

O erro de regime estacionário podia ser melhorado adicionando-se um pólo em malha aberta na origem da função de transferência do percurso direto, aumentando assim o tipo do sistema e forçando a zero o erro de regime estacionário associado. Este pólo adicional na origem requer um integrador para sua realização.

Portanto, em resumo, a resposta transiente é melhorada com a introdução de uma derivação, e o erro de regime estacionário é melhorado pela introdução de uma integração no percurso direto.

A compensação integral ideal, com seu pólo na origem, requer um integrador ativo. Se forem utilizadas estruturas passivas, o pólo e o zero serão deslocados para a esquerda, nas proximidades da origem, conforme mostrado na Figura 1(c). Pode-se tentar imaginar que esse posicionamento do pólo, embora não aumente o tipo de sistema, produz uma melhoria na constante de erro estático em relação a um sistema não compensado. Sem perda de generalidade, demonstra-se que essa melhoria é realizada de fato em um sistema do tipo 1.

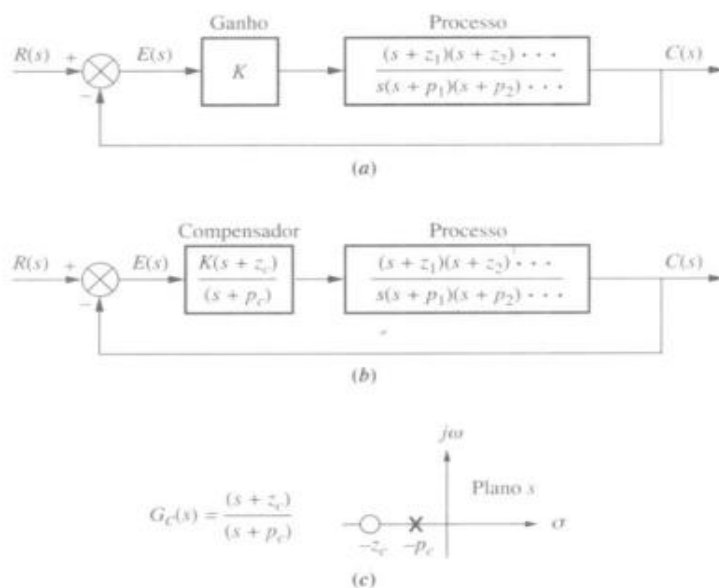
Admita o sistema não compensado mostrado na Figura 1(a). A constante de erro estático,  $K_{v0}$ , para o sistema é:

$$K_{vo} = \frac{K z_1 z_2 \dots}{p_1 p_2 \dots} \quad (1)$$

Admitindo o compensador por atraso de fase mostrado nas figuras 1**(b)** e **(c)**, a nova constante de erro estático será:

$$K_{vn} = \frac{(K z_1 z_2 \dots)(z_c)}{(p_1 p_2 \dots)(p_c)} \quad (2)$$

A figura 2 mostra o efeito da adição de um compensador por atraso de fase sobre o lugar geométrico das raízes. O lugar geométrico das raízes do sistema não compensado está mostrado na figura 2**(a)**, onde se admite que o ponto P seja o pólo dominante. Se pólo e o zero do compensador por atraso de fase estiverem próximos um do outro, a contribuição angular do compensador no ponto P será aproximadamente zero grau. Portanto, na figura 2**(b)**, onde o compensador foi adicionada, o ponto P permanece aproximadamente na mesma posição sobre o lugar geométrico das raízes do sistema compensado.



**Figura 1:** a) sistema do Tipo 1 não compensado; b) sistema do Tipo 1 compensado; c) diagrama de pólos e zeros do compensador

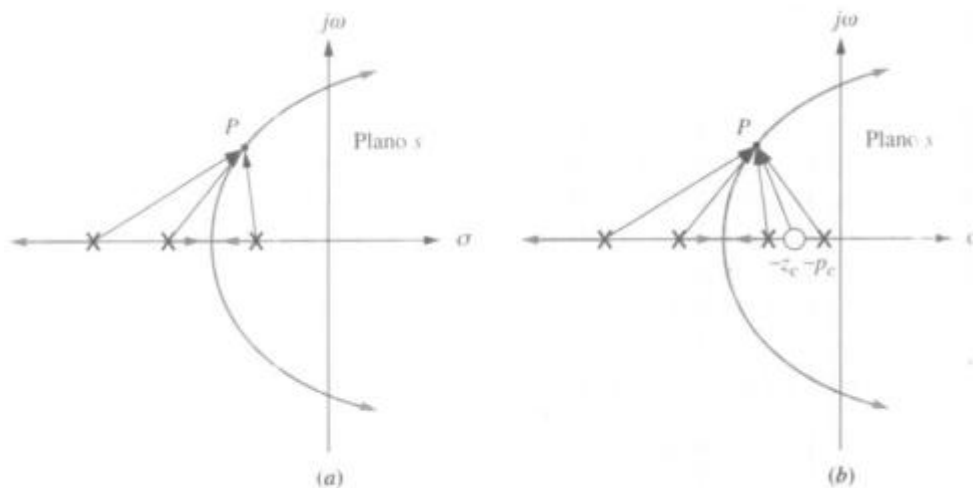
Depois da inserção do compensador verificou-se que o valor de  $K$  é virtualmente o mesmo do sistema não compensado e compensado, uma vez que os comprimentos dos vetores traçados a partir do compensador por atraso de fase são aproximadamente iguais e os demais vetores não se alteram significativamente.

Como foi estabelecido que o ganho  $K$  é aproximadamente o mesmo para os sistemas não compensado e compensado, pode-se substituir a equação 1 na equação 2 e obter:

$$K_{vm} = K_{vo} \frac{z_c}{p_c} > K_{vo} \quad (3)$$

A equação 3 mostra que a melhoria de  $K_v$  do sistema compensado em relação ao  $K_v$  do sistema não compensado é igual à relação entre as magnitudes do zero e do pólo do compensador. De modo a manter a resposta transiente inalterada, sabe-se que o pólo e o zero do compensador precisam estar próximos um do outro. A única forma de relação entre  $z_c$  e  $p_c$  ser grande a fim de produzir uma melhoria apreciável no erro de regime estacionário e simultaneamente, ter o pólo e o zero próximos um do outro para minimizar a contribuição angular consiste em posicionar o par pólo zero do compensador próximo da origem. Por exemplo, a relação de  $z_c$  para  $p_c$  pode ser igual a 10 se o pólo estiver em  $-0,001$  e o zero em  $-0,01$ . Assim, a relação é 10, embora o pólo e o zero estejam bastante próximos e a contribuição angular do compensador seja pequena.

Concluindo, embora o compensador ideal force o erro de regime estacionário a zero, o compensador por atraso de fase com um pólo que não esta na origem irá melhorar a constante de erro estático de um fator igual a  $z_c/p_c$ .



**Figura 2: Lugar geométrico das raízes: a) antes da compensação por atraso de fase; b) depois da compensação por atraso de fase**

A flexibilidade no projeto de uma resposta transiente pode ser aumentada se for possível projetar respostas transientes que não estejam sobre o lugar geométrico das raízes. A figura 3(a) ilustra esse conceito. Admita que a resposta transiente desejada, definida pelo sobrevalor percentual e pelo tempo de assentamento, esteja representada pelo ponto B. infelizmente, sobre o lugar geométrico das raízes corrente para o sobrevalor

percentual especificado, mediante um simples ajuste do ganho, somente é possível obter o tempo de assentamento representado pelo ponto A. Assim, o objetivo é aumentar a velocidade da resposta de A para a de B, sem afetar o sobrevalor percentual. Este aumento de velocidade não pode ser realizado por um simples ajuste de ganho, uma vez que o ponto B não está situado sobre o lugar geométrico das raízes. A figura 3(b) ilustra a melhoria que se procura para a resposta transiente: a resposta mais rápida possui o mesmo sobrevalor percentual da resposta mais lenta.

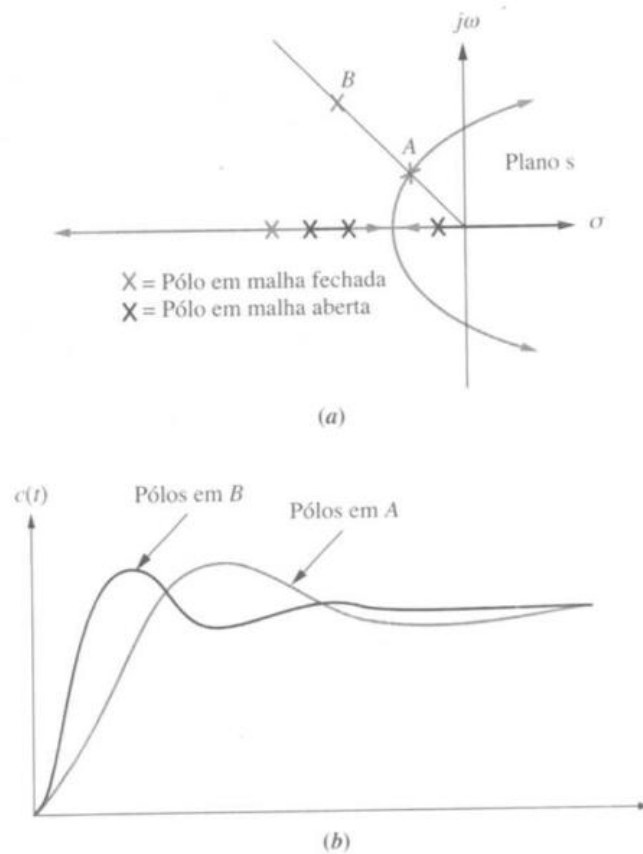
Uma das formas de se resolver este problema é substituir o sistema existente por outro cujo lugar geométrico das raízes intercepte o ponto de projeto desejado, B. infelizmente, esta substituição é onerosa e contraproducente. A maioria dos sistemas é escolhida com base em características distintas daquelas relacionadas à resposta transiente. Por exemplo, a estrutura e o motor de um elevador são escolhidos com base na velocidade e na potência. Os componentes definidos em relação à resposta transiente podem não atender, necessariamente, aos requisitos de potência.

Em vez de se alterar o sistema existente aumenta-se, ou *compensa-se*, o sistema com pólos e zeros *adicionais*, de modo que passe pela localização desejada para o pólo para algum valor de ganho. Uma das vantagens de se compensar o sistema dessa forma é que os pólos e os zeros adicionados podem ser acrescentados a sistemas de baixa potência do sistema antes do processo. O acréscimo de pólos e zeros de compensação não precisa intervir nos requisitos de potência da saída do sistema e também não apresenta problemas de carga adicional ou de projeto.

Uma possível desvantagem em compensar o sistema com pólos e zeros em malha aberta é que a ordem do sistema pode aumentar com o efeito subsequente sobre a resposta desejada. Ao início do procedimento de projeto determina-se a localização adequada dos pólos e zeros adicionais em malha aberta para se obter os pólos desejados em malha fechada de segunda ordem. Todavia, não se conhece a localização dos pólos em malha fechada de ordem superior até que se determine o projeto. Assim, deve-se calcular a resposta transiente por meio de simulação, após a conclusão do projeto, para se certificar de que os requisitos foram atendidos.

Um método de compensação da resposta transiente, o qual será discutido posteriormente, é inserir um derivador no percurso direto em paralelo com o ganho. Pode-se visualizar a operação do derivador com o seguinte exemplo. Admitindo um controle de posição com entrada em degrau, observa-se que o erro fica sujeito a uma grande variação inicial. Derivando-se essa mudança rápida obtém-se um grande sinal que aciona o processo. A saída do derivador é muito maior que a saída do ganho puro. Essa entrada inicial de valor elevado no processo produz uma resposta mais rápida. Na medida em que o

erro tende ao seu valor final, sua derivada tende a zero e a saída do derivador se torna desprezível em comparação com a saída de ganho.



**Figura 3: a) Lugar geométrico das raízes, mostrando um ponto de projeto possível por intermédio do ajuste de ganho (A) e um ponto de projeto desejado que não pode ser atendido através de um simples ajuste de ganho (B); b) Respostas com base nos pólos em A e B**

Do mesmo modo que o compensador integral ideal pode ser aproximado por uma estrutura passiva de atraso de fase, um compensador derivativo ideal pode ser aproximado por um compensador por avanço de fase passivo. Quando se utiliza estruturas passivas não é possível produzir um zero simples; em vez disso, tem-se como resultado um zero e um pólo do compensador. Entretanto, se o pólo estiver situado muito longe do eixo imaginário que o zero a contribuição angular do compensador será positiva e, portanto, aproxima um zero simples equivalente. Em outras palavras, a contribuição angular do pólo do compensador é subtraída da contribuição angular do zero, porém não impede o uso do compensador para melhorar a resposta transiente, uma vez que a contribuição angular líquida é positiva, exatamente como faz o zero de um controlador PD simples.

Analisa-se, inicialmente, o conceito implícito associado à compensação por avanço de fase. Ao se selecionar no plano  $s$  um pólo dominante de segunda ordem desejado, a

soma dos ângulos dos pólos e zeros do sistema do sistema não compensado para o ponto de projeto pode ser determinada.

A diferença entre  $180^\circ$  e a soma dos ângulos deve ser a contribuição angular requerida do compensador.

Por exemplo, observando-se a figura 4, percebe-se que

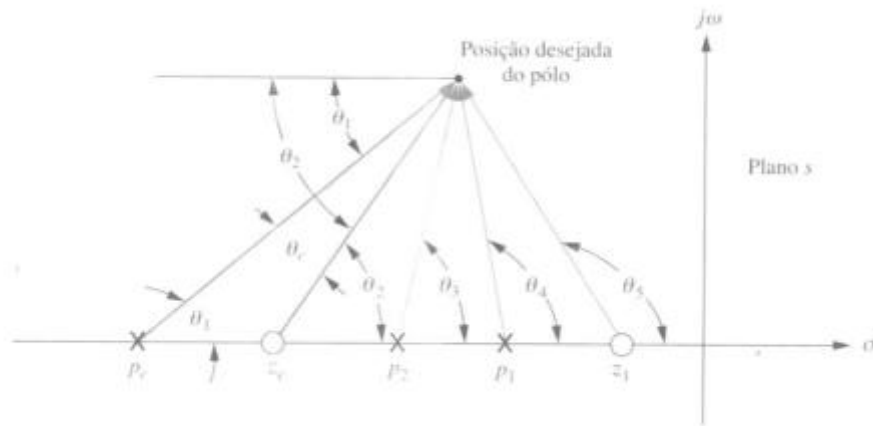


Figura 4: Geometria da compensação por avanço de fase

$$\theta_2 - \theta_1 - \theta_3 - \theta_4 + \theta_5 = (2K + 1)180^\circ \quad (4)$$

Onde  $(\theta_2 - \theta_1) = \theta_c$  é a contribuição angular do compensador por avanço de fase. Com base na Figura 4, nota-se que  $\theta_c$  é o ângulo do seguimento da reta traçado a partir do ponto de projeto e interceptando o eixo real no valor do pólo e no valor do zero do compensador. Agora, visualize este segmento de reta girando ao redor da localização do pólo em malha fechada desejado e interceptando o eixo real no pólo e no zero do compensador, conforme ilustrado na Figura 5. Percebe-se que se poderia utilizar um numero infinito de compensadores por avanço de fase para atender ao requisito da resposta transiente.

As diferenças dos compensadores estão nos valores constantes de erro estático, no ganho necessário para alcançar o ponto de projeto no lugar geométrico das raízes compensado, na dificuldade em justificar uma aproximação de segunda ordem quando o projeto estiver completo e na resposta transiente resultante.

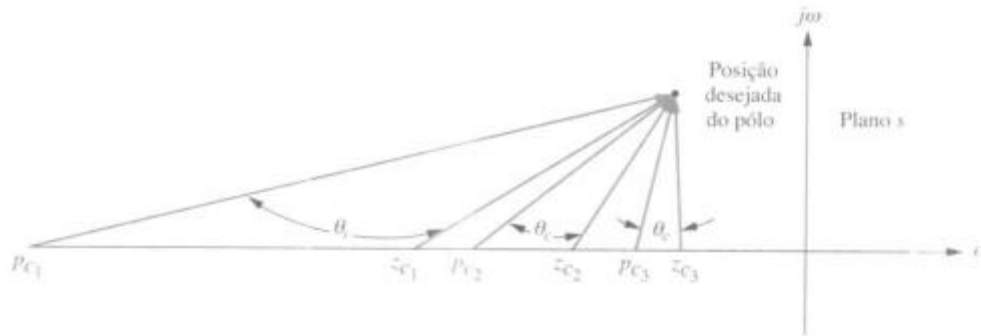


Figura 5: Três das infinitas soluções possíveis para o compensador por avanço de fase

Os controladores PD e PI são agora combinadas de modo a se obter uma melhoria no erro de regime estacionário e na resposta transiente independente. Basicamente melhora-se, de início, a resposta transiente utilizando o controlador PD. Em seguida melhora-se o erro de regime estacionário desse sistema compensado aplicando o controlador PI. Uma desvantagem desse procedimento é uma pequena queda na velocidade da resposta ao se melhorar o erro de regime estacionário.

Como alternativa, pode-se melhorar o erro de regime estacionário primeiro e, então, seguir com o projeto para melhorar a resposta transiente. Uma desvantagem dessa abordagem é que a melhoria da resposta transiente em alguns casos produz deterioração da melhoria do erro de regime estacionário, o qual foi projetado primeiro. Em outros casos, a melhoria da resposta transiente produz melhora adicional nos erros de regime estacionário.

Assim um sistema pode ser projetado em excesso relativamente aos erros de regime estacionário. Usualmente, o projeto em excesso não é um problema, a não ser que cause impacto sobre o custo ou gere outros problemas de projeto. Projeta-se primeiro a resposta transiente e, em seguida, realiza-se o projeto visando ao erro de regime estacionário.

O projeto pode utilizar tanto compensadores ativos quanto compensadores passivos. Ao se projetar um controlador ativo PD seguido de um controlador ativo PI o compensador resultante será chamado de *controlador proporcional integral derivativo* (PIV).

Esse controlador possui uma função de transferência:

$$G_c(s) = K_1 + \frac{K_2}{s} + K_3s = \frac{K_3 \left( s^2 + \frac{K_1}{K_3}s + \frac{K_2}{K_3} \right)}{s} \quad (5)$$

A qual possui dois zeros mais um pólo na origem. Um dos zeros e o pólo na origem podem ser projetados como o compensador integral ideal; o outro zero pode ser projetado como o compensador derivativo ideal.



No exemplo anterior foram combinados em série os conceitos de compensação derivativa ideal e integral ideal para se chegar ao projeto de um controlador PID que melhorou o desempenho tanto da resposta transiente quanto do erro do regime estacionário.

Inicialmente, projeta-se um compensador por avanço de fase para melhorar a resposta transiente. Em seguida, calcula-se a melhoria no erro do regime estacionário que ainda seja necessária. Finalmente, projeta-se o compensador por atraso de fase para atender a exigência do erro de regime estacionário.

1. Calcule o desempenho do sistema não compensado para determinar a melhoria necessária na resposta transiente.
2. Projete o compensador por avanço de fase para obter as especificações da resposta transiente. O projeto inclui a localização do zero, a localização do pólo e o ganho da malha.
3. Simule o sistema para garantir que todas as especificações foram atendidas.
4. Refaça o projeto se a simulação que as exigências não foram atendidas.
5. Calcule o desempenho do erro de regime estacionário relativo ao sistema compensado por avanço de fase, para determinar qual a melhoria adicional necessária no erro de regime estacionário.
6. Projete o compensador por atraso de fase para produzir o erro de regime estacionário requerido.
7. Simule o sistema para se certificar de que todas as exigências foram atendidas.

Refaça o projeto se a simulação que as exigências não foram atendidas.

Com a compensação pode-se melhorar a resposta transiente e o erro de regime estacionário nos sistemas de controle. As funções de transferência dos compensadores que eram tanto controladores PI, PD ou PID ativos quanto compensadores passivos por atraso, por avanço ou por atraso e avanço de fase.

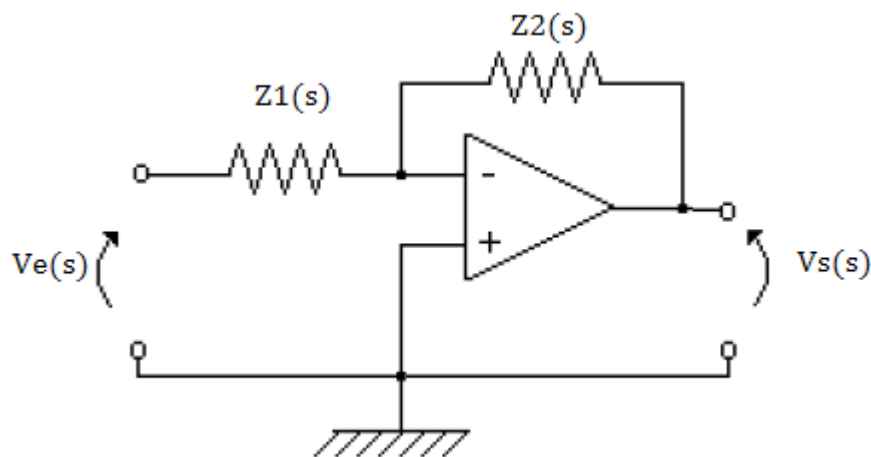


Figura 6: Amplificador operacional configurado para a realização da função de transferência

Com a função de transferência de um amplificador operacional inversor que é

$$\frac{V_s(s)}{V_e(s)} = -\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)} \quad (6)$$

Cuja configuração está na figura 6. Por uma escolha criteriosa de  $Z_2(s)$  e de  $Z_1(s)$ , este circuito pode ser usado como um bloco de construção para implementar compensadores e controladores, como os controladores PID.

Para os controladores citados temos as seguintes configurações para o amplificador operacional.

- Compensador por atraso ou avanço de fase com amplificador operacional:

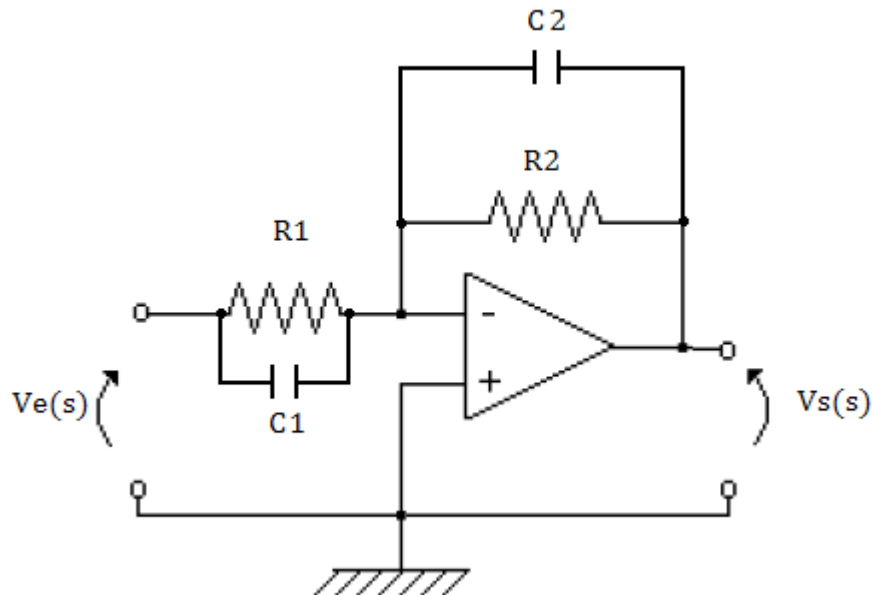


Figura 7: Compensador por atraso ou avanço de fase

A função de transferência é:

$$G_c(s) = -\frac{C_2 \left( s + \frac{1}{R_1 C_1} \right)}{C_2 \left( s + \frac{1}{R_2 C_2} \right)} \quad (7)$$

Se a relação entre as resistências e os capacitores forem

$$R_2 C_2 > R_1 C_1 \quad (8)$$

Esse sistema se comporta como um compensador por atraso de fase.

Se a relação entre as resistências e os capacitores forem

$$R_2 C_2 < R_1 C_1 \quad (8)$$

Esse sistema se comporta como um compensador por avanço de fase.

- Compensador por atraso e avanço de fase com amplificador operacional

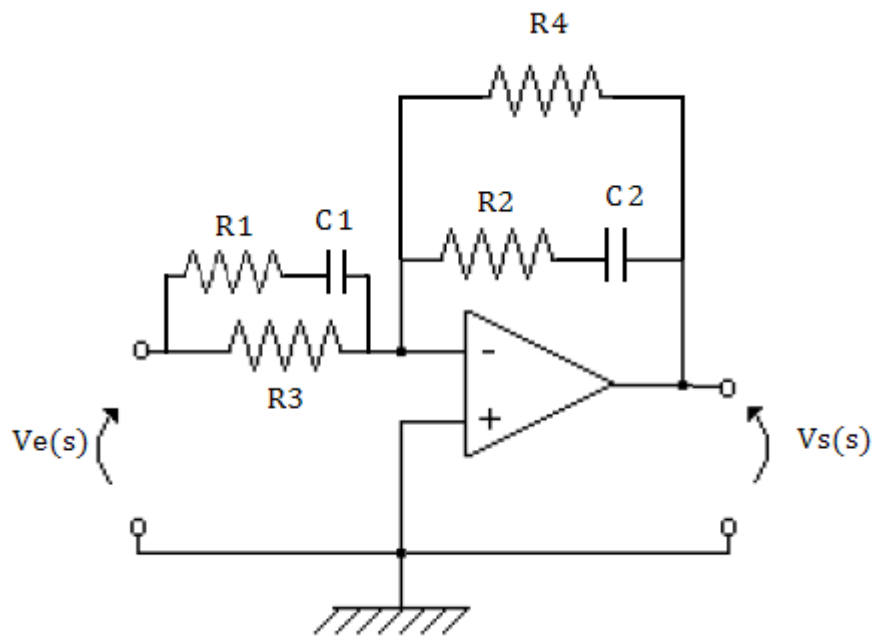


Figura 8: Compensador por atraso ou avanço de fase

A função de transferência é:

$$G_c(s) = -\frac{R_4 [(R_1 + R_3)C_1 s + 1](R_2 C_2 s + 1)}{R_3 (R_1 C_1 s + 1)[(R_2 + R_4)C_2 s + 1]} \quad (9)$$

## PROCEDIMENTOS EXPERIMENTAIS

Com o intuito de entender a utilização de amplificadores operacionais como compensadores de fase foram montados diversos circuitos, conforme mencionado abaixo.

A priori foi montado um circuito amplificador inversor, tendo uma resistência definida por um potenciômetro, como mostrado na figura 9, a fim de verificar o sinal de entrada e de saída desse sistema através dos canais do osciloscópio, sendo a entrada um sinal senoidal.

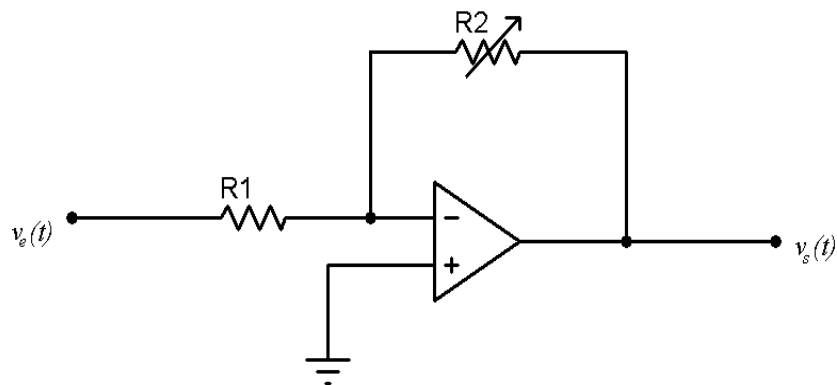


Figura 9: Compensador proporcional

Em seguida, foi montado um circuito amplificador inversor, com realimentação sendo um RC série, sendo R um potenciômetro e injetar um sinal senoidal de entrada. Assim como no circuito anterior, foi verificado os sinais de entrada e saída. A figura abaixo mostra este circuito:

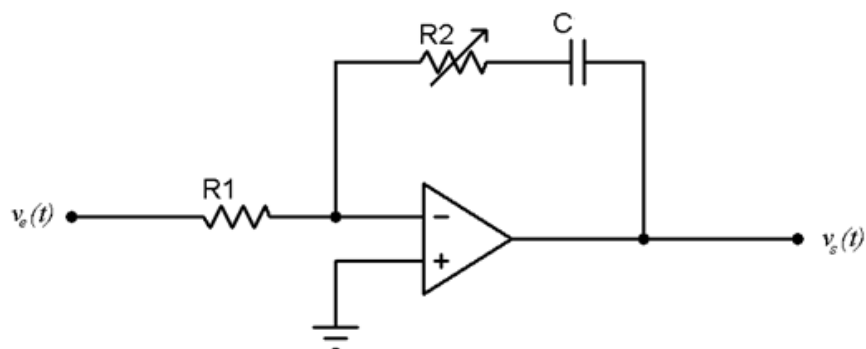
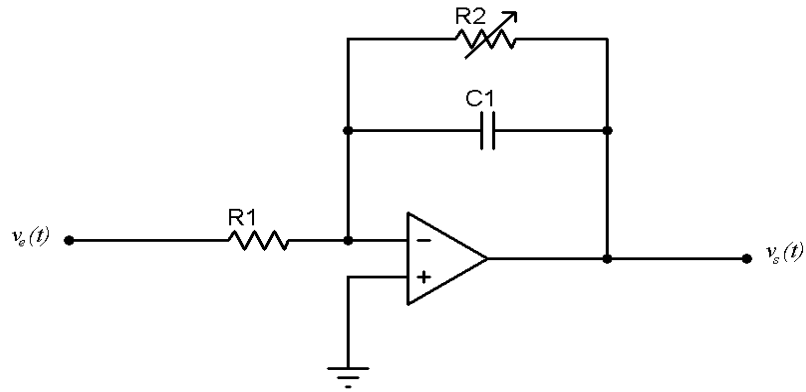


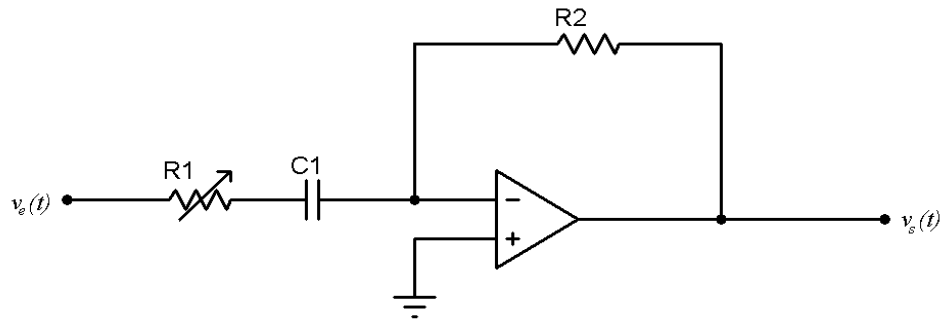
Figura 10: Compensador com realimentação RC em série

Posteriormente, o circuito RC série do circuito anterior foi substituído por um circuito RC paralelo, conforme figura abaixo:



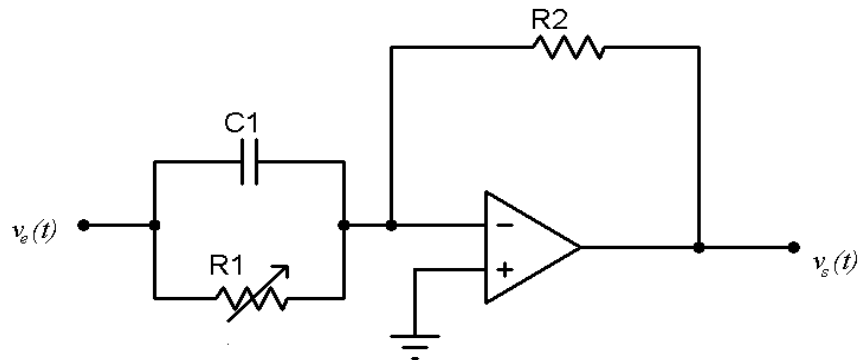
**Figura 11: Compensador com realimentação RC em paralelo**

Outra montagem foi um circuito amplificador inversor, com entrada sendo um circuito RC série, sendo o R um potenciômetro e a realimentação um resistor. Na entrada foi injetado um trem de pulsos e os sinais de entrada e saída foram verificados nos canais do osciloscópio. A figura abaixo mostra este circuito:



**Figura 12: Compensador com resistor em série com capacitor na entrada**

Em seguida, o circuito RC série foi substituído por um circuito RC paralelo, aplicado a entrada, conforme figura abaixo.



**Figura 13: Compensador com resistor em paralelo com capacitor na entrada**

## RESULTADOS E DISCUSSÕES

O primeiro compensador montado no laboratório foi o proporcional que é mostrado na figura 14.

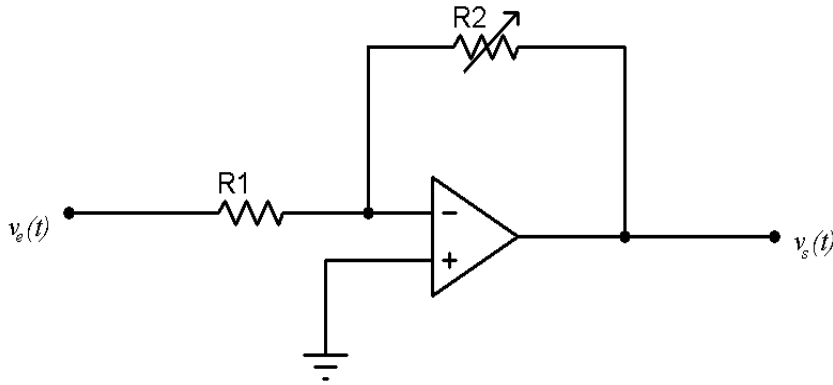


Figura 14: Compensador proporcional

A função de transferência dessa implementação é mostrada a seguir:

$$T(s) = - \left( \frac{R_2}{R_1} \right) \quad (10)$$

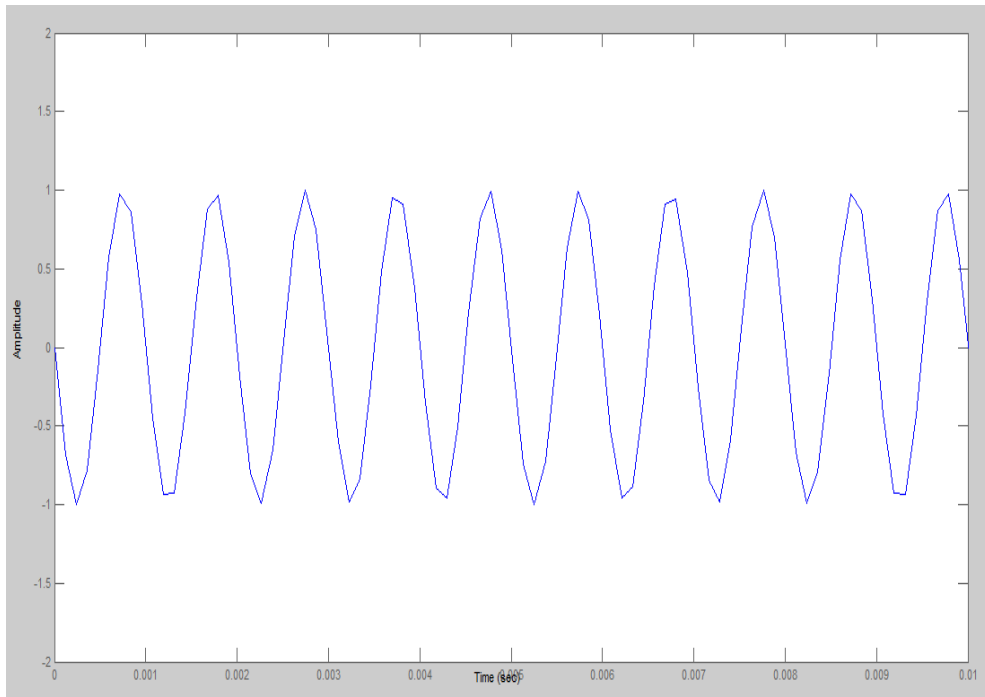
Os sinais aplicados ao compensador serão senoidais, portanto, analisando a função de transferência espera-se obter na saída um sinal também na forma senoidal com uma amplitude maior ou menor que na entrada, dependendo do ganho, e com fase deslocada de  $180^\circ$  em relação à entrada devido ao amplificador ser inversor.

O resistor  $R_1$  é fixo e a implementação foi feita com um resistor de  $1 \text{ k}\Omega$ , já no lugar de resistor  $R_2$  foi colocado um potenciômetro. O primeiro ajuste de valores para esses parâmetros foi o seguinte:

Tabela 1: Valores dos componentes utilizados na prática

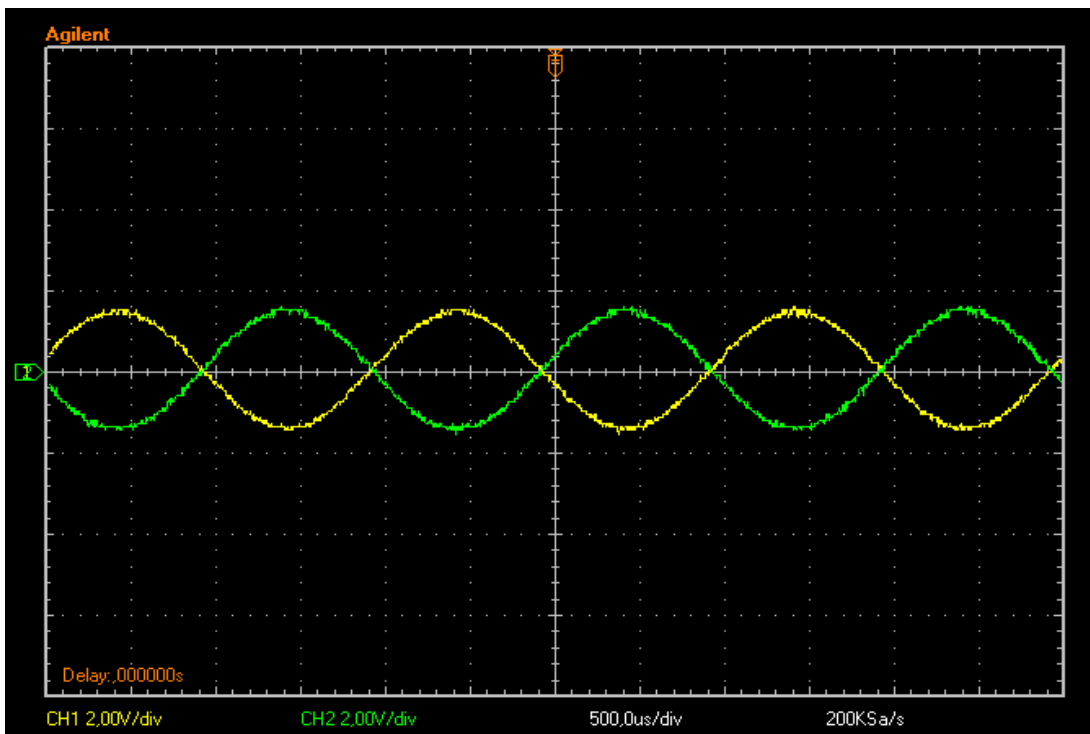
| $R_1$               | $R_2$               |
|---------------------|---------------------|
| $1 \text{ k}\Omega$ | $1 \text{ k}\Omega$ |

O sinal aplicado tinha frequência igual a  $500 \text{ Hz}$ . Fazendo a simulação no software MATLAB obtém-se a seguinte resposta para uma senóide de amplitude unitária e frequência  $500 \text{ Hz}$ .



**Figura 15: Resposta mostrada pelo MATLAB**

A montagem realizada no laboratório permitiu a visualização das seguintes formas de onda.



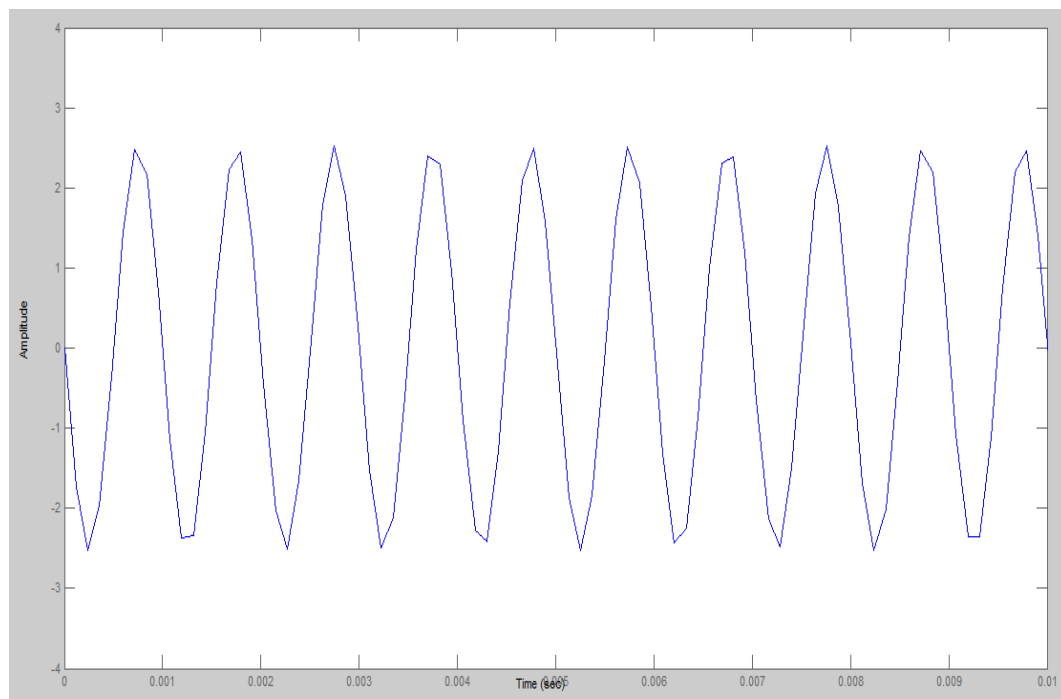
**Figura 16: Formas de onda de entrada (amarelo) e saída (verde) vistas no osciloscópio**

Percebe-se que a entrada e saída possuem a mesma amplitude e tem uma diferença de fase de  $180^\circ$  como era esperado. O segundo ajuste feito para os parâmetros do controlador foram os seguintes:

**Tabela 2: Valores dos componentes utilizados na prática**

| $R_1$        | $R_2$           |
|--------------|-----------------|
| 1 k $\Omega$ | 2,53 k $\Omega$ |

Com esses valores o MATLAB apresenta a seguinte resposta.



**Figura 17: Resposta mostrada pelo MATLAB**



Em laboratório o observado está representado na figura abaixo.

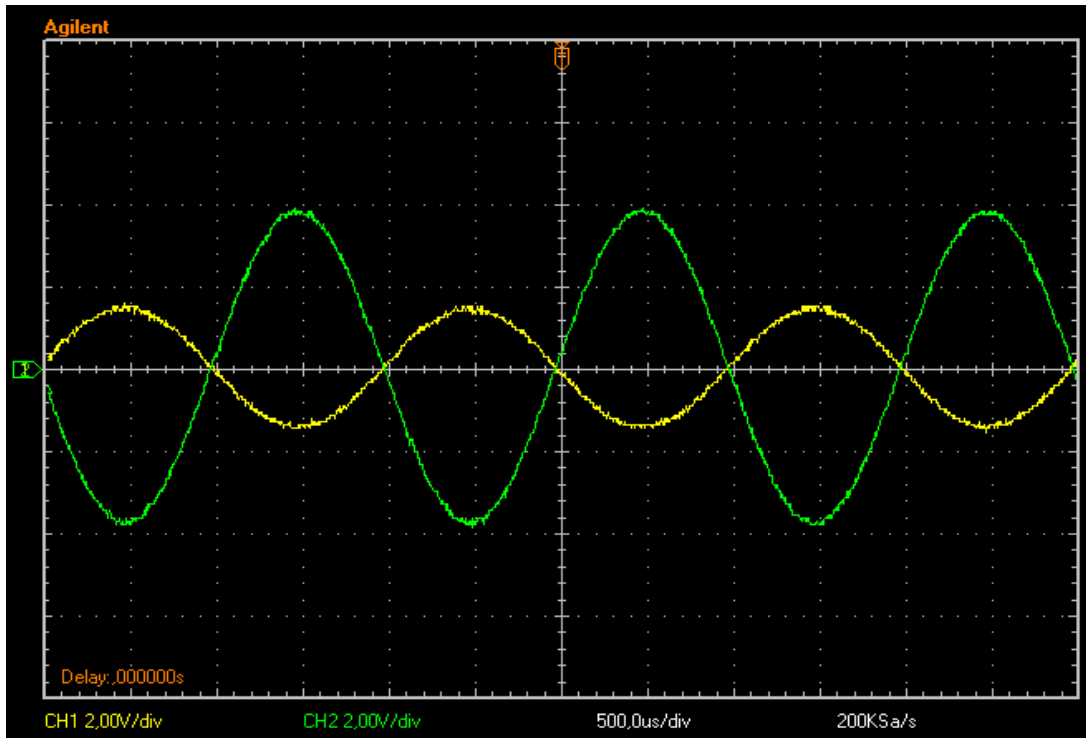


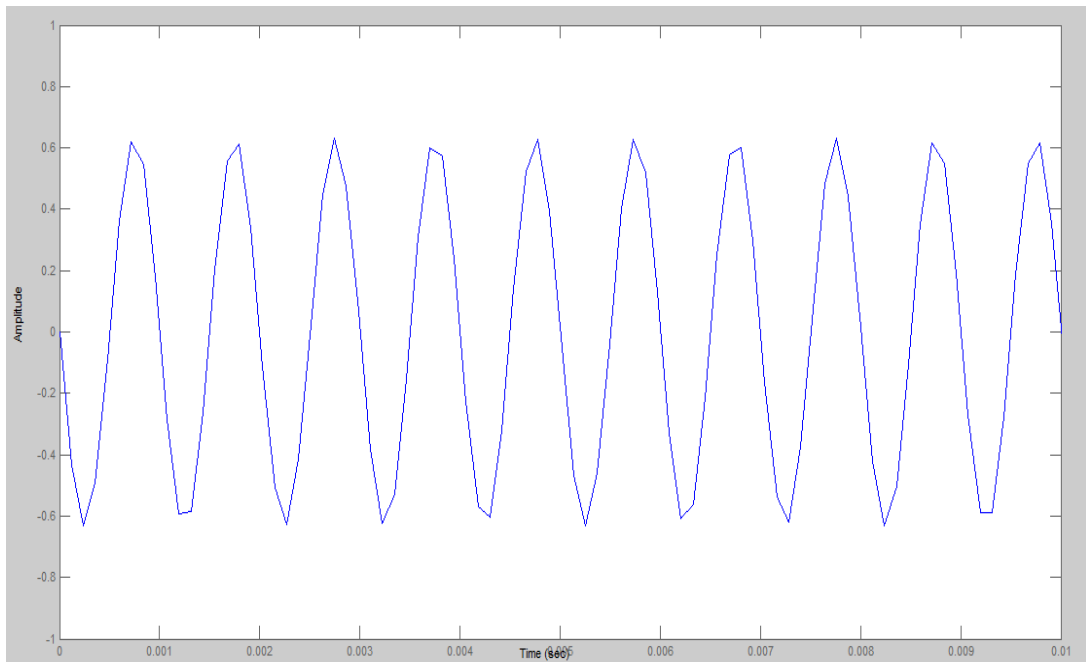
Figura 18: Formas de onda de entrada (amarelo) e saída (verde) vistas no osciloscópio

Como previsto o sinal de saída tem uma amplitude maior que o sinal na entrada devido ao novo ajuste de ganho, no entanto, a defasagem entre os sinais continua igual a  $180^\circ$ . O último ajuste feito para os resistores chegou aos seguintes valores:

Tabela 3: Valores dos componentes utilizados na prática

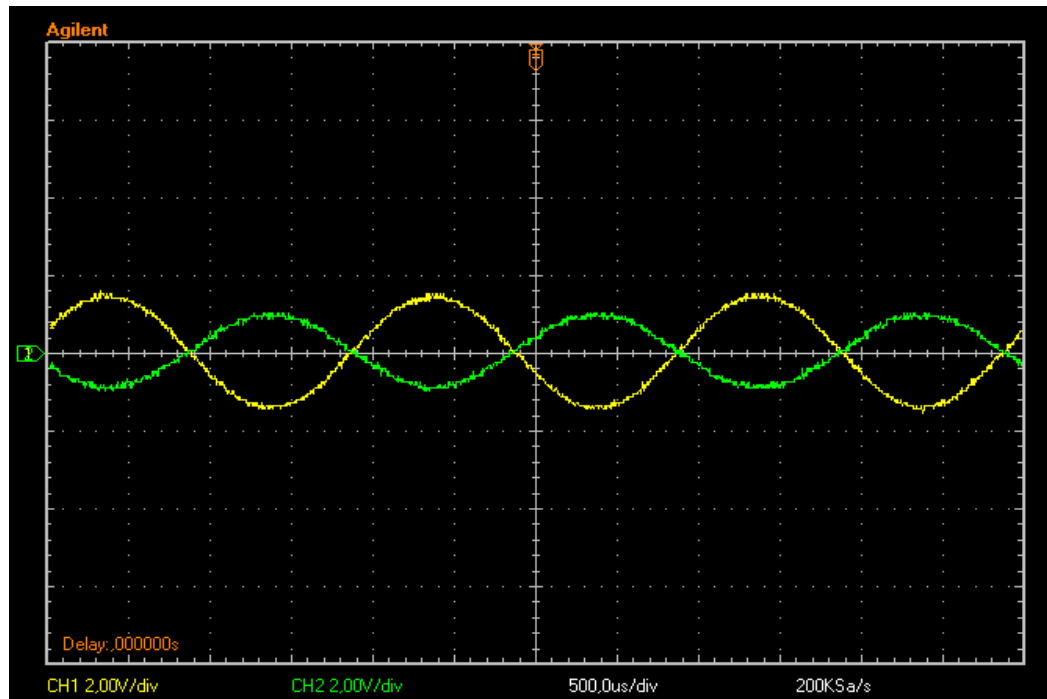
| $R_1$        | $R_2$            |
|--------------|------------------|
| 1 k $\Omega$ | 0,623 k $\Omega$ |

Com esses resistores a resposta computacional apresentada foi a mostrada na figura 19.



**Figura 19: Resposta mostrada pelo MATLAB**

A montagem forneceu os seguintes resultados.



**Figura 20: Formas de onda de entrada (amarelo) e saída (verde) vistas no osciloscópio**

Mais uma vez o resultado do software é condizente com o resultado real conseguido em laboratório. Pôde-se perceber analisando os casos anteriores que essa implementação proporciona um ganho ao sinal e faz com que a fase da saída seja de 180° em relação à entrada. Agora, muda-se a implementação para a que é mostrada na figura 21.

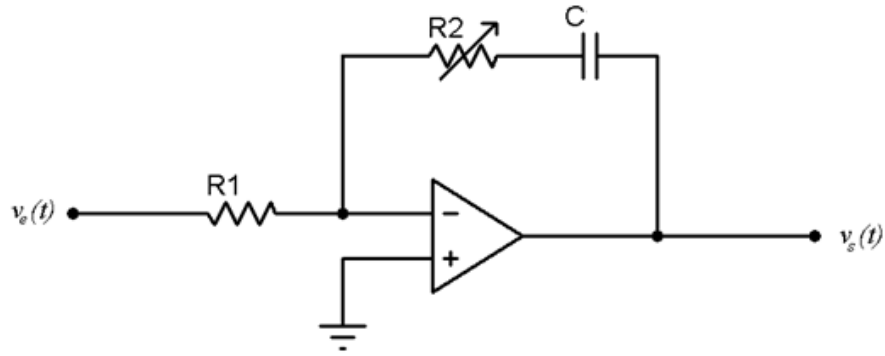


Figura 21: Segundo compensador estudado

A função de transferência desse controlador é a seguinte:

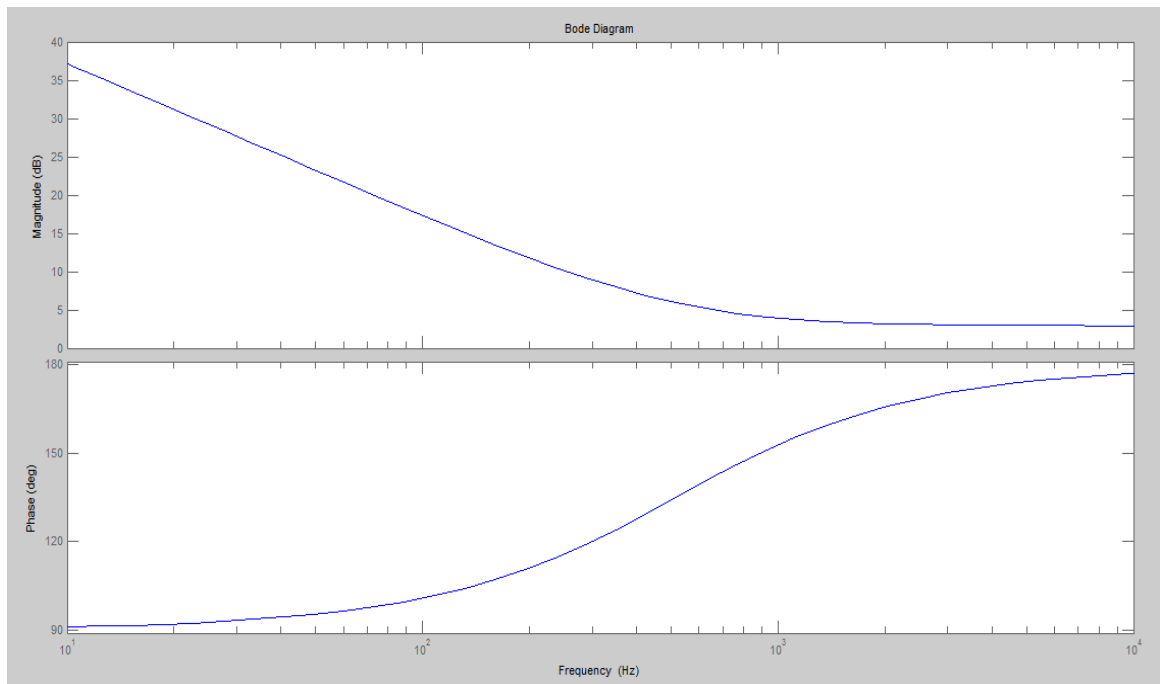
$$T(s) = -\frac{R_2}{R_1} \frac{\left(s + \frac{1}{R_2 C}\right)}{s} \quad (11)$$

Os parâmetros fixos dessa implementação foram a capacitância C e o resistor R<sub>1</sub>, enquanto R<sub>2</sub> era variado para analisar o impacto sobre o comportamento da resposta. Os primeiros valores utilizados foram os seguintes:

Tabela 4: Valores dos componentes utilizados na prática

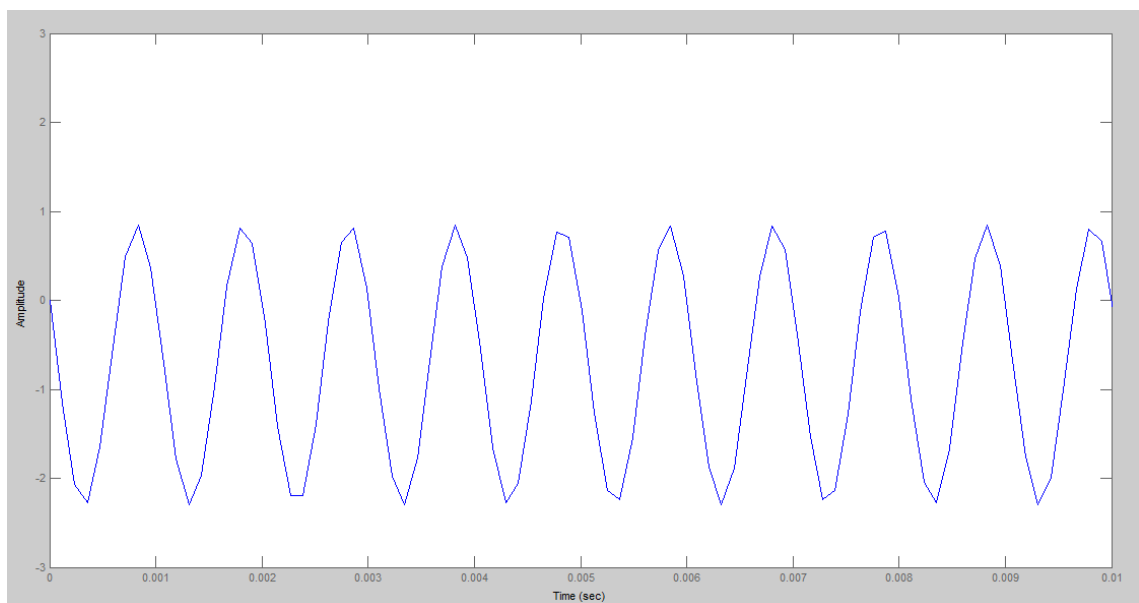
| R <sub>1</sub> | R <sub>2</sub> | Capacitância |
|----------------|----------------|--------------|
| 1 kΩ           | 1,4 kΩ         | 220 pF       |

Novamente, a entrada aplicada foi um sinal senoidal de frequência igual a 500 Hz. O diagrama de Bode desse controlador para os valores referidos acima é o seguinte:



**Figura 22: Diagrama de Bode do compensador**

Com a análise do diagrama percebe-se que para um sinal de frequência 500 Hz espera-se obter um sinal de saída com ângulo de fase igual a  $134^\circ$ . Com o MATLAB a resposta foi a seguinte.



**Figura 23: Resposta mostrada pelo MATLAB**

O resultado observado em laboratório foi o seguinte:

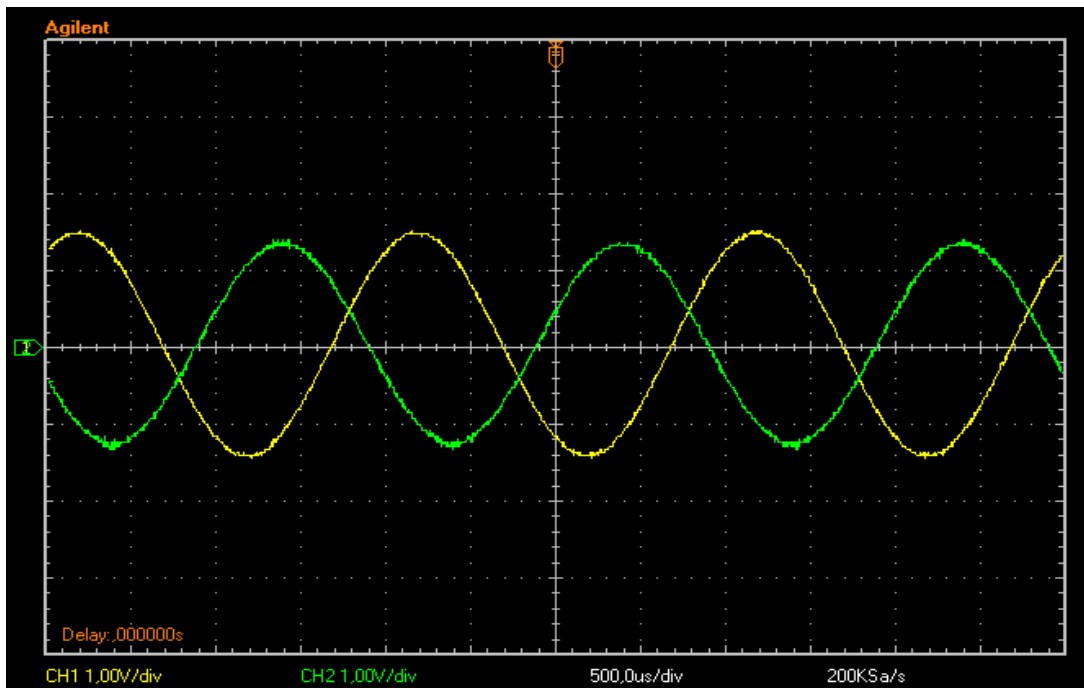


Figura 24: Formas de onda de entrada (amarelo) e saída (verde) vistas no osciloscópio

Pode-se notar agora que os dois sinais possuem uma defasagem que não é exatamente igual a  $180^\circ$ , através da figura estima-se que o atraso (“*delay*”) entre os dois sinais é de  $800 \mu\text{s}$ , com essa informação pode-se estimar a diferença de fase entre os sinais, considerando o sinal de entrada com fase  $0^\circ$  tem-se que a fase do sinal de saída é:

$$\Phi = 2\pi f\Delta t$$

$$\Phi = 2,51 \text{ rad}$$

$$\Phi = 144^\circ$$

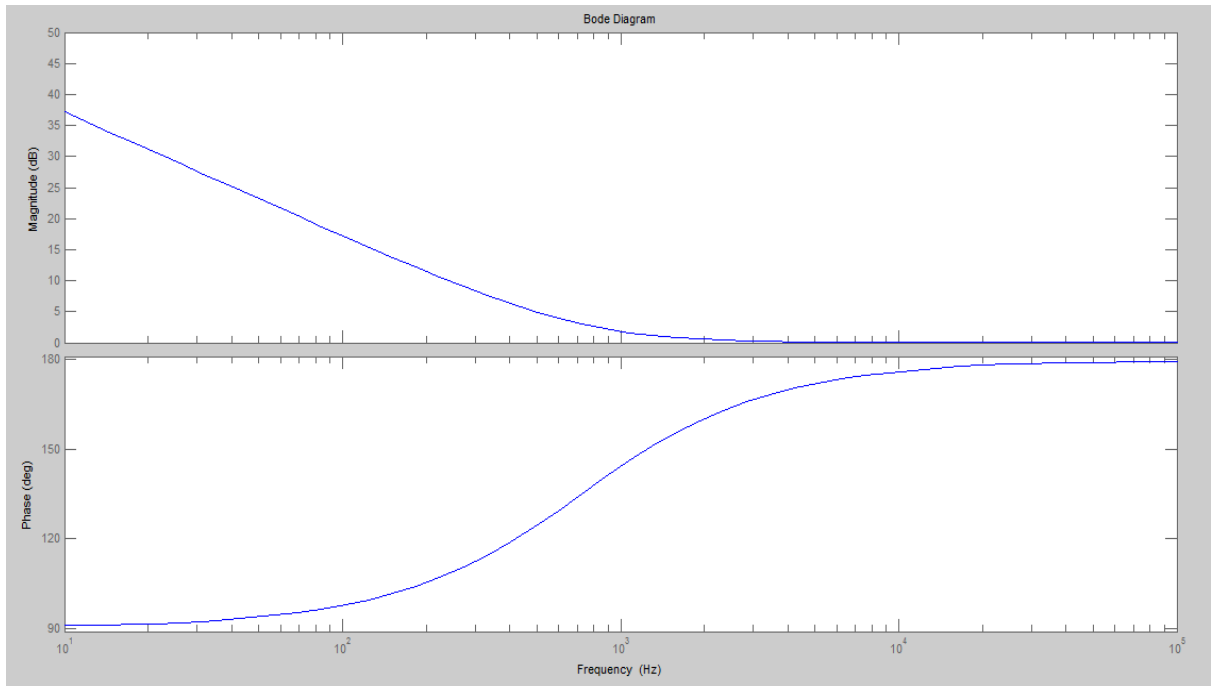
Note que esse resultado é muito próximo do estimado através do diagrama de Bode, provavelmente o erro ocorre na aproximação feita para o  $\Delta t$  entre os dois sinais.

Após essa análise os parâmetros foram trocados para os seguintes valores:

Tabela 5: Valores dos componentes utilizados na prática

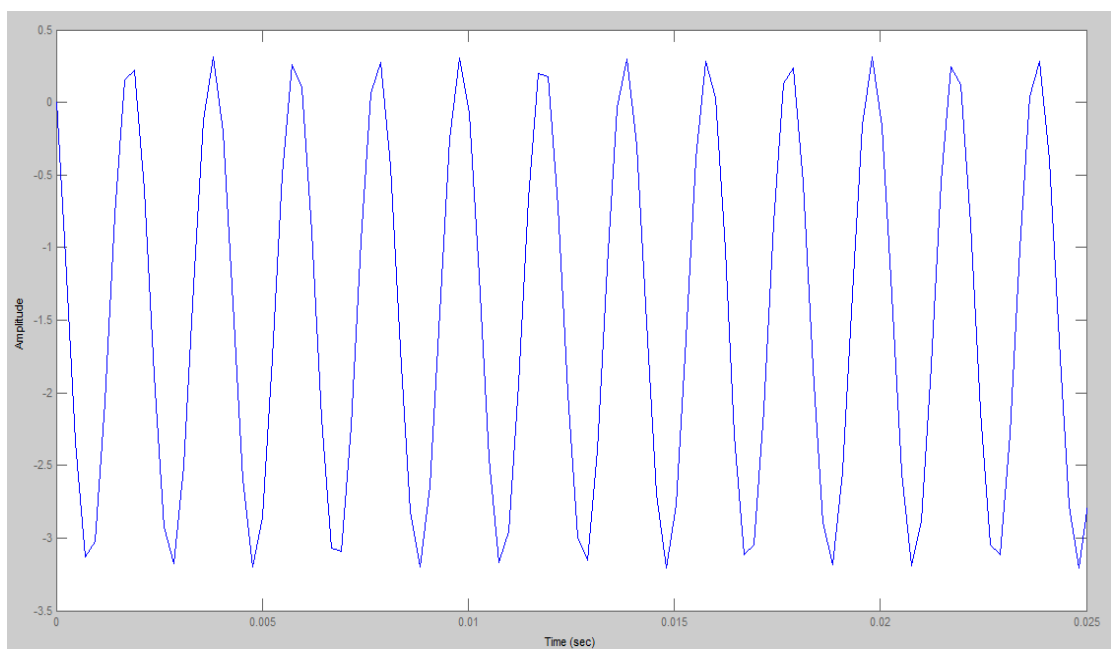
| $R_1$        | $R_2$        | Capacitância |
|--------------|--------------|--------------|
| 1 k $\Omega$ | 1 k $\Omega$ | 220 pF       |

Para tais valores o diagrama de Bode do compensador é o seguinte:



**Figura 25: Diagrama de Bode do compensador**

Agora para uma excitação com frequência 500 Hz espera-se na saída um sinal com ângulo de fase igual a  $125^\circ$ . Logo, percebe-se que o ajuste de ganho tem impacto na resposta em frequência do compensador. A resposta simulada com o MATLAB foi a seguinte:



**Figura 26: Resposta mostrada pelo MATLAB**

No laboratório as formas de onda observadas foram as seguintes:

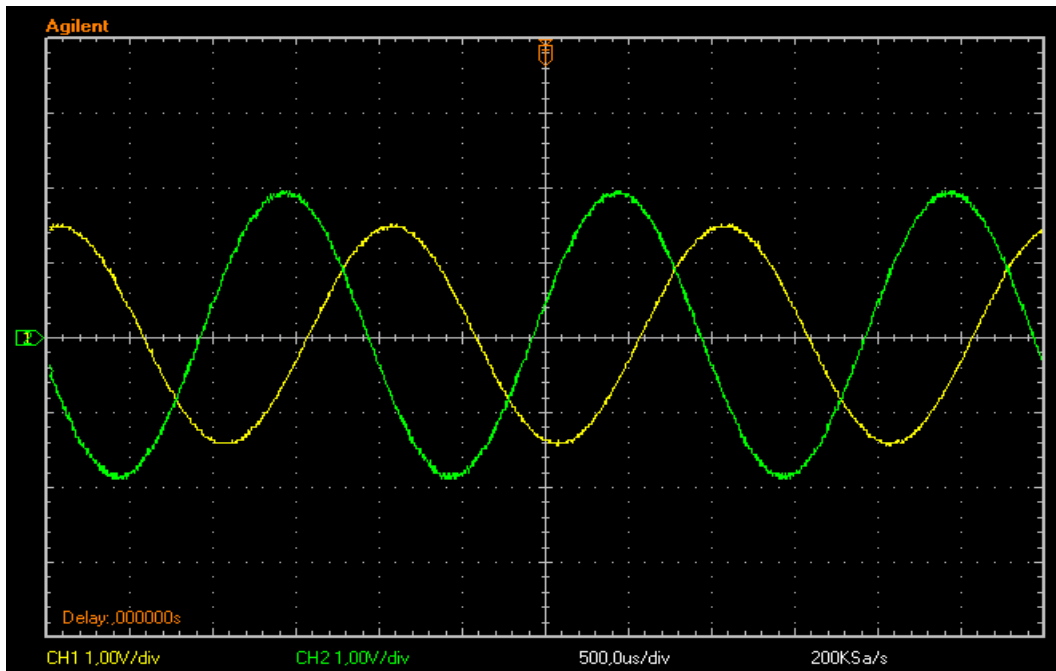


Figura 27: Formas de onda de entrada (amarelo) e saída (verde) vistas no osciloscópio

Com a figura acima se estima que o atraso entre os sinais seja de cerca de 700  $\mu$ s, logo a defasagem é de aproximadamente:

$$\Phi = 2\pi f\Delta t$$

$$\Phi = 1,571 \text{ rad}$$

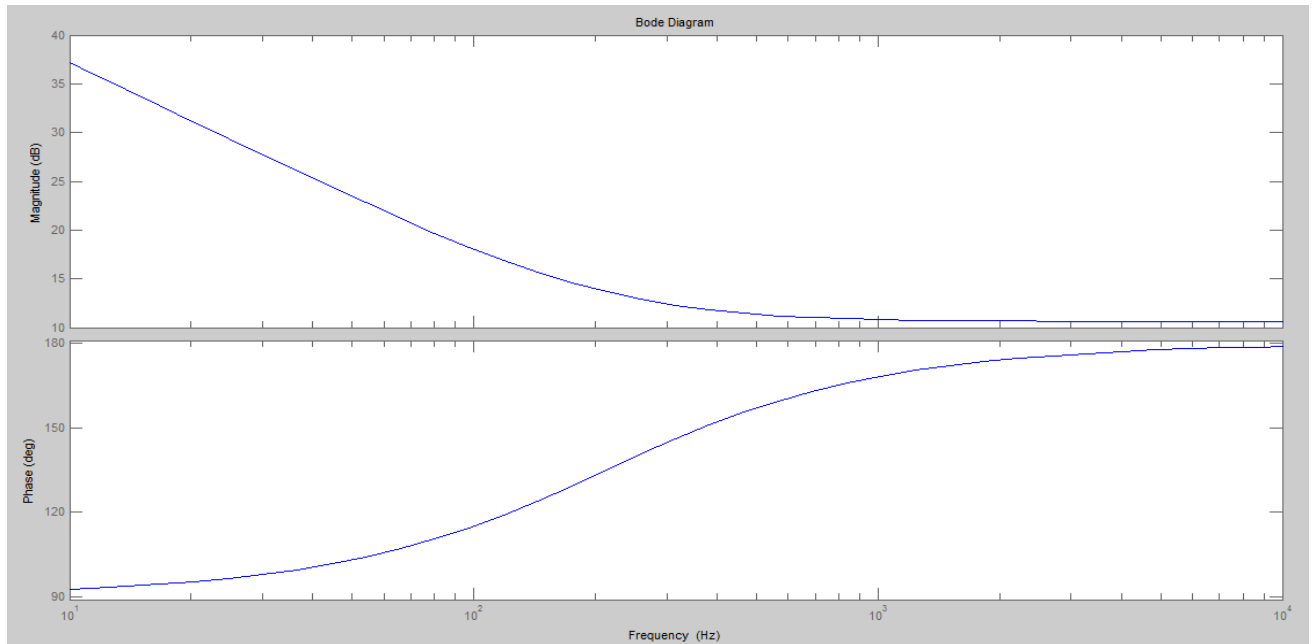
$$\Phi = 90^\circ$$

Novamente a resposta é muito próxima da previsão teórica, e o erro provavelmente está nas aproximações feitas. Os últimos parâmetros utilizados para a montagem foram os seguintes:

Tabela 6: Valores dos componentes utilizados na prática

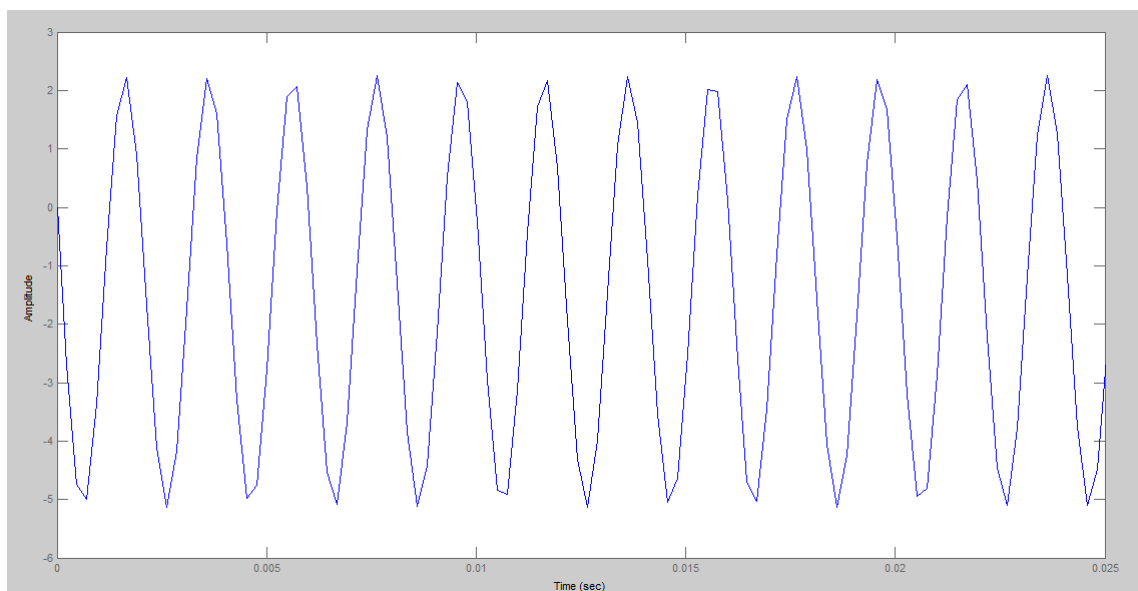
| $R_1$        | $R_2$          | Capacitância |
|--------------|----------------|--------------|
| 1 k $\Omega$ | 3,4 k $\Omega$ | 220 pF       |

Para tais valores o diagrama de Bode do compensador é o seguinte:



**Figura 28: Diagrama de Bode do compensador**

Através da análise do diagrama espera-se que quando um sinal de frequência 500Hz for aplicado, na saída obtêm-se um sinal com ângulo de fase igual a 157°. A resposta obtida com o MATLAB é mostrada abaixo:



**Figura 29: Resposta mostrada pelo MATLAB**



No laboratório, as formas de onda observadas foram as seguintes:

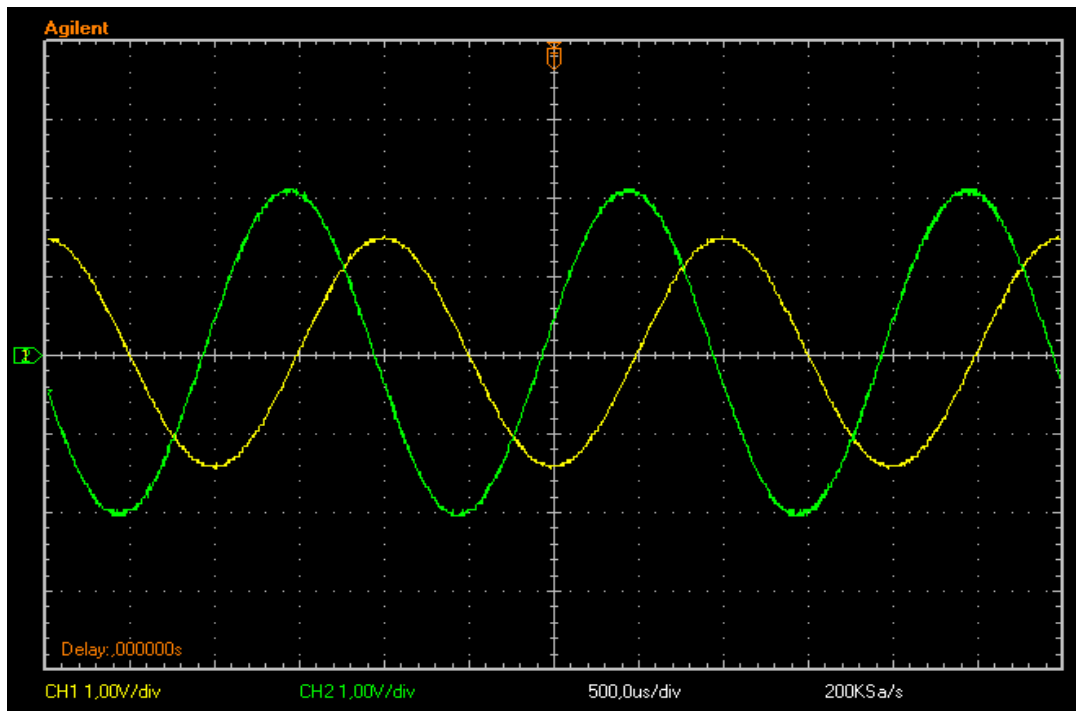


Figura 30: Formas de onda de entrada (amarelo) e saída (verde) vistas no osciloscópio

Para esse caso estima-se que o atraso entre os sinais seja de aproximadamente 860  $\mu$ s, logo a fase do sinal é:

$$\Phi = 2\pi f\Delta t$$

$$\Phi = 2,702 \text{ rad}$$

$$\Phi = 154,8^\circ$$

Note que o ângulo obtido experimentalmente é muito próximo do esperado teoricamente. Por fim, pode-se perceber que o compensador estudado apresenta uma resposta em frequência que varia de acordo com os parâmetros escolhidos na implementação, isso permite que se ajuste os parâmetros para se obter uma determinada resposta em relação ao ganho e à fase do sinal de saída.

A figura 31 mostra a próxima implementação que será analisada.

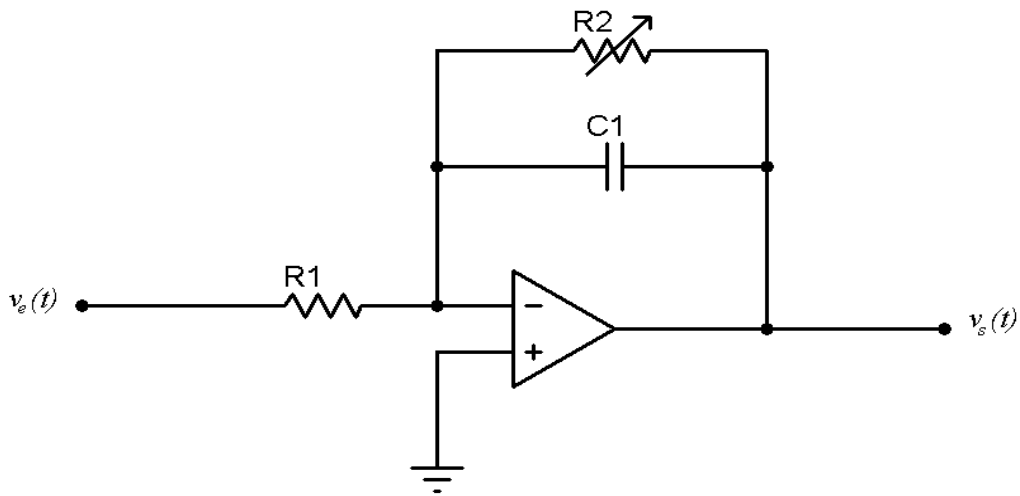


Figura 31: Compensador com realimentação em paralelo

O compensador acima tem a seguinte função de transferência.

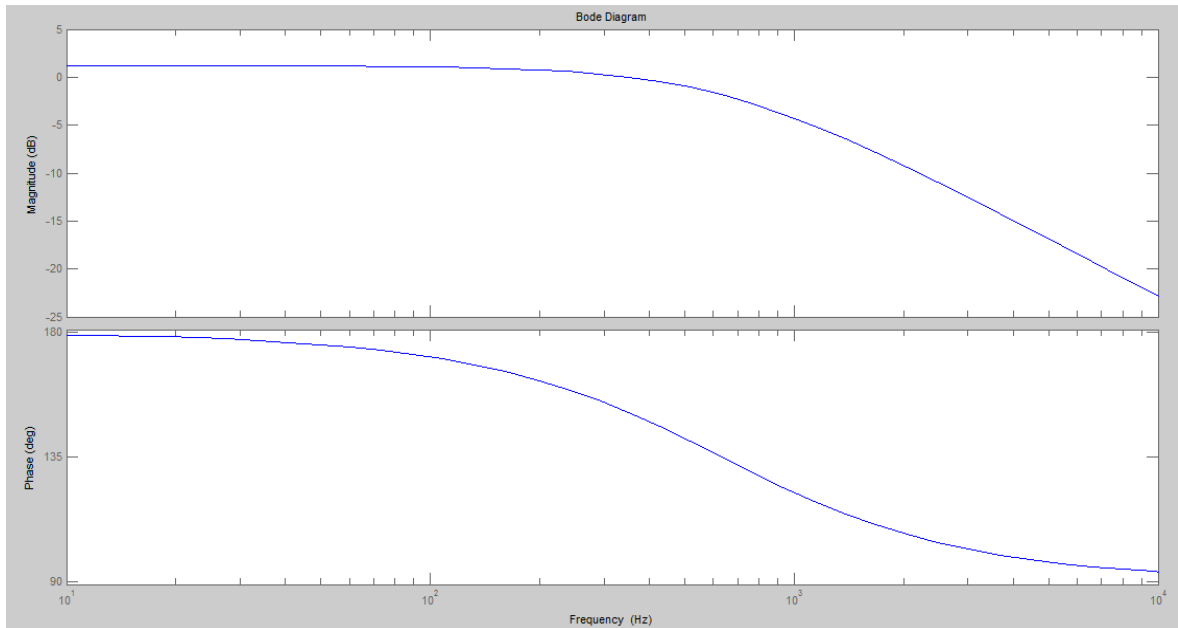
$$T(s) = -\frac{R_2}{R_1} \left( \frac{1}{1+sC_1R_2} \right) \quad (12)$$

Mais uma vez o sinal aplicado será uma senóide de freqüência igual a 500 Hz. Os parâmetros  $R_1$  e  $C_1$  serão fixados e o valor de  $R_2$  será variado para observar a reação da resposta. Os primeiros valores usados foram os seguintes:

Tabela 7: Valores dos componentes utilizados na prática

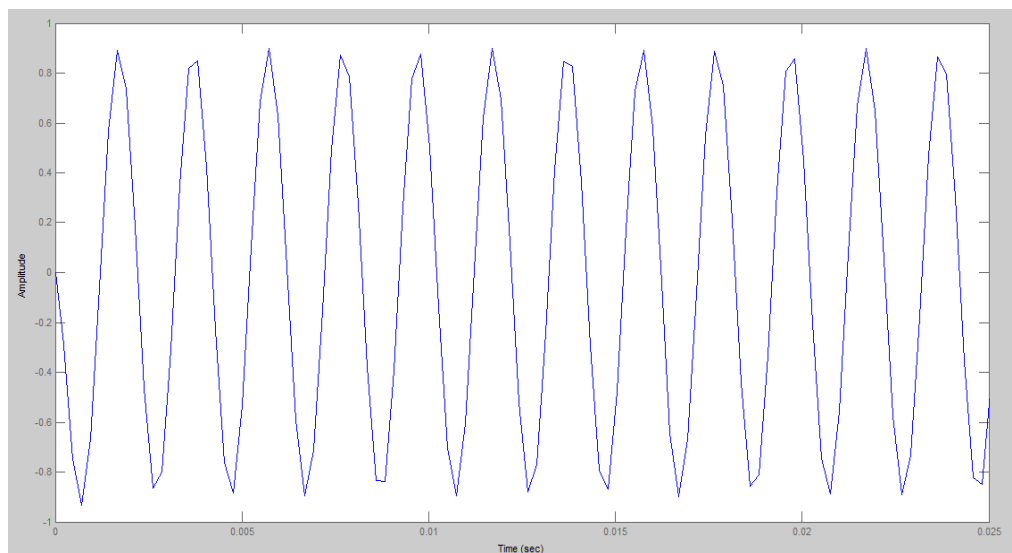
| $R_1$        | $R_2$            | Capacitância |
|--------------|------------------|--------------|
| 1 k $\Omega$ | 1,147 k $\Omega$ | 220 pF       |

Para esses valores a função de transferência tem o seguinte diagrama de Bode.



**Figura 32: Diagrama de Bode do compensador**

Analisando o diagrama percebe-se que quando um sinal de 500 Hz for aplicado espera-se obter na saída um sinal defasado de  $142^\circ$  em relação à entrada. A resposta simulada com o MATLAB é mostrada abaixo.



**Figura 33: Resposta mostrada pelo MATLAB**

No laboratório as formas de onda observadas foram as mostradas abaixo.

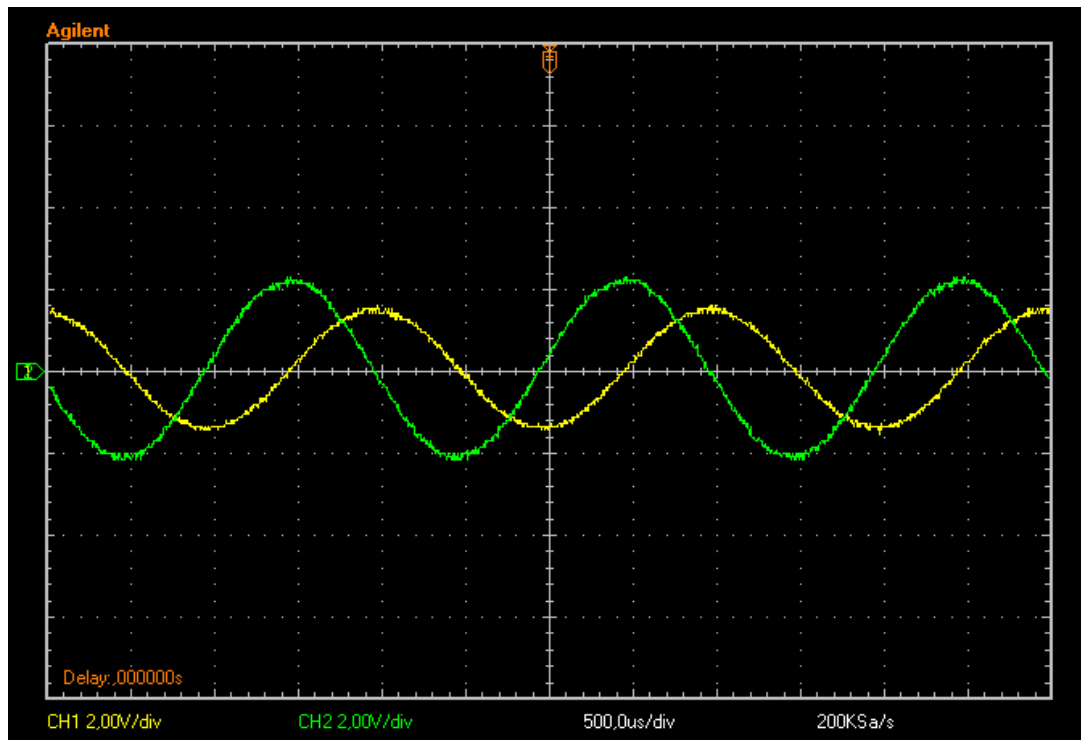


Figura 34: Formas de onda de entrada (amarelo) e saída (verde) vistas no osciloscópio

Estima-se que o atraso entre os dois sinais seja de cerca 700  $\mu$ s, logo:

$$\Phi = 2\pi f\Delta t$$

$$\Phi = 2,199 \text{ rad}$$

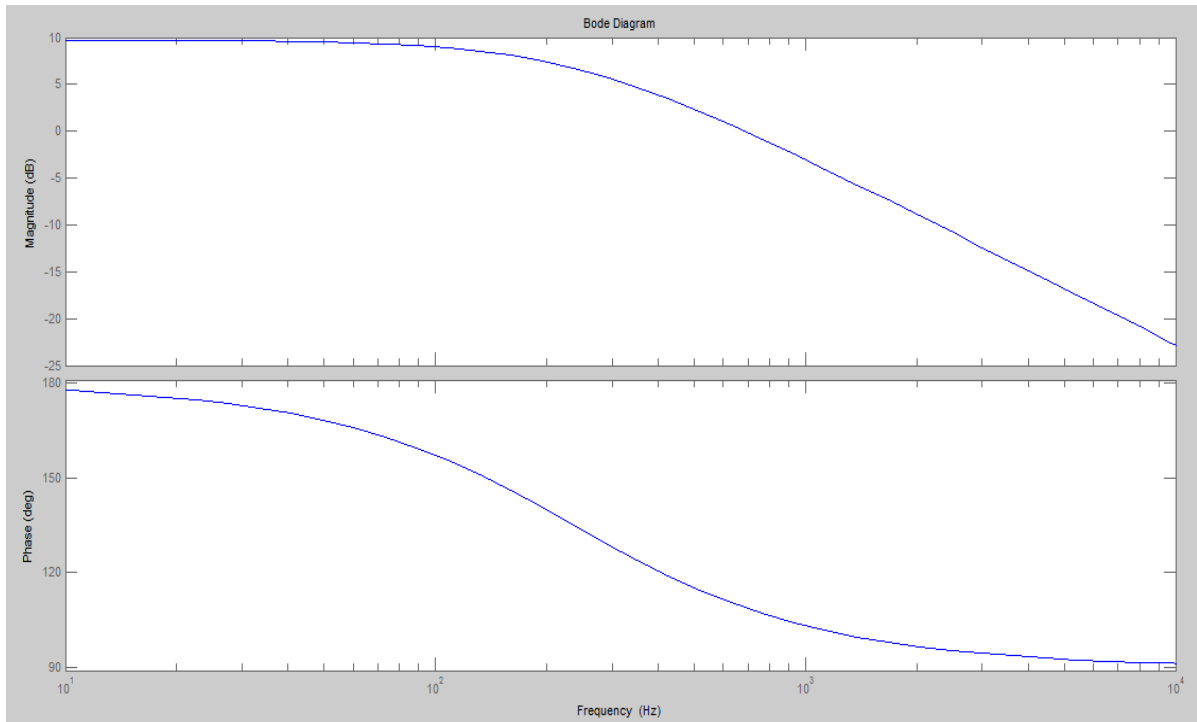
$$\Phi = 126^\circ$$

Note que o ângulo conseguido é próximo do esperado teoricamente. Os erros devem estar implícitos nas medições e aproximações feitas na prática. Mudando os parâmetros do compensador para os seguintes valores:

Tabela 8: Valores dos componentes utilizados na prática

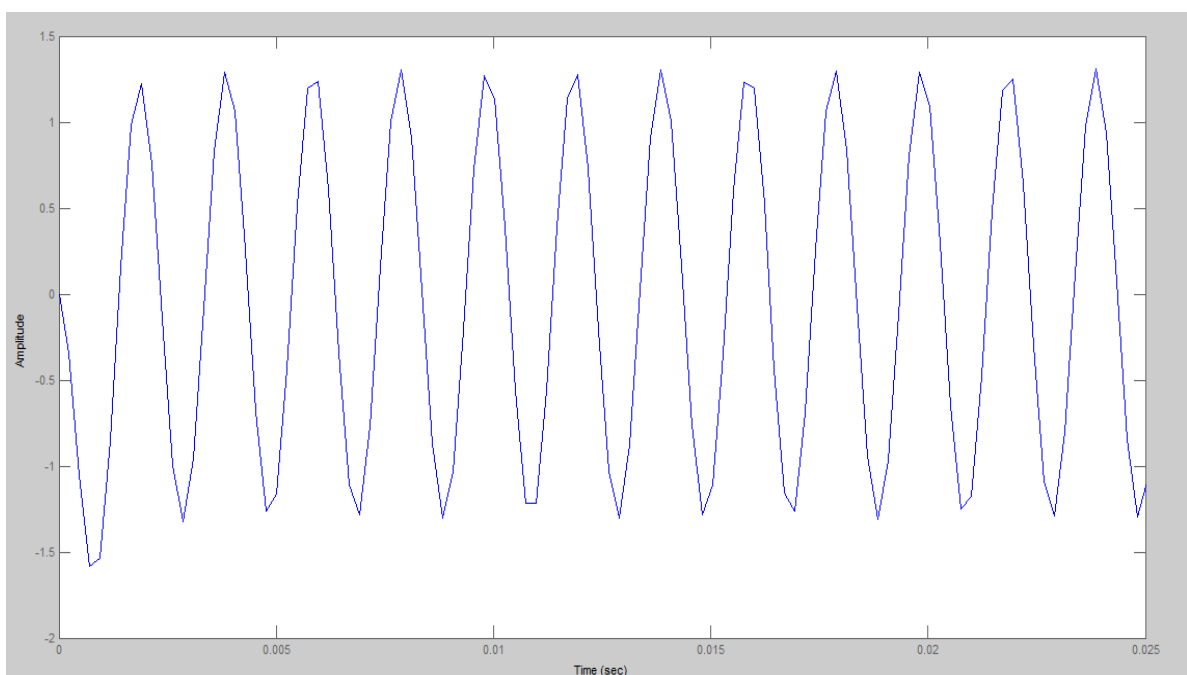
| $R_1$        | $R_2$           | Capacitância |
|--------------|-----------------|--------------|
| 1 k $\Omega$ | 3,06 k $\Omega$ | 220 pF       |

Obtêm-se a seguinte resposta em frequência deste sistema:



**Figura 35: Diagrama de Bode do compensador**

A análise do diagrama permite observar que quando um sinal de frequência igual a 500 Hz for aplicado a saída estará defasada de  $115^\circ$  do sinal na entrada. A resposta simulada no MATLAB é a seguinte:



**Figura 36: Resposta mostrada pelo MATLAB**

O resultado mostrado no osciloscópio é ilustrado abaixo:

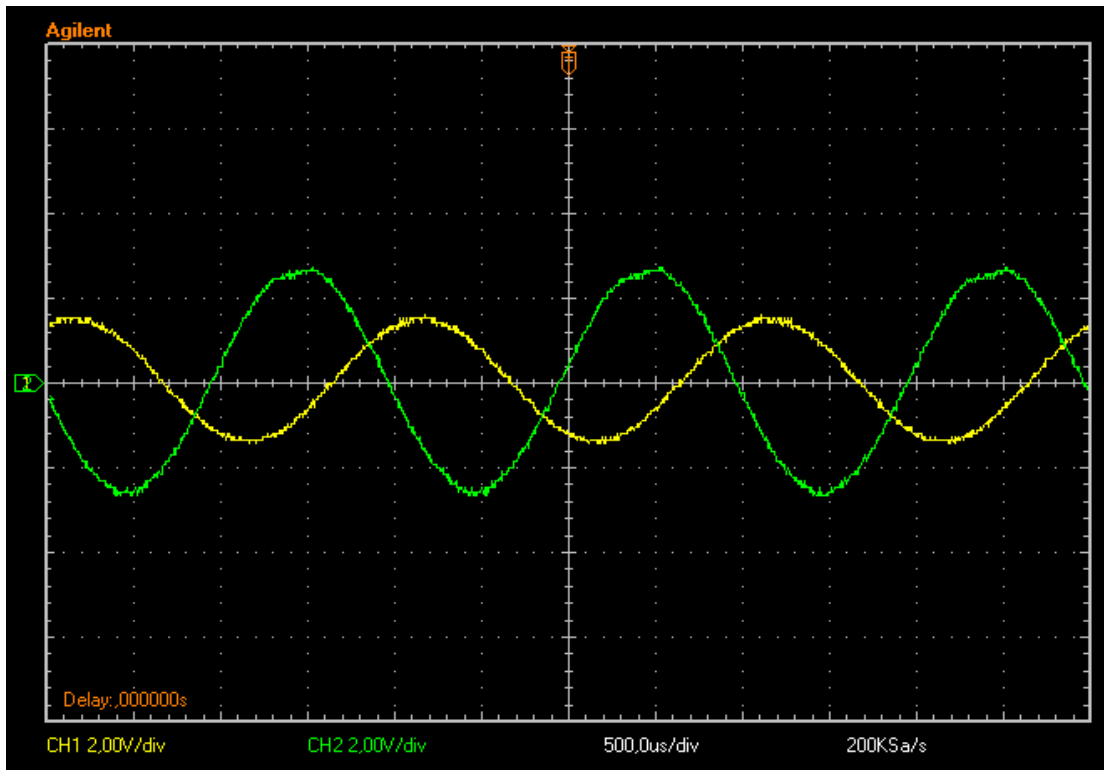


Figura 37 - Formas de onda de entrada (amarelo) e saída (verde) vistas no osciloscópio

Estima-se um “*delay*” entre os sinais de aproximadamente 645  $\mu$ s, portanto:

$$\Phi = 2\pi f\Delta t$$

$$\Phi = 2,026 \text{ rad}$$

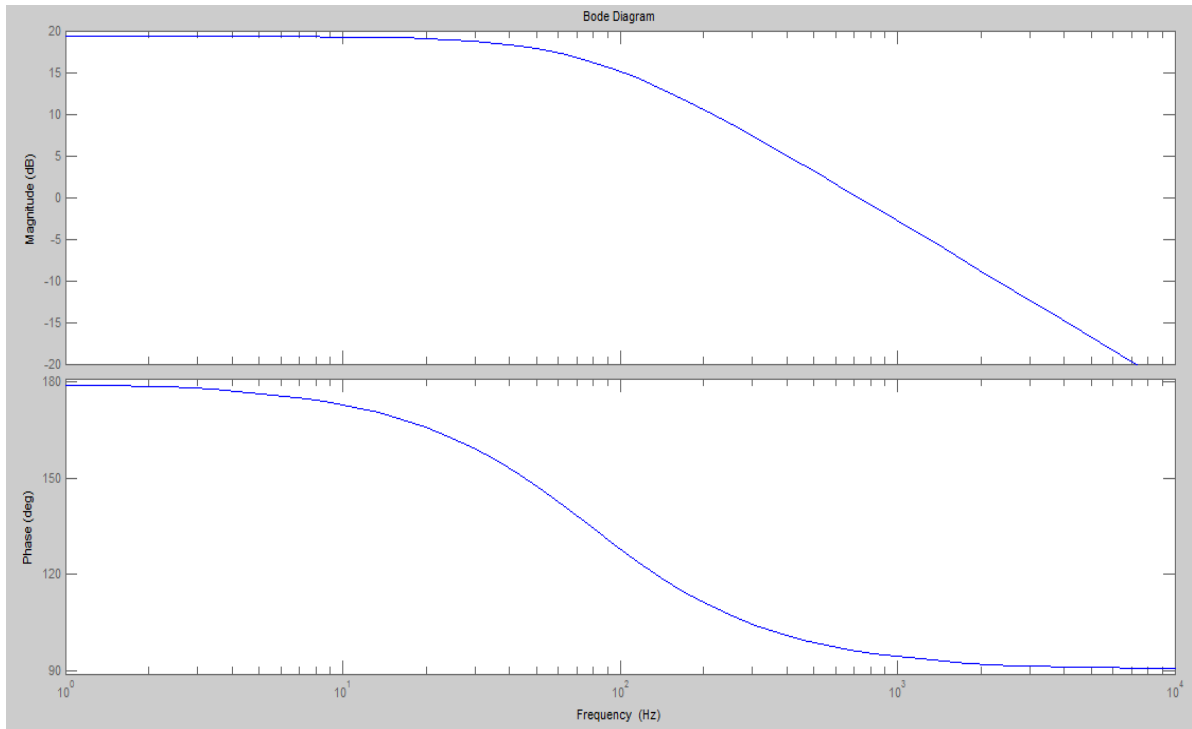
$$\Phi = 116,1^\circ$$

Percebe-se mais uma vez que a previsão teórica está condizente com os dados obtidos na montagem prática. Mudando mais uma vez os parâmetros do compensador para os seguintes valores:

Tabela 9: Valores dos componentes utilizados na prática

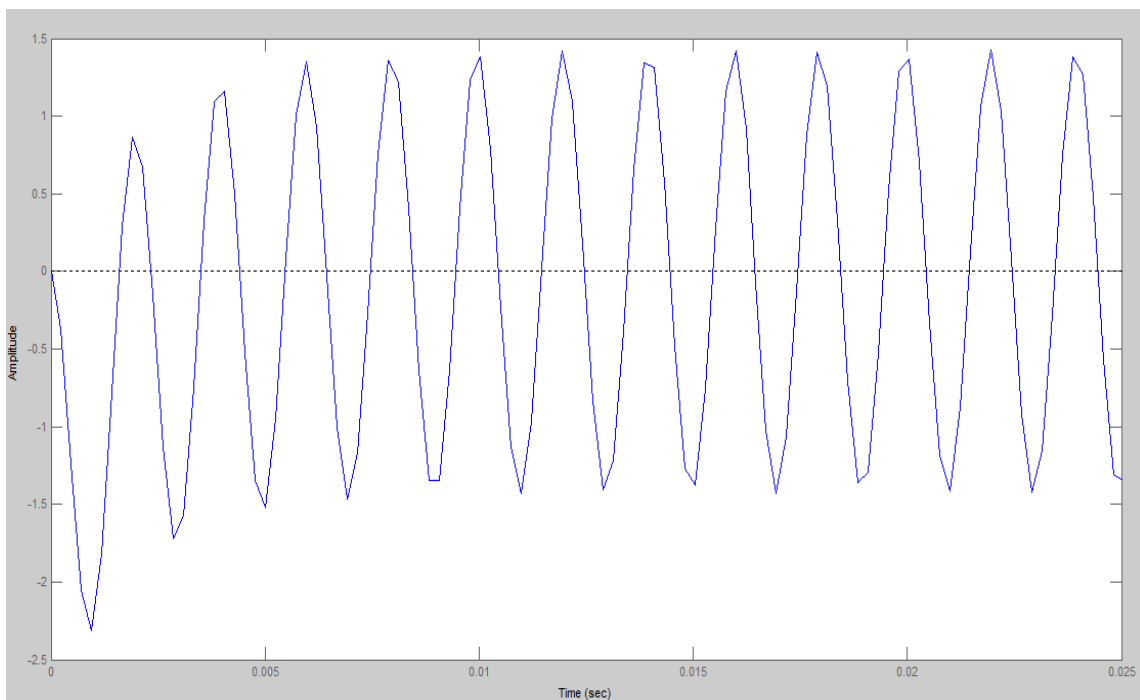
| $R_1$        | $R_2$           | Capacitância |
|--------------|-----------------|--------------|
| 1 k $\Omega$ | 9,25 k $\Omega$ | 220 pF       |

O diagrama de Bode para o compensador ajustado com tais valores é a seguinte:



**Figura 38: Diagrama de Bode do compensador**

Para um sinal de entrada de frequência 500 Hz espera-se uma defasagem entre entrada e saída de  $98,9^\circ$ . A resposta simulada com o MATLAB é mostrada a seguir:



**Figura 39: Resposta mostrada pelo MATLAB**

A resposta obtida na montagem prática foi a seguinte:

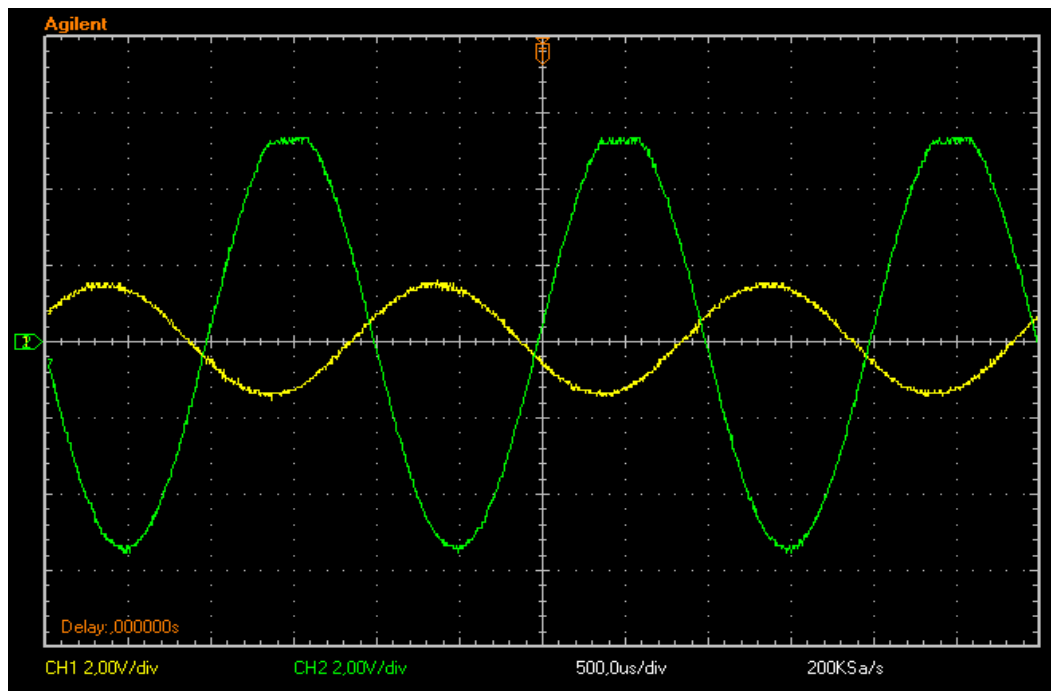


Figura 40: Formas de onda de entrada (amarelo) e saída (verde) vistas no osciloscópio

O atraso entre os dois sinais foi estimado como sendo de cerca de 560  $\mu$ s, portanto:

$$\Phi = 2\pi f\Delta t$$

$$\Phi = 1,759 \text{ rad}$$

$$\Phi = 100,8^\circ$$

O resultado é condizente com a previsão teórica feita através do diagrama de Bode. O próximo compensador a ser estudado é mostrado na figura a seguinte:



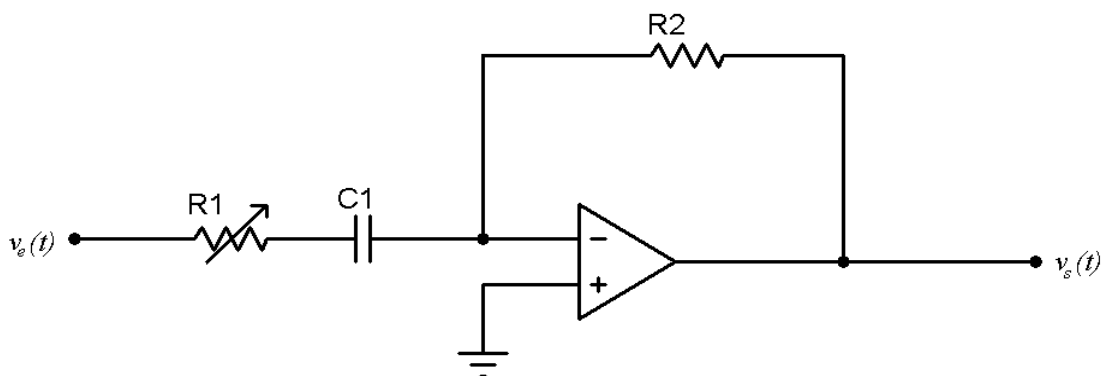


Figura 41: Compensador com capacitor e resistor em série na entrada

A função de transferência dessa implementação é a seguinte:

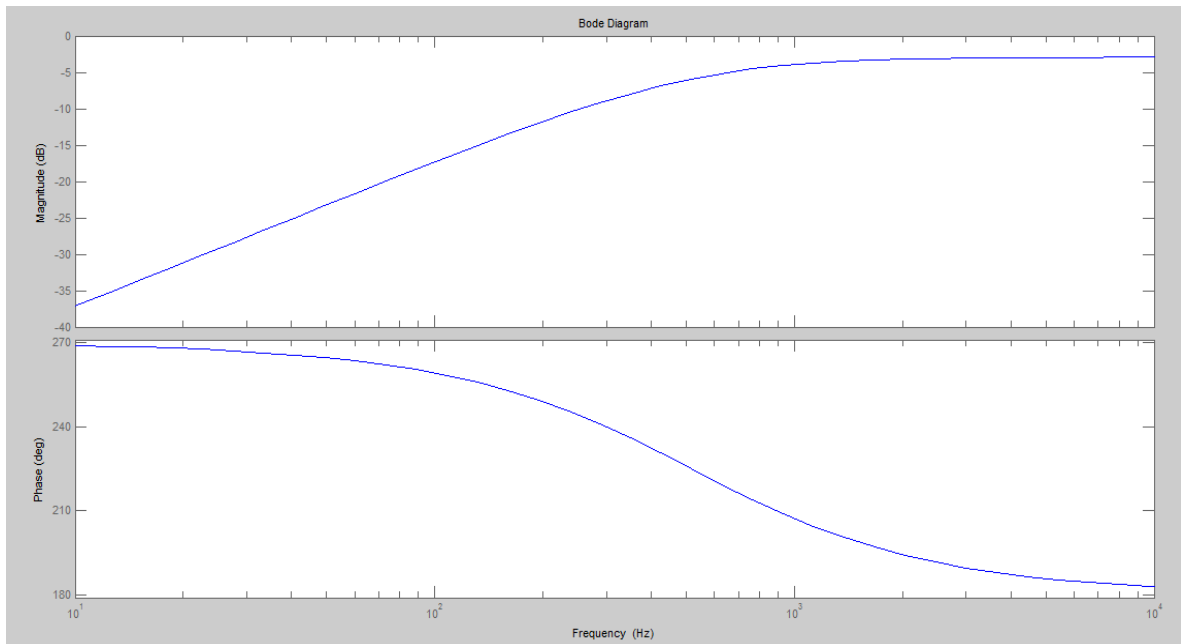
$$T(s) = - \frac{R_2 C_1 s}{R_1 C_1 s + 1} \quad (13)$$

O sinal de entrada aplicado será em trem de impulsos. Os parâmetros C<sub>1</sub> e R<sub>2</sub> serão constantes e serão observadas as variações na resposta devido a variação do parâmetro R<sub>1</sub>. Os primeiros valores utilizados foram os seguintes:

Tabela 10: Valores dos componentes utilizados na prática

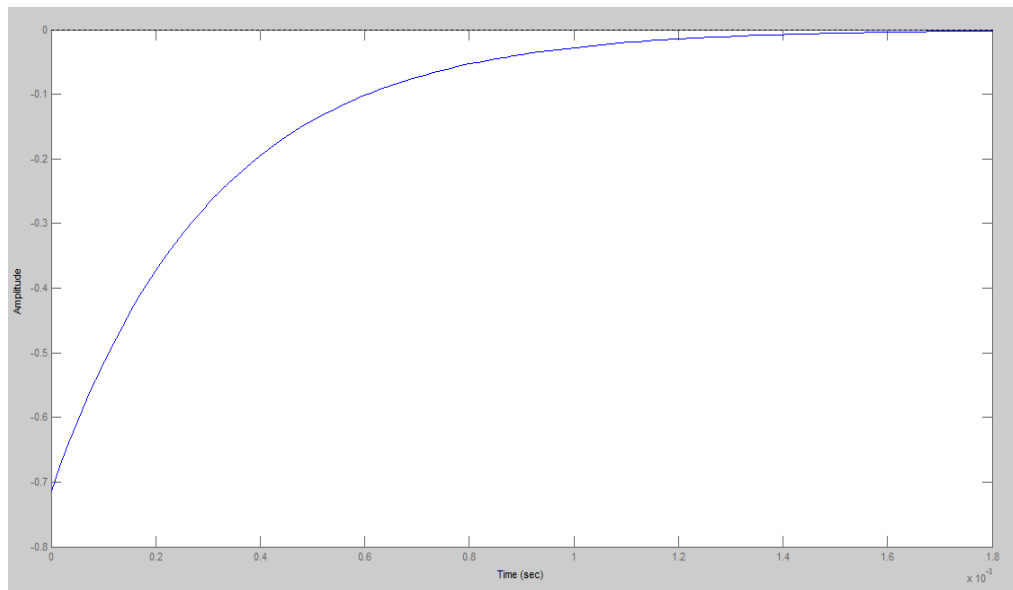
| R <sub>1</sub> | R <sub>2</sub> | Capacitância |
|----------------|----------------|--------------|
| 1,4 kΩ         | 1 kΩ           | 220 pF       |

O diagrama de Bode para o compensador com esses parâmetros é mostrado a seguir:



**Figura 42: Diagrama de Bode do compensador**

Pela análise do diagrama de Bode percebe-se que o controlador só “deixa passar” as componentes de alta freqüência do espectro de Fourier do sinal aplicado, as componentes de baixa freqüência tem um ganho muito baixo que é praticamente imperceptível, portanto, como o sinal aplicado será um trem de impulsos, o compensador só responderá nos momentos de transição do sinal. A resposta obtida com o MATLAB para uma função degrau é a seguinte.



**Figura 43: Resposta mostrada pelo MATLAB**

O resultado obtido com o trem de pulsos no laboratório é o seguinte.

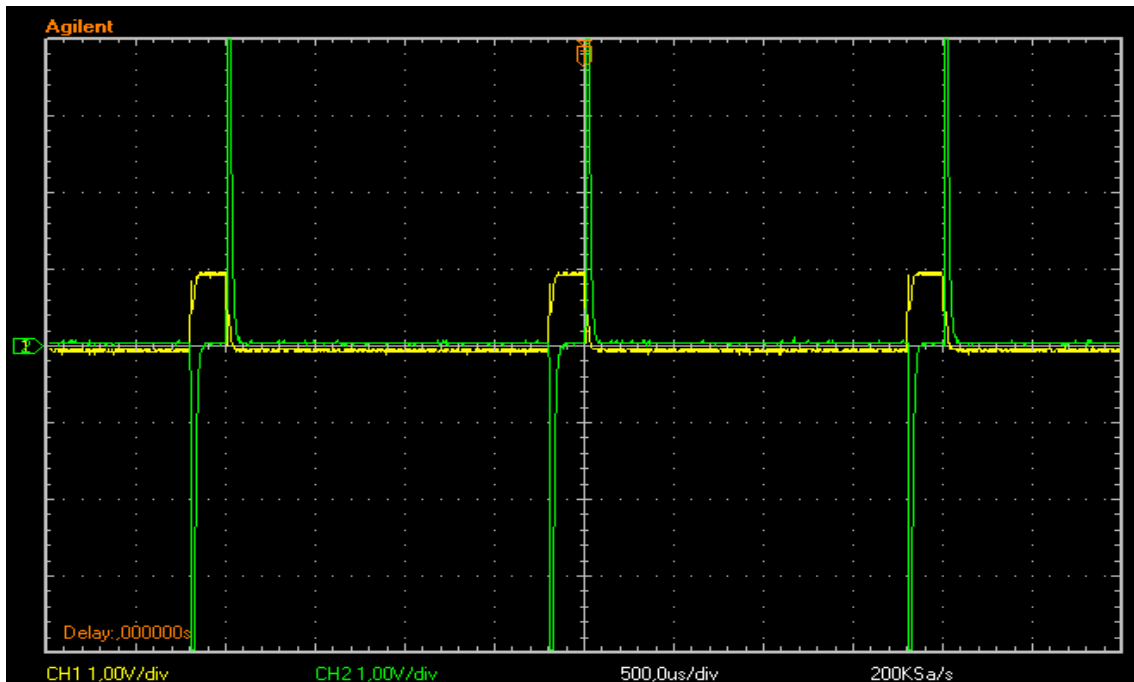


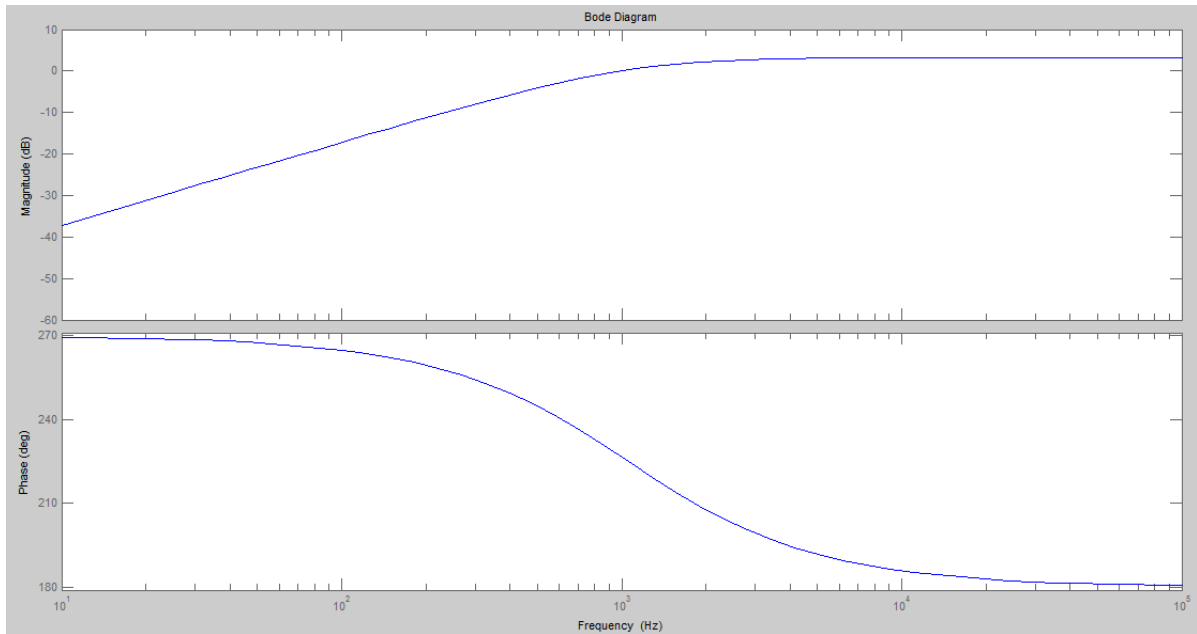
Figura 44: Formas de onda de entrada (amarelo) e saída (verde) vistas no osciloscópio

O resultado observado em laboratório é semelhante ao obtido nas previsões teóricas. Agora se analisa para outros valores de parâmetros do compensador:

Tabela 11: Valores dos componentes utilizados na prática

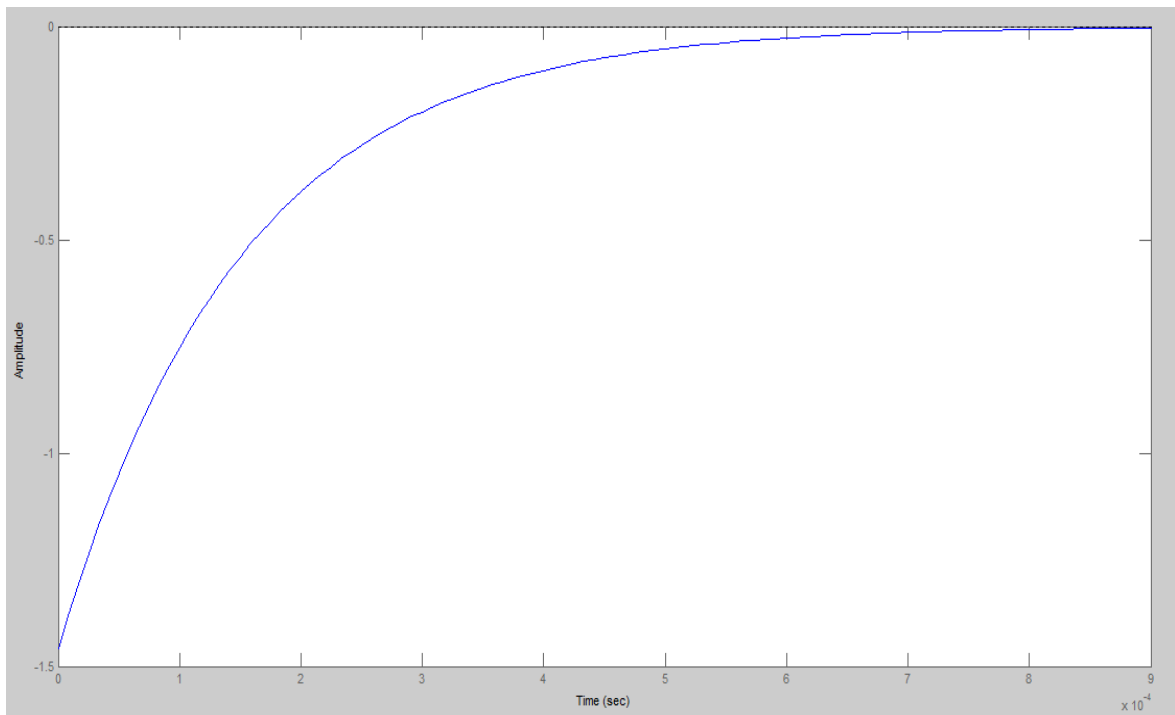
| $R_1$            | $R_2$        | Capacitância |
|------------------|--------------|--------------|
| 0,685 k $\Omega$ | 1 k $\Omega$ | 220 pF       |

Com esses parâmetros o diagrama de Bode fica da seguinte forma.



**Figura 45: Diagrama de Bode do compensador**

Percebe-se que a resposta obtida será apenas para altas frequências como observado anteriormente, a diferença será observada apenas na magnitude. A resposta do MATLAB é mostrada na figura 46.



**Figura 46: Resposta mostrada pelo MATLAB**

No laboratório as formas de onda vistas foram as seguintes.

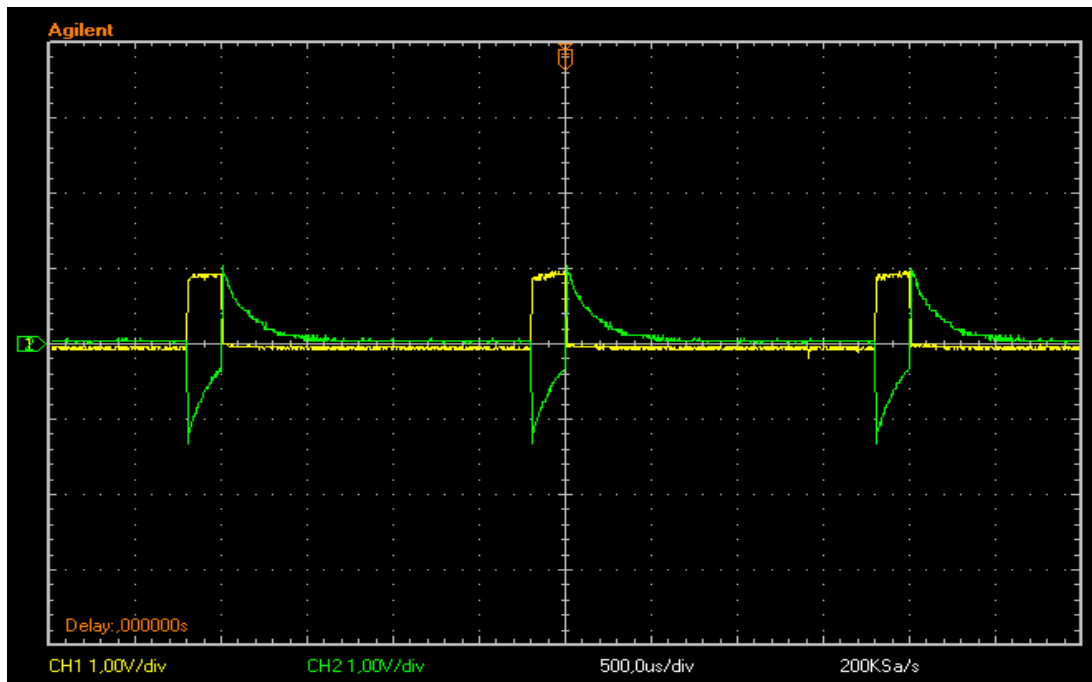


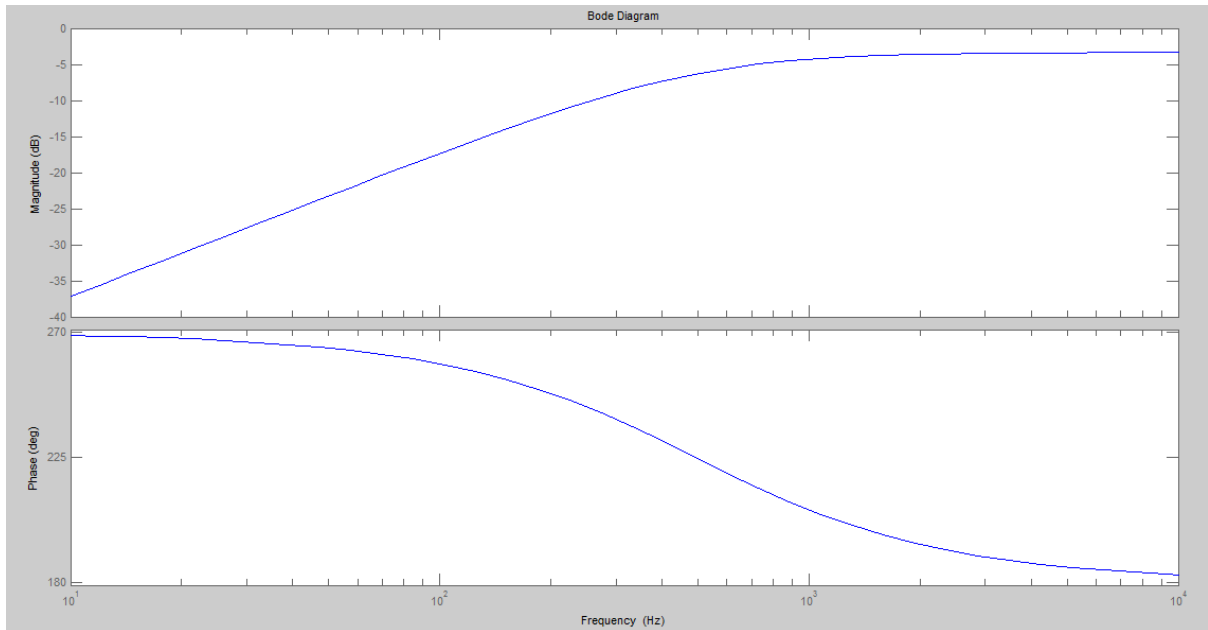
Figura 47: Formas de onda de entrada (amarelo) e saída (verde) vistas no osciloscópio

As respostas são condizentes e mostram que só há resposta no compensador nos momentos de transição brusca na entrada que implicam em componentes de altíssima frequência no espectro de Fourier do sinal. Os últimos valores selecionados para os parâmetros do compensador foram os seguintes:

Tabela 12: Valores dos componentes utilizados na prática

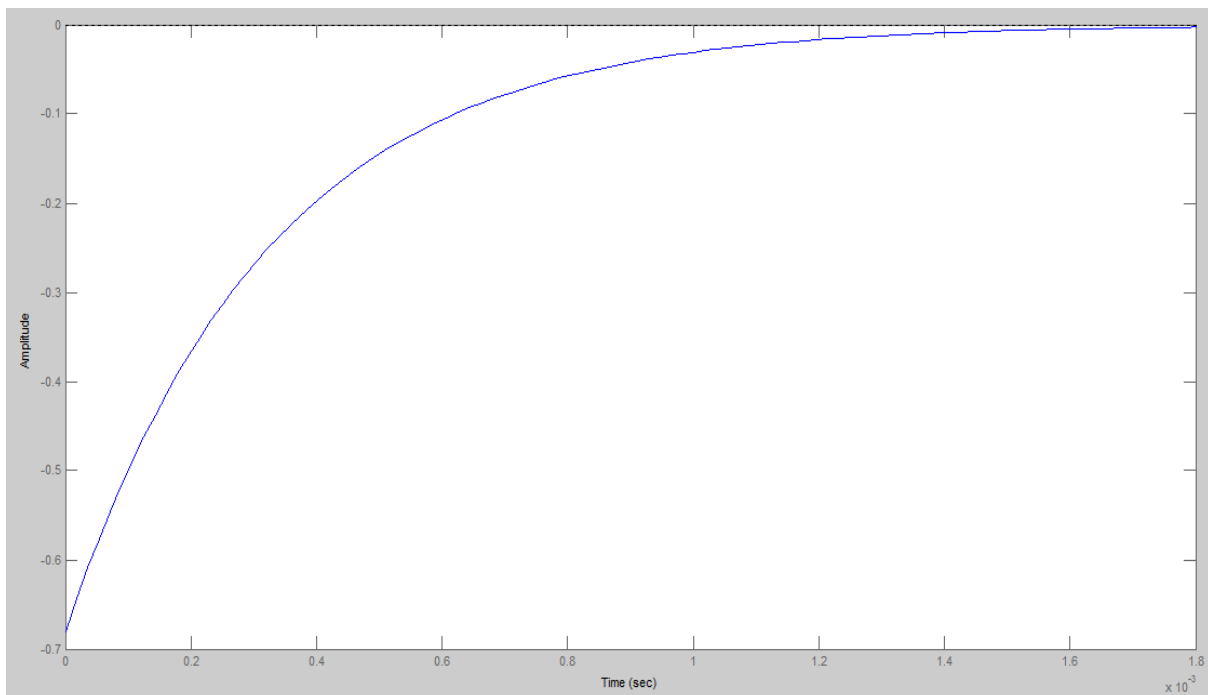
| $R_1$           | $R_2$        | Capacitância |
|-----------------|--------------|--------------|
| 1,47 k $\Omega$ | 1 k $\Omega$ | 220 pF       |

A resposta em frequência é mostrada abaixo no diagrama de Bode.



**Figura 48: Diagrama de Bode do compensador**

O comportamento para tais parâmetros é semelhante aos anteriores a menos da amplitude. A simulação da resposta com o MATLAB é mostrada a seguir.



**Figura 49: Resposta mostrada pelo MATLAB**

Em laboratório as seguintes formas de onda foram observadas.

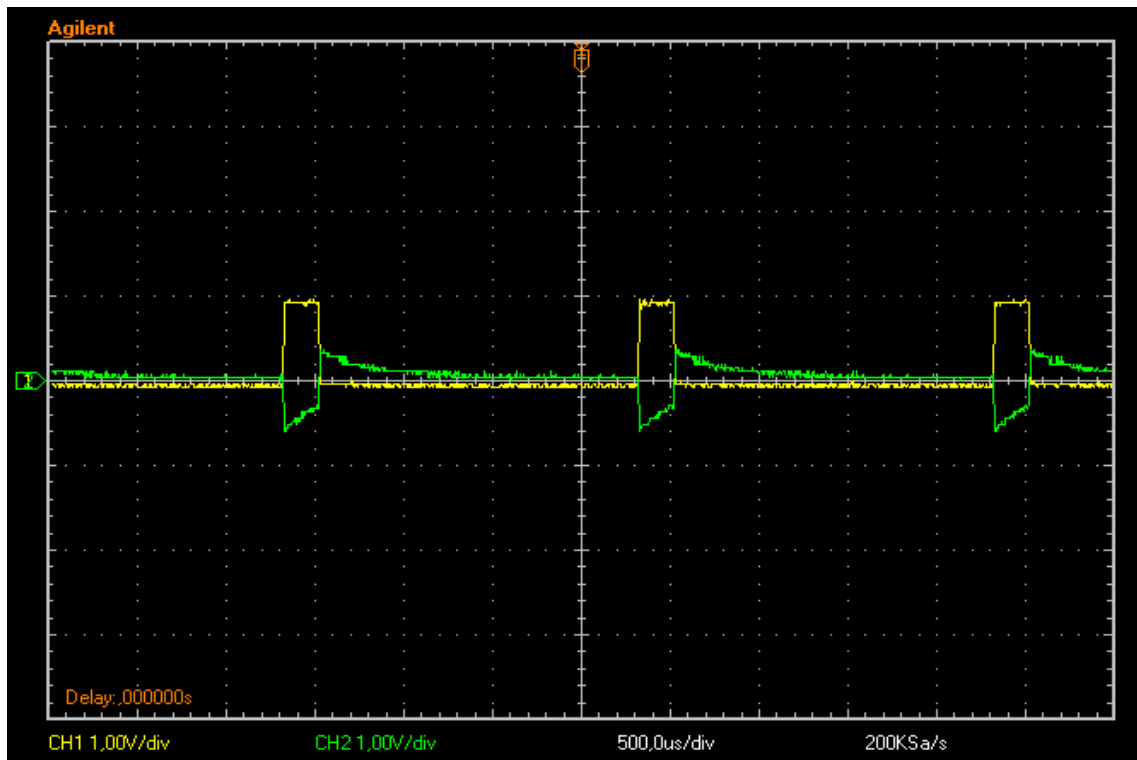


Figura 50: Formas de onda de entrada (amarelo) e saída (verde) vistas no osciloscópio

As respostas esperadas com base na teoria são condizentes com o resultado obtido em laboratório. Sobre o controlador estudado pode-se dizer o seguinte: reage apenas a variações bruscas na entrada (componentes de alta frequência da série de Fourier), é possível variar a amplitude do sinal de saída ajustando adequadamente os parâmetros da montagem, além disso, esse dispositivo pode ser usado como um filtro passa-alta.

Agora o elemento na entrada do compensador passa a ser um capacitor em paralelo com um resistor variável (potenciômetro), e o elemento de realimentação continua sendo um resistor, essa montagem é esquematizada na figura seguinte.

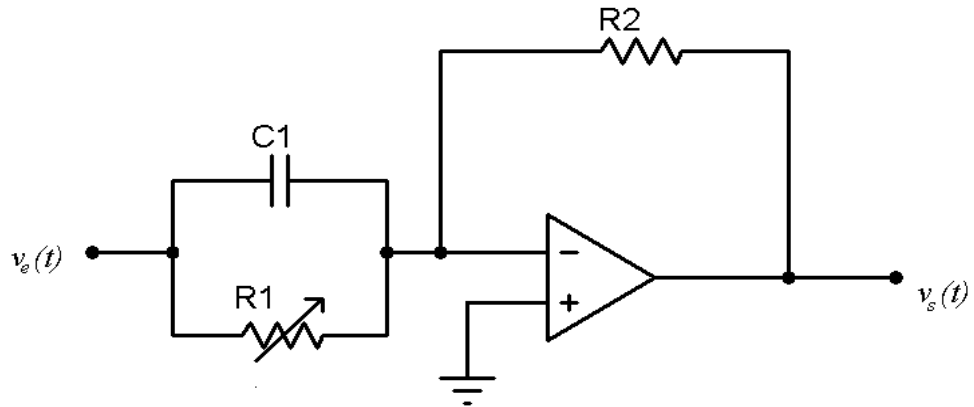


Figura 51: Compensador com resistor em paralelo com capacitor na entrada

A função de transferência desse compensador é a seguinte:

$$T(s) = -R_2 C_1 \left( s + \frac{1}{R_1 C_1} \right) \quad (14)$$

Os valores escolhidos para os parâmetros foram os seguintes:

Tabela 13: Valores dos componentes utilizados na prática

| $R_1$          | $R_2$        | Capacitância |
|----------------|--------------|--------------|
| 1,4 k $\Omega$ | 1 k $\Omega$ | 220 pF       |

O diagrama de Bode com essa configuração é o seguinte:

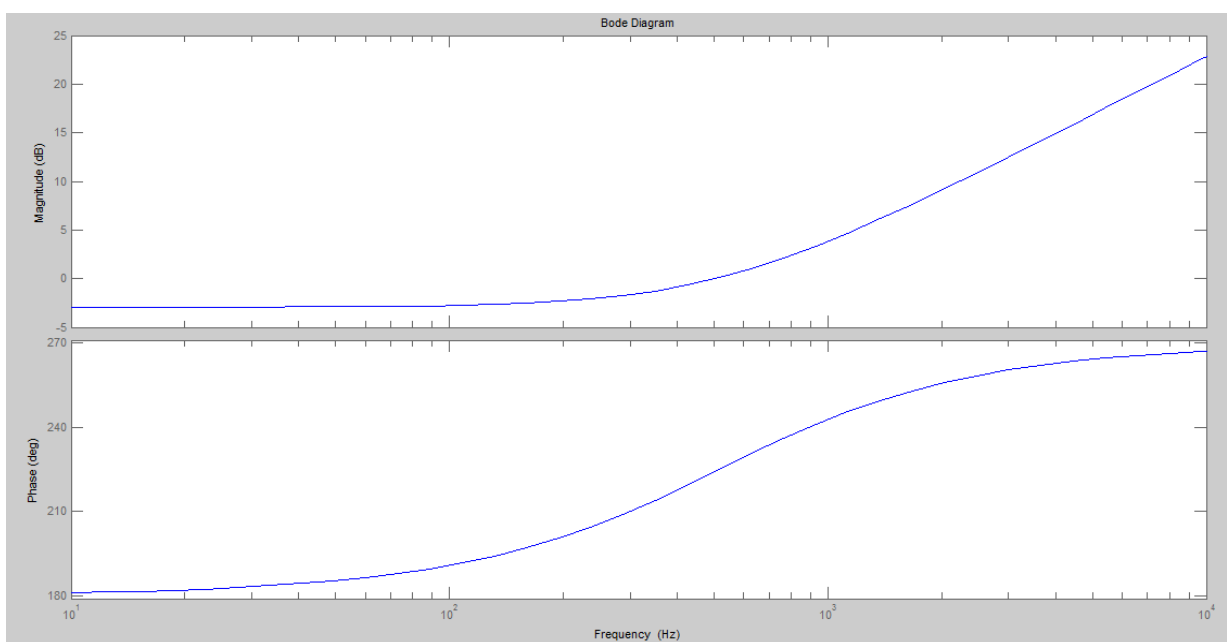


Figura 52: Diagrama de Bode do compensador



Note que agora, o compensador apresenta um ganho aproximadamente constante de -2,92 dB para as componentes de baixa frequência do espectro do sinal e as componentes de alta frequência continuam a ter valores de ganho cada vez maiores quanto maior essa frequência. Isso implica que o controlador responde tanto às variações bruscas na entrada quanto às componentes cc. O programa MATLAB não conseguiu simular uma resposta para esse controlador, portanto só serão apresentadas as repostas obtidas em laboratório. Para os parâmetros descritos anteriormente as formas de onda vistas foram as seguintes:

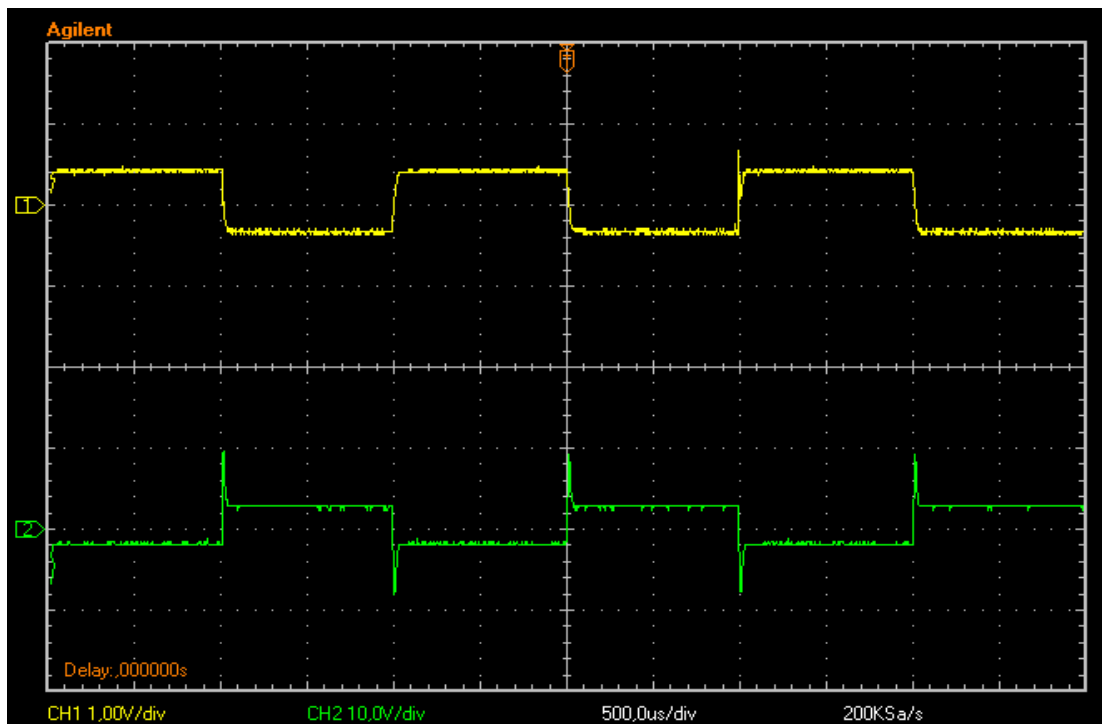


Figura 53 - Formas de onda de entrada (amarelo) e saída (verde) vistas no osciloscópio

Percebe-se que as previsões feitas através da análise do diagrama de Bode estavam corretas, pois na figura se vê uma saída tanto nos momentos de transição quanto nos momentos em que o sinal se estabiliza.

## CÓDIGO MATLAB

### Primeira montagem

#### Para ganho1

```
>> A=[0 0 6280];
>> B=[1 0 39438400];
>> V=tf(A,B)
Transfer function:
    6280
-----
s^2 + 3.944e007
>> D=[0 0 -1000];
>> E=[0 0 1000];
>> G=tf(D,E)
Transfer function:
    -1
>> H=V*G
Transfer function:
   -6.28e006
-----
1000 s^2 + 3.944e010
>> impulse(H)
```

#### Para ganho maior que 1

```
>> A=[0 0 6280];
>> B=[1 0 39438400];
>> V=tf(A,B)
Transfer function:
    6280
-----
s^2 + 3.944e007

>> D=[0 0 -2530];
>> E=[0 0 1000];
>> G=tf(D,E)
Transfer function:
   -2.53
>> H=V*G

Transfer function:
   -1.589e007
-----
1000 s^2 + 3.944e010

>> impulse(H)
```

## Para ganho menor que 1

```
>> A=[0 0 6280];  
>> B=[1 0 39438400];  
>> V=tf(A,B)
```

Transfer function:  
6280

-----  
s<sup>2</sup> + 3.944e007

```
>> D=[0 0 -633];  
>> E=[0 0 1000];  
>> G=tf(D,E)
```

Transfer function:  
-0.633

```
>> H=V*G
```

Transfer function:  
-3.975e006

-----  
1000 s<sup>2</sup> + 3.944e010

```
>> impulse(H)
```

## Segunda montagem

### Série

Mínimo R2=1,4 ohms.  
>> A=[0 0 6280];  
>> B=[1 0 39438400];  
>> V=tf(A,B)

Transfer function:  
6280

-----  
s<sup>2</sup> + 3.944e007

```
>> D=[0 -3.08e-10 -1];  
>> E=[0 2.2e-7 0];  
>> G=tf(D,E)
```

Transfer function:  
-3.08e-010 s + 1

-----  
2.2e-007 s

```
>> H=V*G
```

Transfer function:

-1.934e-006 s - 6280

-----

2.2e-007 s<sup>3</sup> + 8.676 s

>> impulse(H)

Médio R2=1,01 kohms.

>> A=[0 0 6280];

>> B=[1 0 39438400];

>> V=tf(A,B)

Transfer function:

6280

-----

s<sup>2</sup> + 3.944e007

>> D=[0 -2.222e-7 -1];

>> E=[0 2.2e-7 0];

>> G=tf(D,E)

Transfer function:

-2.222e-007 s - 1

-----

2.2e-007 s

>> H=V\*G

Transfer function:

-0.001395 s - 6280

-----

2.2e-007 s<sup>3</sup> + 8.676 s

>> impulse(H)

Máximo R2=3,4 kohms.

>> A=[0 0 6280];

>> B=[1 0 39438400];

>> V=tf(A,B)

Transfer function:

6280

-----

s<sup>2</sup> + 3.944e007

>> D=[0 -7.48e-7 -1];

>> E=[0 2.2e-7 0];

>> G=tf(D,E)

Transfer function:

-7.48e-007 s - 1

-----

2.2e-007 s

>> H=V\*G

Transfer function:

-0.004697 s - 6280

-----

2.2e-007 s<sup>3</sup> + 8.676 s

>> impulse(H)

### Paralelo

Mínimo R2=1,147 kohms.

>> A=[0 0 6280];

>> B=[1 0 39438400];

>> V=tf(A,B)

Transfer function:

6280

-----

s<sup>2</sup> + 3.944e007

>> D=[0 0 -1147];

>> E=[0 2.5234e-4 1000];

>> G=tf(D,E)

Transfer function:

-1147

-----

0.0002523 s + 1000

>> H=V\*G

Transfer function:

-7.203e006

-----

0.0002523 s<sup>3</sup> + 1000 s<sup>2</sup> + 9952 s + 3.944e010

>> impulse(H)

Médio R2=3,06 kohms.

>> A=[0 0 6280];

>> B=[1 0 39438400];

>> V=tf(A,B)

Transfer function:

6280

-----

s<sup>2</sup> + 3.944e007

>> D=[0 0 -3060];

>> E=[0 6.732e-4 1000];

>> G=tf(D,E)

Transfer function:

-3060

-----

0.0006732 s + 1000

>> H=V\*G

Transfer function:

-1.922e007

-----  
0.0006732 s<sup>3</sup> + 1000 s<sup>2</sup> + 2.655e004 s + 3.944e010

```
>> impulse(H)
Máximo R2=9,25 kohms.
>> A=[0 0 6280];
>> B=[1 0 39438400];
>> V=tf(A,B)
```

Transfer function:  
6280

-----  
s<sup>2</sup> + 3.944e007

```
>> D=[0 0 -9250];
>> E=[0 2.035e-3 1000];
>> G=tf(D,E)
```

Transfer function:  
-9250

-----  
0.002035 s + 1000

```
>> H=V*G
```

Transfer function:  
-5.809e007

-----  
0.002035 s<sup>3</sup> + 1000 s<sup>2</sup> + 8.026e004 s + 3.944e010

```
>> impulse(H)
```

### **Terceira montagem**

#### **Série**

Mínimo R2=1,4 ohms.  
>> A=[0 0 6280];  
>> B=[1 0 39438400];  
>> V=tf(A,B)

Transfer function:  
6280

-----  
s<sup>2</sup> + 3.944e007

```
>> D=[0 -2.2e-7 0];
>> E=[0 3.08e-10 1];
>> G=tf(D,E)
```

Transfer function:  
-2.2e-007 s

-----  
3.08e-010 s + 1

```
>> H=V*G
Transfer function:
      -0.001382 s
-----
3.08e-010 s^3 + s^2 + 0.01215 s + 3.944e007
```

```
>> impulse(H)
Médio R2=0,685 kohms.
>> A=[0 0 6280];
>> B=[1 0 39438400];
>> V=tf(A,B)
```

```
Transfer function:
      6280
-----
s^2 + 3.944e007
```

```
>> D=[0 -2.2e-7 0];
>> E=[0 1.507e-7 1];
>> G=tf(D,E)
```

```
Transfer function:
      -2.2e-007 s
-----
1.507e-007 s + 1
```

```
>> H=V*G
```

```
Transfer function:
      -0.001382 s
-----
1.507e-007 s^3 + s^2 + 5.943 s + 3.944e007
```

```
>> impulse(H)
Máximo R2=1,47 kohms.
>> A=[0 0 6280];
>> B=[1 0 39438400];
>> V=tf(A,B)
```

```
Transfer function:
      6280
-----
s^2 + 3.944e007
```

```
>> D=[0 -2.2e-7 0];
>> E=[0 3.234e-7 1];
>> G=tf(D,E)
```

```
Transfer function:
      -2.2e-007 s
-----
3.234e-007 s + 1
```

```
>> H=V*G
```

Transfer function:  
-0.001382 s

-----  
 $3.234e-007 s^3 + s^2 + 12.75 s + 3.944e007$

>> impulse(H)

### Paralelo

Mínimo R2=1,4 ohms.

>> A=[0 0 6280];  
>> B=[1 0 39438400];  
>> V=tf(A,B)

Transfer function:  
6280

-----  
 $s^2 + 3.944e007$

>> D=[0 -3.08e-7 -1000];  
>> E=[0 0 1.4];  
>> G=tf(D,E)

Transfer function:  
-3.08e-007 s - 1000

-----  
1.4

>> H=V\*G

Transfer function:  
-0.001934 s - 6.28e006

-----  
 $1.4 s^2 + 5.521e007$

>> impulse(H)

Médio R2=2,83 kohms.

>> A=[0 0 6280];  
>> B=[1 0 39438400];  
>> V=tf(A,B)

Transfer function:  
6280

-----  
 $s^2 + 3.944e007$

>> D=[0 -6.226e-4 -1000];  
>> E=[0 0 2830];  
>> G=tf(D,E)

Transfer function:  
-0.0006226 s - 1000

-----  
2830

>> H=V\*G



Transfer function:  
-3.91 s - 6.28e006  
-----  
2830 s^2 + 1.116e011

```
>> impulse(H)
Máximo R2=5,91 kohms.
>> A=[0 0 6280];
>> B=[1 0 39438400];
>> V=tf(A,B)
```

Transfer function:  
6280  
-----  
s^2 + 3.944e007

```
>> D=[0 -1.3002e-3 -1000];
>> E=[0 0 5910];
>> G=tf(D,E)
```

Transfer function:  
-0.0013 s - 1000  
-----

```
5910
>> H=V*G
```

Transfer function:  
-8.165 s - 6.28e006  
-----  
5910 s^2 + 2.331e011  
>> impulse(H)

## CONCLUSÃO

Nos circuitos analisados foi notado que o compensador proporcional adequa um ganho ao sinal e faz com que a fase da saída seja de  $180^\circ$  em relação à entrada. Quanto ao compensador com realimentação RC série foi notado que o ângulo obtido experimentalmente é muito próximo do esperado teoricamente, bem como, a resposta em frequência varia de acordo com os parâmetros escolhidos na implementação, permitindo que se ajuste os parâmetros para se obter uma determinada resposta em relação ao ganho e à fase do sinal de saída. O compensador com realimentação RC paralela também apresenta resultado condizente com a previsão teórica feita através do diagrama de Bode.

No compensador RC série na entrada as respostas esperadas com base na teoria são condizentes com o resultado obtido em laboratório. Sobre o controlador estudado pode-se dizer o seguinte: reage apenas a variações bruscas na entrada (componentes de alta frequência da série de Fourier), é possível variar a amplitude do sinal de saída ajustando adequadamente os parâmetros da montagem, além disso, esse dispositivo pode ser usado como um filtro passa-alta.

O compensador RC paralelo na entrada apresenta um ganho aproximadamente constante para as componentes de baixa frequência do espectro do sinal e as componentes de alta frequência continuam a ter valores de ganho cada vez maiores quanto maior essa frequência. Isso implica que o controlador responde tanto às variações bruscas na entrada quanto às componentes cc.

Muitos sistemas de controle são implementados pela escolha de formas padrão de controladores e seus parâmetros determinados experimentalmente seguindo passo a passo um procedimento específico com o sistema físico.

## REFERÊNCIAS

- [1] LATHI, B. P. **Sinais e Sistemas Lineares**. 2.ed. Porto Alegre: Bookman, 2007.
- [2] NISE, Norman S. **Engenharia de Sistemas de Controle**. 5.ed. Rio de Janeiro: LTC, 2009.
- [3] OGATA, Katsuhiko. **Engenharia de Controle Moderno**. 4.ed. São Paulo: Prentice Hall, 2004.