



UNIVERSIDADE FEDERAL DO VALE DO SÃO FRANCISCO
COLEGIADO DE ENGENHARIA ELÉTRICA

LABORATÓRIO DE CONTROLE I

Experimento 1:

ESTUDO DE FUNÇÕES DE TRANSFERÊNCIA E ANÁLISE DE RESPOSTA TRANSITÓRIA

COLEGIADO DE ENGENHARIA ELÉTRICA

DISCENTES: Lucas Pires Barbosa

Quelle Gomes dos Santos

Rafael Pereira Lima

Vital Pereira Batista Júnior

PROFESSOR: Eduard Montgomery

JUAZEIRO-BA

2010

OBJETIVOS

Entender como se comporta os sistemas de 1ª e 2ª ordem, quando excitados por uma entrada definida: pulso unitário e rampa unitária.

INTRODUÇÃO

A função transferência é uma operação que, algebricamente, relaciona a saída do sistema à sua entrada. Esta função viabilizará a separação da entrada, do sistema e da saída em três partes separadas e distintas, diferentemente do que ocorre com a equação diferencial. A função também permitirá combinar 'algebricamente' as representações matemáticas dos subsistemas de modo a se obter uma representação global do sistema.

Inicia-se escrevendo uma equação diferencial linear geral de enésima ordem e invariante no tempo,

$$a_n \frac{d^n c(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} c(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 c(t) = b_m \frac{d^m r(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} r(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_0 r(t) \quad (1)$$

Onde $c(t)$ é a saída, $r(t)$ é a entrada e os coeficientes a_i e b_i e a forma da equação diferencial representam o sistema. Aplicando-se a transformada de Laplace a ambos os lados da equação, tem-se:

$$\begin{aligned} a_n s^n C(s) + a_{n-1} s^{n-1} C(s) + \dots + a_0 C(s) + \text{Condição inicial} \\ \text{Termos envolvendo } c(t) \\ = b_m s^m R(s) + b_{m-1} s^{m-1} R(s) + \dots + b_0 R(s) + \text{Condição inicial} \\ \text{Termos envolvendo } r(t) \end{aligned} \quad (2)$$

A Eq. (2) é uma expressão puramente algébrica. Admitindo-se que 'todas as condições iniciais sejam iguais a zero', a Eq.(2) reduz-se a:

$$(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0) C(s) = (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0) R(s) \quad (3)$$

Expressa-se agora a relação entre a transformada da saída, $C(s)$, e a transformada da entrada, $R(s)$:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = G(s) = \frac{(b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0)}{(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0)} \quad (4)$$

Observe que a Eq.(4) separa a saída, C(s), a entrada R(s), e o sistema, a relação entre os polinômios em s à direita. Esta relação G(s) é chamada ‘função de transferência’ e é calculada com ‘condições iniciais iguais a zero’.

A função de transferência pode ser representada por meio de um diagrama de blocos, conforme mostrado na fig.1, com a entrada à esquerda e a saída à direita, e a função de transferência do sistema no interior do bloco. Note que o denominador da função de transferência é idêntico ao polinômio característico da equação diferencial. Pode-se também obter a saída, C(s), utilizando-se:

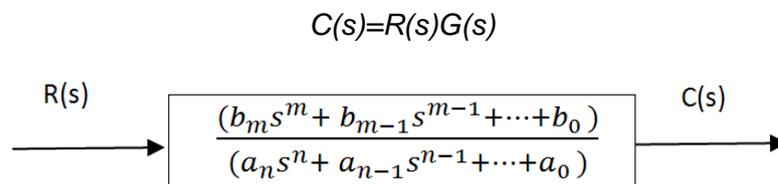


Fig. 1: Diagrama de bloco de uma função de transferência

Em geral, um sistema físico representado por uma equação diferencial linear invariante no tempo pode ser modelado através de uma função de transferência.

Os circuitos equivalentes para redes elétricas que serão apresentados consistem em 3 componentes lineares passivos: resistores, capacitores e indutores. Combinando-se esses componentes elétricos em circuitos, decide-se sobre a entrada e a saída e obtém-se a função de transferência correspondente. Os princípios que norteiam esta análise são estabelecidos pela lei de Kirchhoff. Dependendo de que técnica envolve um esforço menor realizada a manipulação algébrica, será igualada a zero a soma das tensões ao longo das malhas ou a soma das correntes que chegam aos nós. A partir dessas relações será possível escrever as equações diferenciais do circuito. Em seguida obtém-se a transformada de Laplace da equação diferencial e, finalmente, resolve-se problema utilizando a função de transferência.

Para a simplificação a solução de futuros problemas pode-se considerar para condições iniciais nulas, a transformada de Laplace:

- Para o capacitor,

$$V(s) = \frac{1}{Cs} I(s) \quad (5)$$

- Para o resistor,

$$V(s) = RI(s) \quad (6)$$

- Para o indutor,

$$V(s) = LsI(s) \quad (7)$$

Define-se agora a seguinte função de transferência:

$$\frac{V(s)}{I(s)} = Z(s) \quad (8)$$

Observe que esta função é similar a definição de uma resistência, isto é, uma relação entre tensão e corrente. Entretanto, diferentemente de uma resistência, esta função é aplicável a capacitores e indutores, e incorpora informações sobre o comportamento dinâmico do componente, uma vez representa da à equação diferencial equivalente. Esta particular função de transferência é chamada *Impedância*.

Discute-se agora o comportamento dos sistemas de 1ª ordem sem zeros para que as especificações de desempenho desses sistemas sejam definidas. Um sistema de 1ª ordem pode ser descrito pela função de transferência mostrada na Eq.(9). Se a entrada for um degrau unitário, onde $R(s)=1/s$, a transformada de Laplace da resposta ao degrau é $C(s)$, onde,

$$C(s) = R(s)G(s) = \frac{a}{s(s + a)} \quad (9)$$

Aplicando-se a transformada inversa, a resposta ao degrau pode ser expressa como

$$c(t) = c_f(t) + c_n(t) = 1 - e^{-at} \quad (10)$$

Onde o pólo de entrada na origem gerou a resposta forçada $c_f(t)=1$, e o pólo do sistema em $-a$ gerou a resposta natural $c_n(t)=-e^{-at}$. A Eq.(10) é representada pela fig.2.

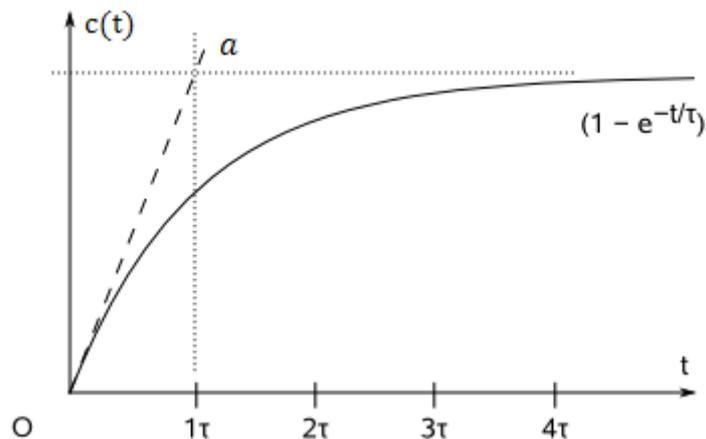


Fig. 2: Resposta de um sistema de 1ª ordem por um degrau unitário

Examina-se agora o significado do parâmetro a , o único parâmetro necessário para descrever a resposta transiente. Quando $t = 1/a$,

$$e^{-at} |_{t=1/a} = e^{-1} = 0,37 \quad (11)$$

ou

$$c(t) |_{t=1/a} = 1 - e^{-at} |_{t=1/a} = 1 - 0,37 = 0,63 \quad (12)$$

Utilizam-se as equações 10, 11 e 12 para definir as três especificações da resposta transiente.

Denomina-se o fator $1/a$ *constante de tempo* da resposta pela Eq.(11) a constante de tempo e^{-at} decair para 37% de seu valor inicial.

O inverso da constante de tempo possui as unidades (1/segundo), ou freqüência. Assim, pode-se chamar o parâmetro a de *freqüência exponencial*. Assim a constante de tempo pode ser considerada uma especificação da resposta transiente para um sistema de 1ª ordem, uma vez que ela está relacionada à velocidade com a qual o sistema responde a entrada em degrau.

O tempo de subida é definido como o tempo necessário para que a forma de onda partindo de 10% de seu valor final atinja 90% desse valor. O tempo de subida é obtido resolvendo-se a Eq.(10) para a diferença no tempo entre $c(t)=0,9$ e $c(t)=0,1$. Portanto,

$$T_r = \frac{2,31}{a} - \frac{0,11}{a} = \frac{2,2}{a} \quad (13)$$

O tempo de assentamento é definido como o tempo para a resposta alcançar uma faixa de valores de 2% em torno de seu valor final e ali permanecer. Fazendo $c(t)=0,98$ na Eq.(10) resolvendo o tempo, t , obtém-se o tempo de assentamento como sendo

$$T_s = \frac{4}{a} \quad (14)$$

Comparativamente a simplicidade de um sistema de 1ª, um sistema de 2ª ordem exiba uma ampla faixa de respostas, as quais devem ser descritas matematicamente e analisadas fisicamente. Enquanto a variação de um parâmetro de 1ª ordem simplesmente altera a velocidade da resposta, as variações nos parâmetros de um sistema de 2ª ordem podem alterar a forma da resposta. Por exemplo, um sistema de 2ª ordem pode apresentar características muito similares a um sistema de 1ª ordem ou, dependendo dos valores de seus elementos, apresentar oscilações puras ou amortecidas para uma resposta transiente. A ampla faixa de respostas de um sistema de 2ª ordem pode ser deduzida do diagrama de blocos da fig.3 para uma entrada degrau.

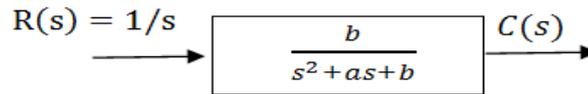


Fig. 3: Diagrama de bloco de um sistema de 2ª ordem geral

Existem duas grandezas que podem ser utilizadas para descrever as características da resposta transiente de segunda ordem da mesma forma que as constantes de tempo descrevem a resposta dos sistemas de primeira ordem. As duas frequências são denominadas frequência natural e fração de amortecimento. Deve-se, assim, defini-las formalmente.

A frequência natural de um sistema de segunda ordem é a frequência de oscilação do sistema sem amortecimento. Por exemplo, a frequência de oscilação para um circuito RLC em série sem a resistência será igual à frequência natural.

A fração de amortecimento, ζ , é uma grandeza cuja definição pode ser estabelecida de modo a comparar a frequência do decaimento exponencial da envoltória à frequência natural. Também o inverso dessa dessas frequências, que é proporcional à relação do período natural e a constante de tempo exponencial, permanece o mesmo independente da base do tempo.

Defini-se a fração de amortecimento, ζ , como sendo:

$$\zeta = \frac{\text{Frequência exponencial de decaimento}}{\text{Frequência natural(rad/s)}} = \frac{1}{2\pi} \frac{\text{Período natural(s)}}{\text{Constante de tempo exponencial}}$$

Revisa-se, agora, a descrição do sistema de segunda ordem de modo a refletir as novas definições. O sistema de segunda ordem geral mostrado na fig.3 pode ser transformado para mostrar as grandezas ζ e ω_n .

A resposta para esse tipo de sistema pode ser de quatro tipos:

- Resposta sem amortecimento
- Resposta subamortecida
- Resposta criticamente amortecida
- Resposta super amortecida

A natureza da resposta para os circuitos estudados será dependente dos valores de resistência, indutância e capacitância. Tais valores terão influência sobre a frequência natural do sistema (ω_n) e o fator de amortecimento (ζ) do mesmo.

Para os sistemas subamortecidos outros parâmetros como o tempo de pico (T_p), o sobrevalor percentual (%SP), o tempo de assentamento (T_s) e o tempo de subida (T_r) serão estimados e comentados no decorrer da análise.

Considere o sistema geral:

$$G(s) = \frac{b}{s^2 + as + b} \quad (15)$$

Sem o amortecimento os pólos estariam sobre o eixo $j\omega$ e a resposta seria uma senóide não amortecida. Para os pólos serem imaginários puros, $a=0$. Portanto,

$$G(s) = \frac{b}{s^2 + b} \quad (16)$$

Por definição, a freqüência natural, ω_n , é a freqüência de oscilação desse sistema. Como os pólos desse sistema estão sobre o eixo $j\omega$ em $\pm j\sqrt{b}$,

$$\omega_n = \sqrt{b} \quad (17)$$

Assim,

$$b = \omega_n^2 \quad (18)$$

E,

$$\zeta = \frac{|\sigma|}{\omega_n} = \frac{a/2}{\omega_n} \quad (19)$$

De onde se obtém:

$$a = 2\zeta\omega_n \quad (20)$$

A função de transferência de segunda ordem geral, finalmente, apresenta a forma

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (21)$$

A resposta superamortecida possui um pólo na origem, referente à entrada em degrau unitário, e dois pólos reais decorrentes do sistema. O pólo de entrada na origem gera uma resposta forçada constante; cada um dos dois pólos sobre o eixo real gera uma resposta natural exponencial, cuja freqüência é correspondente à localização do pólo. Assim a resposta superamortecida possui dois pólos reais em $-\sigma_1$ e $-\sigma_2$ e sua resposta natural é,

$$c(t) = K_1 e^{-\sigma_1 t} + K_2 e^{-\sigma_2 t} \quad (22)$$

Para essa resposta a fração de amortecimento é $\zeta > 1$.

A resposta subamortecida possui dois pólos complexos em $-\sigma_d \pm j\omega_d$, sua resposta natural é uma senóide amortecida com uma envoltória exponencial cuja constante de tempo é igual ao inverso da parte real do pólo. A freqüência em radianos por segundo da senóide é igual à parte imaginária dos pólos, isto é,

$$c(t) = Ae^{-\sigma_d t} \cos(\omega_d t - \phi) \quad (23)$$

Para essa resposta a fração de amortecimento é $0 < \zeta < 1$.

A resposta não-amortecida possui dois pólos imaginários em $\pm j\omega_1$, sua resposta natural é uma senóide não-amortecida com freqüência em radianos por segundo da senóide é igual à parte imaginária dos pólos, isto é,

$$c(t) = \cos(\omega_1 t - \phi) \quad (24)$$

Para essa resposta a fração de amortecimento é $\zeta = 0$.

A resposta criticamente amortecida possui dois pólos reais em $-\sigma_1$ e sua resposta natural é uma exponencial cuja constante de tempo é igual ao inverso da coordenada de localização do pólo. O outro termo é o produto do tempo t por uma exponencial com constante de tempo igual ao inverso da coordenada de localização do pólo, isto é,

$$c(t) = K_1 e^{-\sigma_1 t} + K_2 t e^{-\sigma_1 t} \quad (25)$$

Para essa resposta a fração de amortecimento é $\zeta = 1$.

A fig.4 mostra como se distribui os pólos dos sistemas de segunda ordem:

- I. Raízes complexas e resposta subamortecida.
- II. Raízes reais e iguais e resposta criticamente amortecida.
- III. Raízes reais e resposta superamortecida.
- IV. Raízes imaginárias e resposta não amortecida.

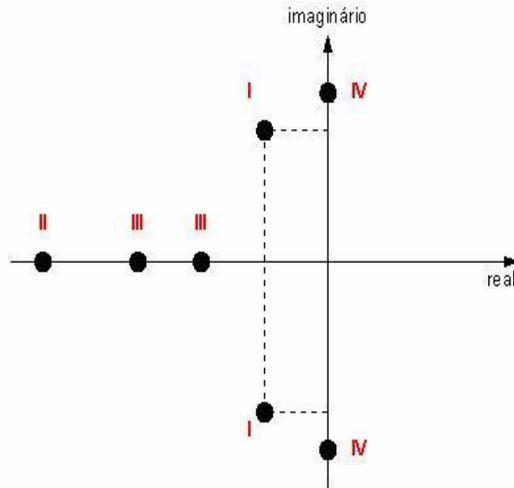


Fig. 4: Representação dos pólos de um sistema de segunda ordem

As respostas para vários valores de ζ com o sistema inicialmente em repouso também são mostradas na fig.5. Exceto para certas aplicações onde oscilações não podem ser toleradas, a resposta transiente deve ser suficientemente rápida e amortecida. Logo, ζ deve estar entre 0,4 e 0,8. Valores inferiores a 0,4 levam a uma excessiva amplitude do primeiro pico de resposta, e valores superiores a 0,8 apresentam respostas muito lentas. Quando $\zeta = 1,0$, o sistema apresenta a resposta mais rápida possível sem exceder o valor do estado estacionário.

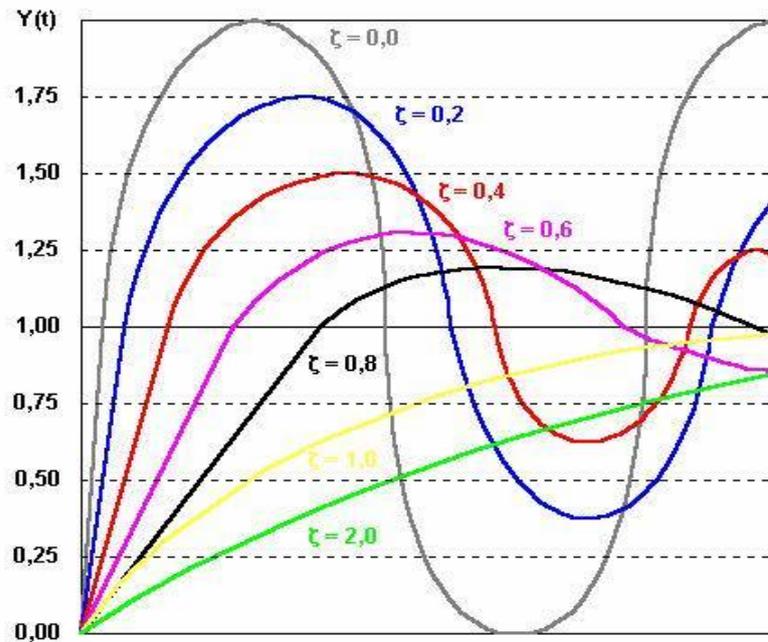


Fig. 5: Respostas a sistemas de segunda ordem co diferentes frações de amortecimento

Para os sistemas de segunda ordem subamortecido, utilizando a resposta ao degrau do sistema de segunda ordem genérico da Eq.(21). A transformada da resposta, $C(s)$, é a transformada da entrada multiplicada pela função de transferência, isto é,

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2 s + K_3}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (26)$$

Onde se admite que $\zeta < 1$. Uma expansão por frações parciais, fornece

$$C(s) = \frac{1}{s} - \frac{(s\zeta\omega_n) + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_n^2(1-\zeta^2)} \quad (27)$$

Aplicando-se a transformada de Laplace inversa, obtém-se

$$c(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\omega_n t} \cos(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t - \phi) \quad (28)$$

Onde $\phi = \tan^{-1}(\zeta/\sqrt{1-\zeta^2})$.

PROCEDIMENTOS EXPERIMENTAIS

Visando compreender o comportamento dos sistemas de 1ª e 2ª ordem dada uma excitação definida na entrada do sistema, foram realizadas diferentes montagens experimentais, nas quais foram utilizados os seguintes itens:

- Gerador de função;
- Osciloscópio de 2 canais;
- Placa analógica AB80 (referente ao circuito RLC);
- Placa analógica AB82 (utilizado o potenciômetro).

Para os sistemas de 1ª ordem, foi montado um circuito RC série, conforme mostrado genericamente pela fig.6.

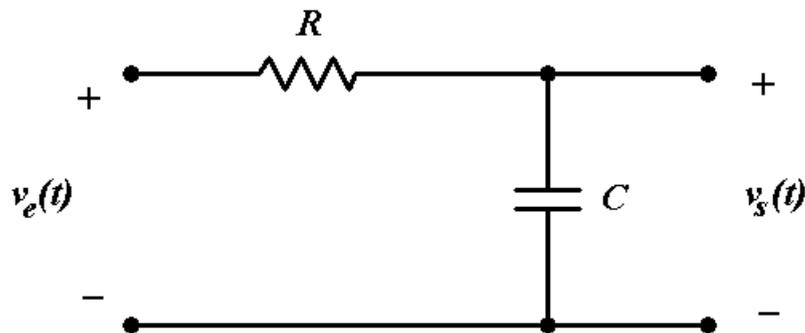


Fig. 6: Circuito RC genérico utilizado no estudo de sistemas de 1ª ordem

Onde $v_e(t)$ é a tensão de entrada e $v_s(t)$ é a tensão no capacitor e representa a saída do sistema. Experimentalmente a entrada foi dada a partir do gerador de função, onde foi utilizado um trem de pulsos com *duty cycle* de 50%, pois desta forma podia-se ver repetidamente a resposta do sistema na tela do osciloscópio, uma vez que o canal 1 do osciloscópio detecta o sinal de entrada, enquanto que o canal 2 mostra o sinal de saída do circuito. Em seguida, foi variado a resistência, mantendo a capacitância fixa no sistema, para averiguação de prováveis mudanças ocorridas na saída. Posteriormente, mantendo o resistor fixo foi variado o capacitor para observação do sinal de saída.

Em concomitância com esta análise realizada no circuito físico foi gerado um programa no *software* MATLAB para uma função de 1ª ordem e plotado os gráficos, dada excitação de entrada conhecida, de modo a comparar com o circuito montado no laboratório.

Para os sistemas de 2ª ordem, foi montado um circuito RLC série, conforme mostrado genericamente pela fig.7.

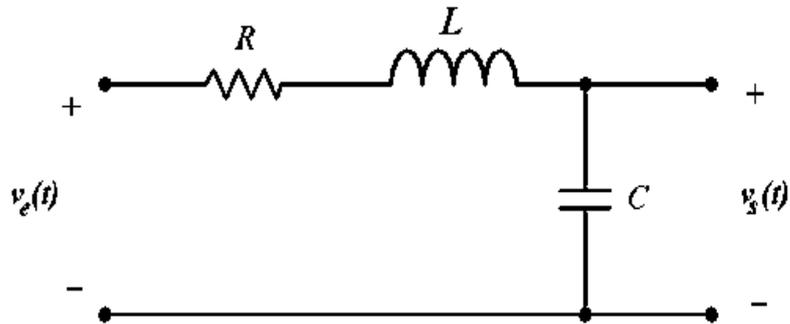


Fig. 7: RLC genérico utilizado no estudo de sistemas de 2ª ordem

Onde $v_e(t)$ é a tensão de entrada e $v_s(t)$ é a tensão no capacitor e representa a saída do sistema. Experimentalmente a entrada foi dada a partir do gerador de função, onde foi utilizado um trem de pulsos com *duty cycle* de 50%, pois desta forma podia-se ver repetidamente a resposta do sistema na tela do osciloscópio, uma vez que o canal 1 do osciloscópio detecta o sinal de entrada, enquanto que o canal 2 mostra o sinal de saída do circuito.

A resistência foi variada, mantendo a capacitância e a indutância fixas, para análise da relação entre entrada e saída do sistema. Em seguida, foi variada a capacitância, mantendo a indutância e a resistência fixas, para análise. E, por fim, foi variada a indutância do circuito, mantendo a capacitância e a resistência fixas, para também análise da relação entre entrada e saída, salientando para cada caso foi visualizado o gráfico plotado na tela do osciloscópio.

Em concomitância com esta análise realizada no circuito físico foi gerado um programa no *software* MATLAB para uma função de 2ª ordem e plotado os gráficos, dada excitação de entrada conhecida, de modo a comparar com o circuito montado no laboratório.

RESULTADOS E DISCUSSÕES

A primeira parte da prática consistia da análise da resposta de um circuito RC, que é um sistema de 1ª ordem, a uma entrada em degrau. Sabe-se que a função de transferência para um sistema desse tipo é dada por:

$$G(s) = \frac{1}{RCs + 1}$$

A resposta temporal para esse sistema quando a entrada é um degrau é dada por:

$$c(t) = 1 - e^{-at}$$

O primeiro passo foi estudar o efeito da variação da resistência na resposta do sistema. O circuito analisado inicialmente teve os seguintes valores:

Tabela 1: Valores dos componentes utilizados na prática

Resistência	Capacitância
1100 Ω	0,1 μF

A fig.8 mostra a resposta ao degrau para um sistema de 1º ordem, especificado com os valores acima, calculada pelo software MATLAB.

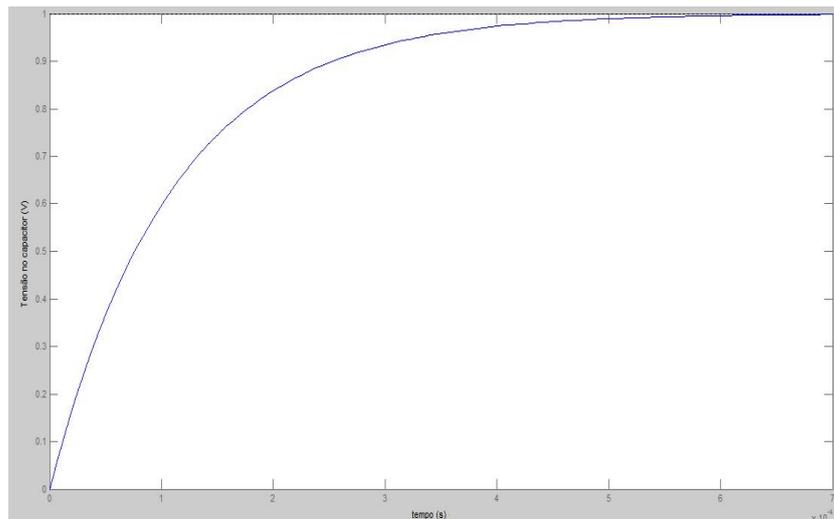


Fig. 8: Resposta mostrada pelo MATLAB

A resposta ao degrau desse sistema é dada por $V_s(t) = 1 - e^{-9090,91t}$ V. Para essa resposta tem-se os seguintes parâmetros:

- Constante de tempo: $\frac{1}{9090,91} = 1,1 \times 10^{-4} \text{ s}$;
- Tempo de subida: $T_r = \frac{2,2}{9090,91} = 2,42 \times 10^{-4} \text{ s}$;
- Tempo de assentamento: $T_s = \frac{4}{9090,91} = 4,4 \times 10^{-4} \text{ s}$.

A fig.9 mostra a entrada e a resposta conseguida na prática para a implementação desse sistema:

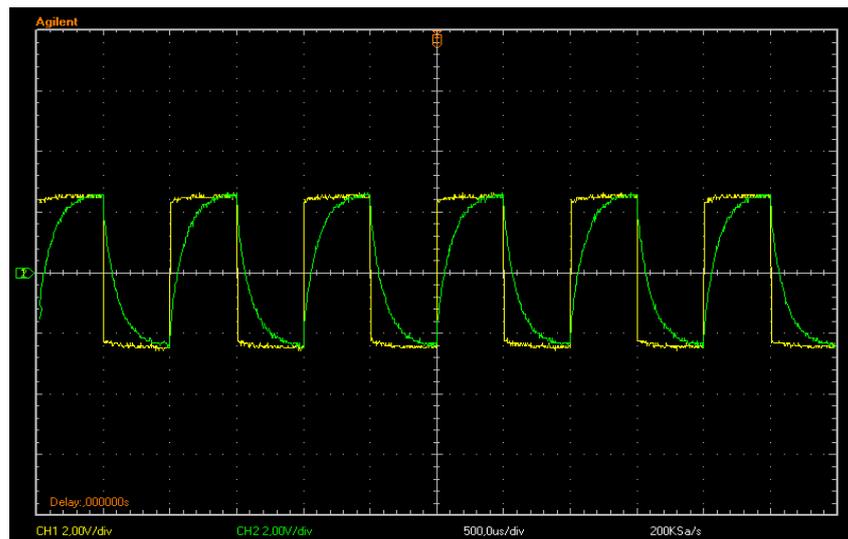


Fig. 9: Formas de onda da entrada (amarelo) e da saída (verde) do sistema de 1ª ordem para R= 1,1kΩ e C=0,1μF

Pode-se perceber que a resposta na prática é condizente com o que foi previsto teoricamente.

No segundo circuito analisado o valor da resistência foi mudado para R= 600 Ω enquanto os valores da capacitância e a entrada se mantiveram as mesmas.

Tabela 2: Valores dos componentes utilizados na prática

Resistência	Capacitância
600 Ω	0,1μF

A fig.10 mostra a resposta ao degrau para um sistema de 1º ordem, especificado com os valores acima, calculada pelo software MATLAB.

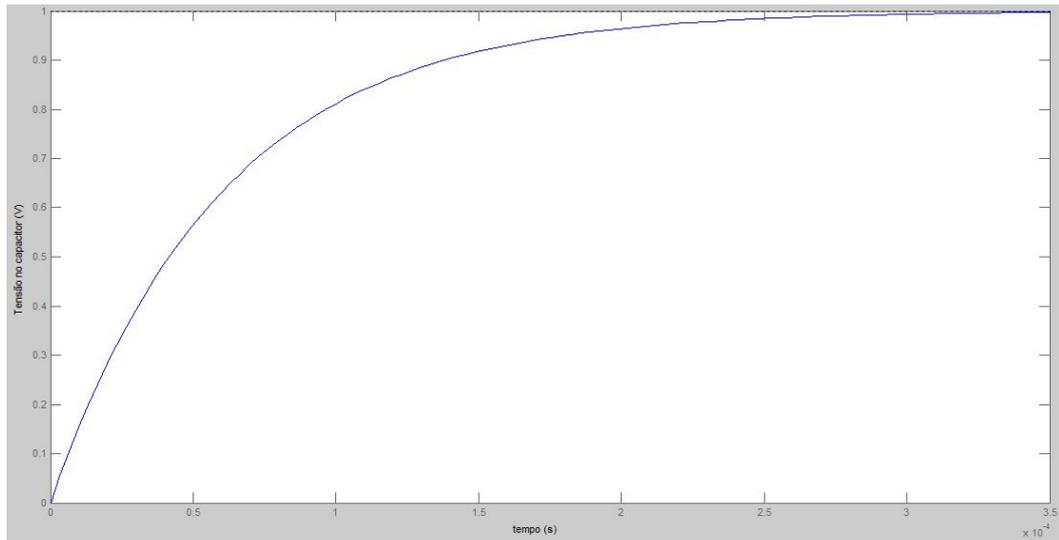


Fig. 10: Resposta mostrada pelo MATLAB

A resposta ao degrau desse sistema é dada por $V_s(t) = 1 - e^{-16666,67t}$ V. Para essa resposta temos os seguintes parâmetros:

- Constante de tempo: $\frac{1}{1666,67} = 6 \times 10^{-5}$ s;
- Tempo de subida: $T_r = \frac{2,2}{16666,67} = 1,32 \times 10^{-4}$ s;
- Tempo de assentamento: $T_s = \frac{4}{16666,67} = 2,4 \times 10^{-4}$ s.

A fig.11 mostra a entrada e a resposta conseguida na prática para a implementação desse circuito:

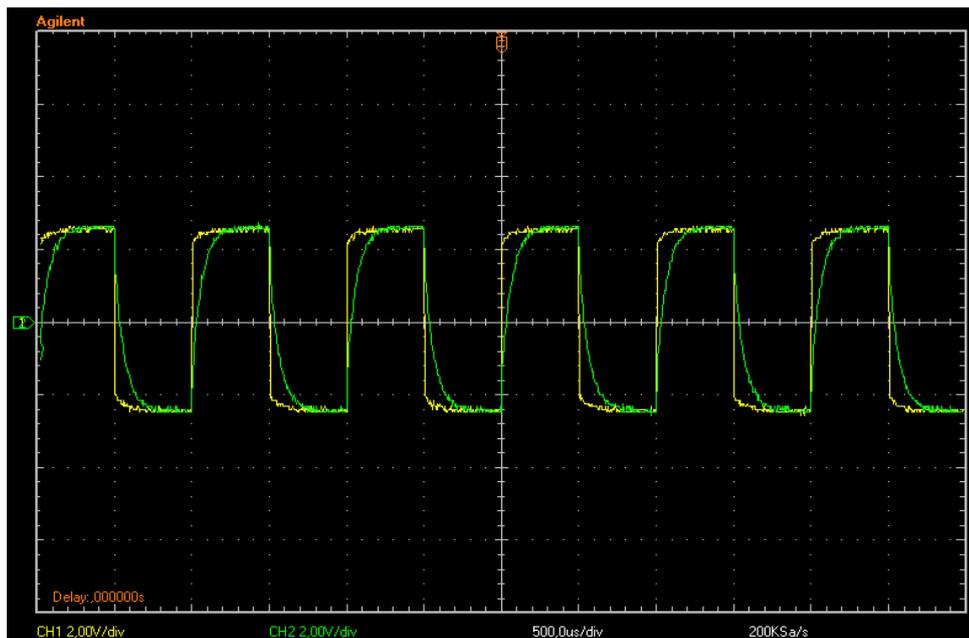


Fig. 11: Formas de onda da entrada (amarelo) e da saída (verde) do sistema de 1ª ordem para $R= 600\Omega$ e $C=0,1\mu\text{f}$

Novamente a resposta prática é semelhante àquela prevista na teoria.

O terceiro sistema analisado foi o circuito RC com os seguintes valores:

Tabela 3: Valores dos componentes utilizados na prática

Resistência	Capacitância
100 Ω	0,1 μF

A fig.12 mostra a resposta ao degrau para um sistema de 1º ordem, especificado com os valores acima, calculada pelo software MATLAB.

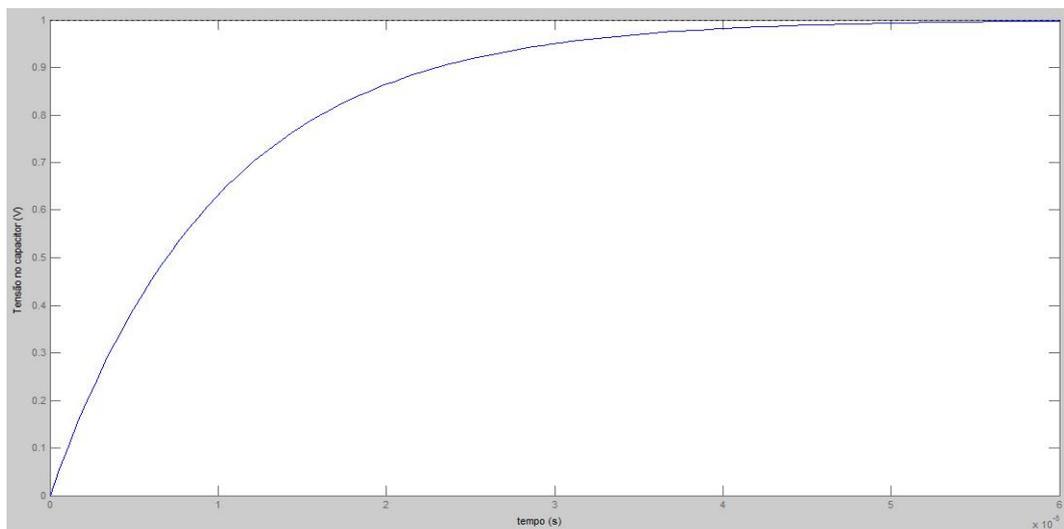


Fig. 12: Resposta mostrada pelo MATLAB

A resposta ao degrau desse sistema é dada por $V_s(t) = 1 - e^{-100000t}$ V. Para essa resposta temos os seguintes parâmetros:

- Constante de tempo: $\frac{1}{100000} = 1 \times 10^{-5}$ s;
- Tempo de subida: $T_r = \frac{2,2}{100000} = 2,2 \times 10^{-5}$ s;
- Tempo de assentamento: $T_s = \frac{4}{100000} = 4 \times 10^{-5}$ s.

A fig.13 mostra a entrada e a resposta conseguida na prática para a implementação desse circuito:

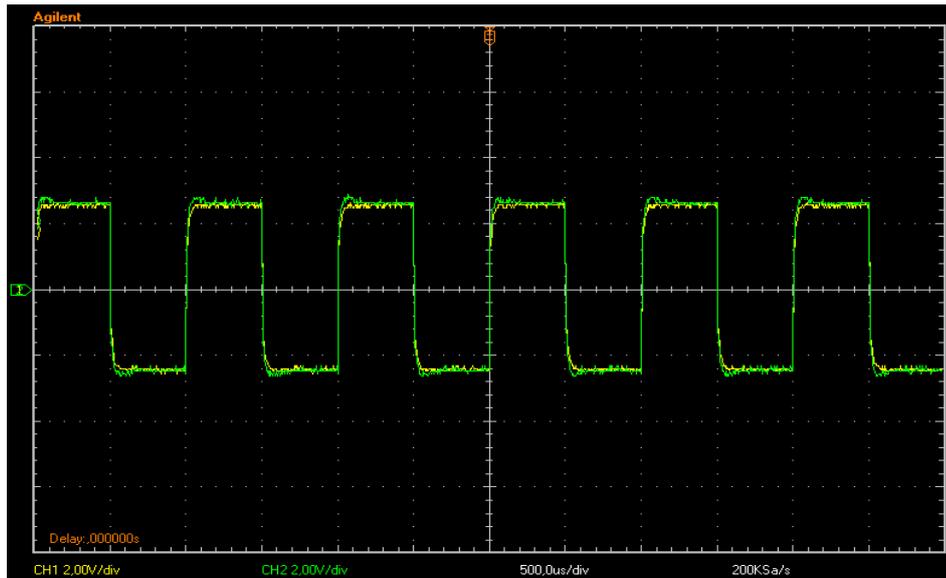


Fig. 13: Formas de onda da entrada (amarelo) e da saída (verde) do sistema de 1ª ordem para $R= 100\Omega$ e $C=0,1\mu\text{f}$

A resposta é semelhante à calculada teoricamente. Nesse ponto da análise pode-se chegar à seguinte conclusão: o valor da resistência para o sistema de 1ª ordem, no caso um circuito RC, influi no tempo de resposta do sistema. Quanto menor o valor da resistência mais rápida é a resposta do sistema, isso fica comprovado pela análise das constantes de tempo calculadas anteriormente que decrescem de valor com a diminuição de R aumentando a velocidade de resposta do sistema. Idealmente uma resistência nula forneceria uma resposta instantânea a uma determinada entrada.

Agora é possível mudar o enfoque da análise para o efeito do valor da capacitância no comportamento do sistema de 1º ordem (circuito RC). Têm-se para o circuito da fig.6, uma resistência fixa de 1,1 kΩ, enquanto os valores de C serão variados. O primeiro caso dessa análise tem:

Tabela 4: Valores dos componentes utilizados na prática

Resistência	Capacitância
1,1 kΩ	0,1μF

A fig.14 mostra a resposta ao degrau para um sistema de 1º ordem, especificado com os valores acima, calculada pelo software MATLAB.

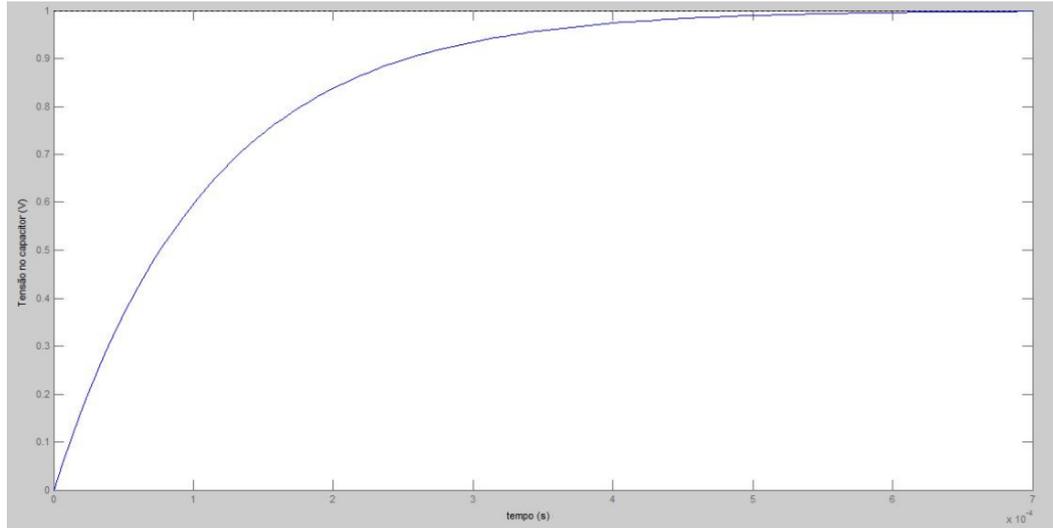


Fig. 14: Resposta mostrada pelo MATLAB

A resposta ao degrau desse sistema é dada por $V_s(t) = 1 - e^{-9090,91t}$ V. Para essa resposta temos os seguintes parâmetros:

- Constante de tempo: $\frac{1}{9090,91} = 1,1 \times 10^{-4}$ s;
- Tempo de subida: $T_r = \frac{2,2}{9090,91} = 2,42 \times 10^{-4}$ s;
- Tempo de assentamento: $T_s = \frac{4}{9090,91} = 4,4 \times 10^{-4}$ s.

A fig.15 mostra a entrada e a resposta conseguida na prática para a implementação desse sistema:

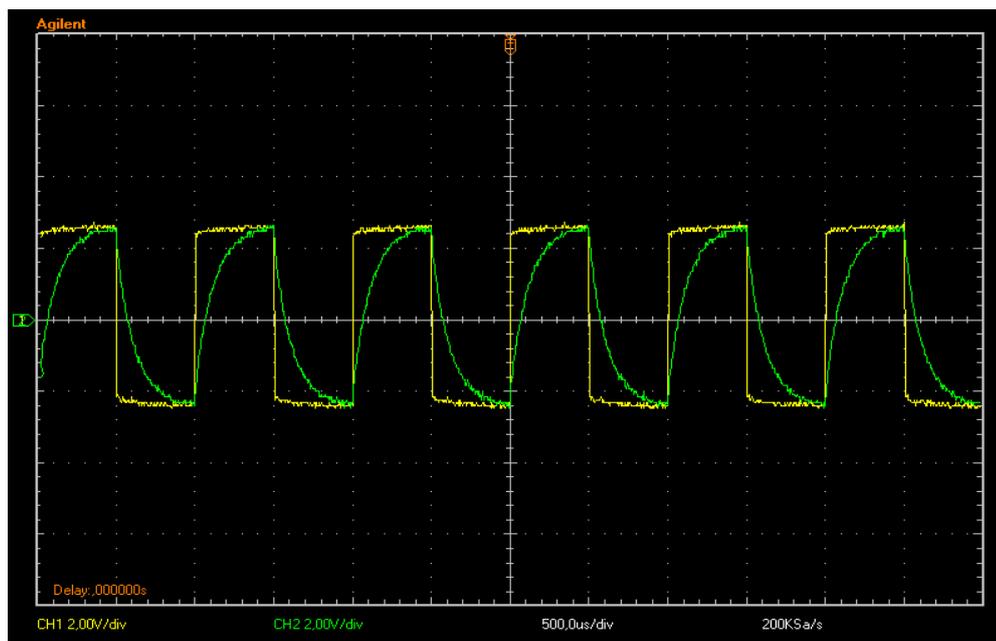


Fig. 15: Formas de onda da entrada(amarelo) e da saída (verde) do sistema de 1ª ordem para $R= 1,1k\Omega$ e $C=0,1\mu F$

A resposta calculada tem a mesma forma da que foi visualizada no osciloscópio durante a prática.

Agora o valor da capacitância será mudado e observar-se-á mudança na resposta do sistema. Os valores usados para o segundo circuito foram:

Tabela 5: Valores dos componentes utilizados na prática

Resistência	Capacitância
1,1 kΩ	2,2nF

A fig.16 mostra a resposta ao degrau para um sistema de 1º ordem, especificado com os valores acima, calculada pelo software MATLAB.

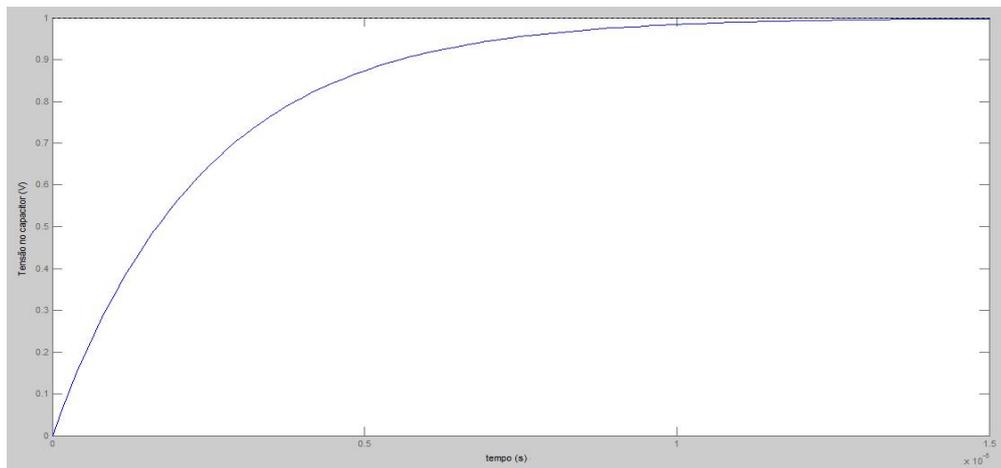


Fig. 16: Resposta mostrada pelo MATLAB

A resposta ao degrau desse sistema é dada por $V_s(t) = 1 - e^{-413,22 \times 10^3 t}$ V. Para essa resposta temos os seguintes parâmetros:

- Constante de tempo: $\frac{1}{413,22 \times 10^3} = 2,42 \times 10^{-6}$ s;
- Tempo de subida: $T_r = \frac{2,2}{413,22 \times 10^3} = 5,32 \times 10^{-6}$;
- Tempo de assentamento: $T_s = \frac{4}{413,22 \times 10^3} = 9,68 \times 10^{-6}$ s.

A fig.17 mostra a entrada e a resposta conseguida na prática para a implementação desse sistema:

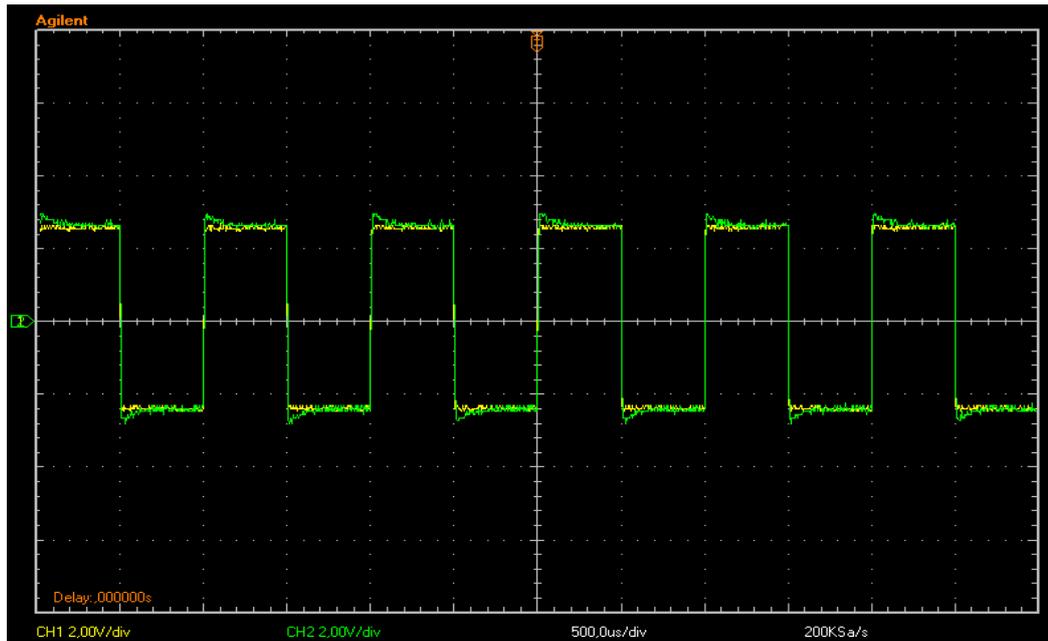


Fig. 17: Formas de onda da entrada (amarelo) e da saída (verde) do sistema de 1ª ordem para $R= 1,1k\Omega$ e $C=2,2 nF$

A resposta obtida experimentalmente é semelhante à resposta prevista teoricamente. Com a análise dos casos anteriores percebe-se que o tempo de resposta diminui com a diminuição do valor da capacitância isso ocorre por que o capacitor demora menos tempo para carregar, tornando assim a resposta mais imediata.

Agora a análise será focada nos sistemas de 2ª ordem, representados aqui pelos circuitos RLC.

O primeiro caso estudado é o da variação da resistência enquanto os valores de indutância e capacitância se mantêm constantes. Os primeiros valores utilizados foram os seguintes:

Tabela 6: Valores dos componentes utilizados na prática

Resistência	Indutância	Capacitância
2 k Ω	65mH	0,01 μF

A fig.18 mostra a resposta calculada pelo MATLAB para um circuito de 2ª ordem com as especificações citadas.

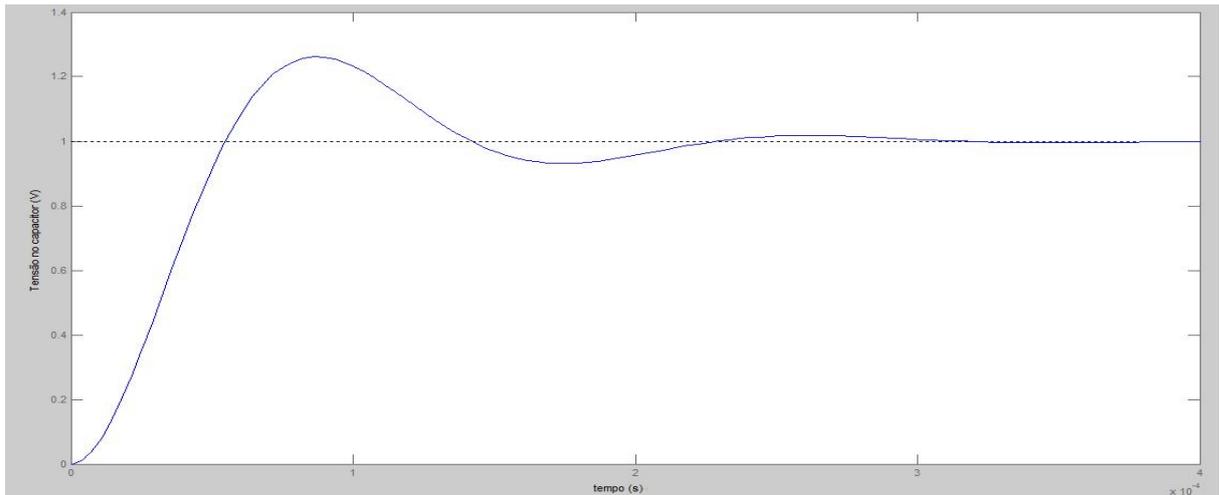


Fig. 18: Resposta mostrada pelo MATLAB

A resposta obtida com o MATLAB mostra a resposta de um sistema subamortecido, deve-se agora analisar as curvas reais obtidas no laboratório e analisar a veracidade desse fato. As curvas da fig.19 foram obtidas em laboratório usando um circuito com os mesmos valores já citados.

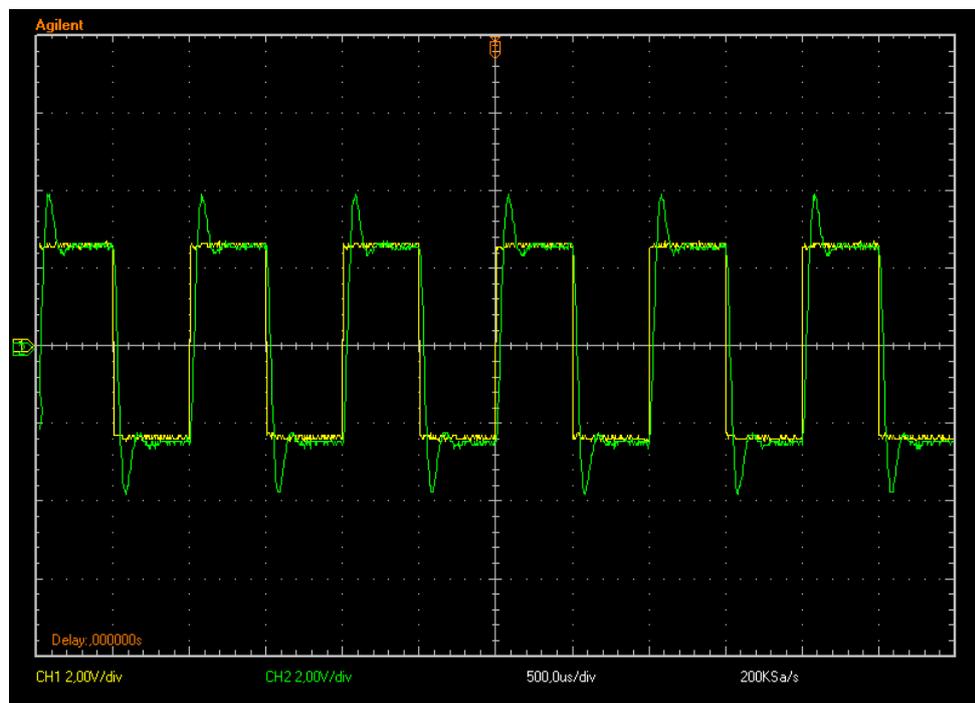


Fig. 19: Entrada (amarelo) e saída (verde) do sistema vistas no osciloscópio

Pode-se perceber que a resposta do sistema é realmente subamortecida. Agora é possível calcular alguns parâmetros referentes à resposta desse sistema. São eles:

- Frequência Natural (ω_n):

$$\omega_n = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 39223,23 \text{ rad/s}$$

- Fator de amortecimento (ζ):

$$\zeta = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} = 0,392$$

- Tempo de pico (T_p):

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} = 8,706 \times 10^{-5} \text{ s}$$

- Tempo de assentamento (T_s):

$$T_s = \frac{4}{\zeta \omega_n} = 2,602 \times 10^{-4} \text{ s}$$

- Sobrevalor percentual (%SP):

$$\%SP = e^{-(\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2})} \times 100 = 26,22 \%$$

- Tempo de subida (T_r): usando um polinômio que aproxima a curva de tempo de subida normalizado em função da fração de amortecimento, têm-se:

$$\omega_n T_r = 1,76\zeta^3 - 0,417\zeta^2 + 1,039\zeta + 1$$

$$T_r = 3,695 \times 10^{-5} \text{ s}$$

Agora se diminui o valor da resistência e observa-se o impacto dessa ação sobre a resposta do sistema. Os valores para o circuito agora são:

Tabela 7: Valores dos componentes utilizados na prática

Resistência	Indutância	Capacitância
1,5 k Ω	65mH	0,01 μ F

A fig.20 mostra a resposta calculada pelo MATLAB para um circuito de 2ª ordem com essas especificações.

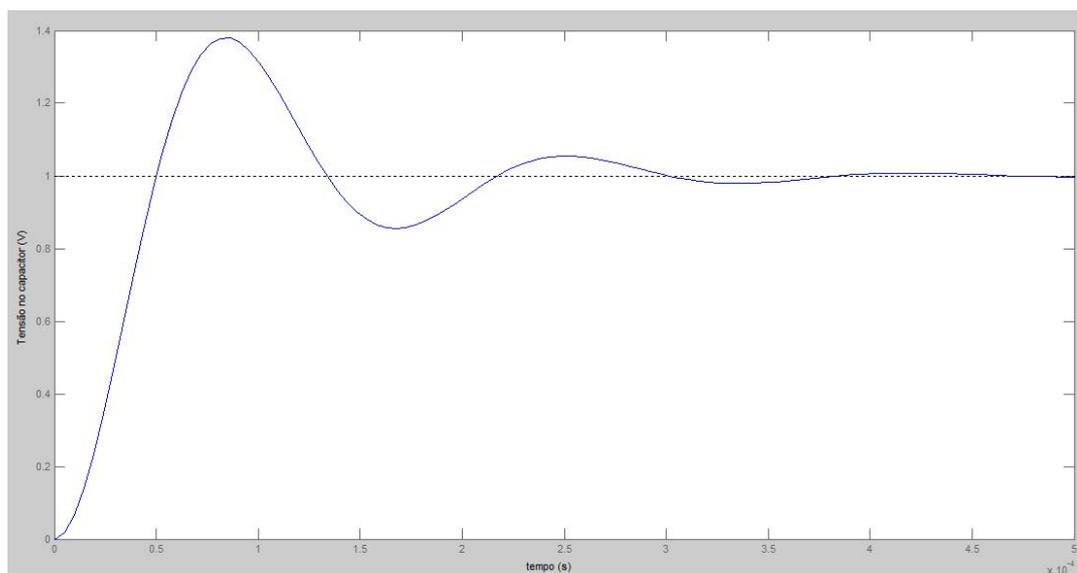


Fig. 20: Resposta mostrada pelo MATLAB

A resposta é novamente do tipo subamortecida, porém pode-se perceber uma maior oscilação da resposta antes de atingir seu valor final. A fig.21 mostra a entrada usada e a resposta conseguida em laboratório para a implementação do circuito em questão.

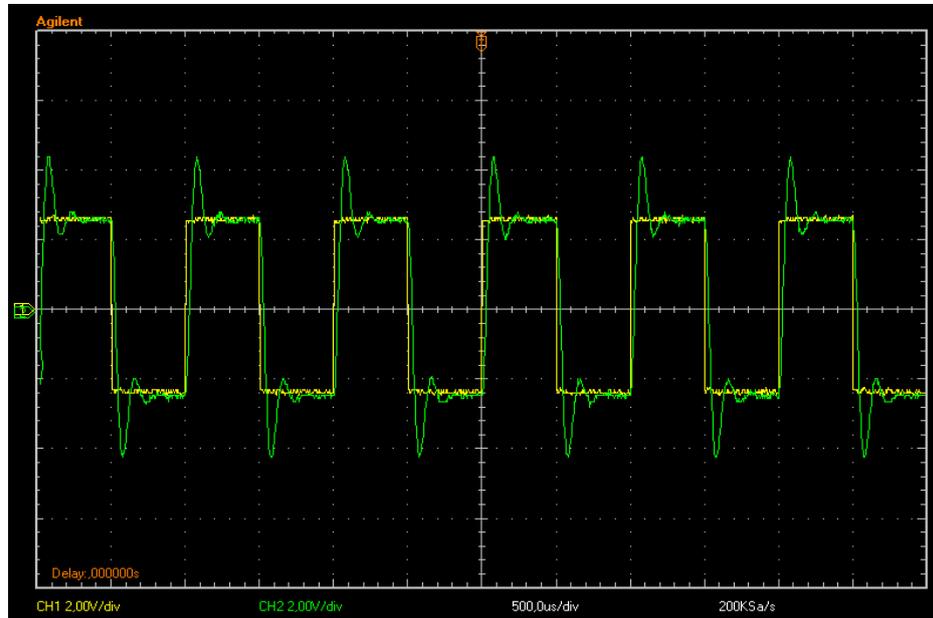


Fig. 21: Entrada (amarela) e saída (verde) vistas no osciloscópio

Mais uma vez verificou-se que a resposta do sistema é realmente subamortecida. Agora é possível calcular os mesmos parâmetros calculados para o circuito anterior. São eles:

- Freqüência Natural (ω_n):

$$\omega_n = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 39223,23 \text{ rad/s}$$

- Fator de amortecimento (ζ):

$$\zeta = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} = 0,2942$$

- Tempo de pico (T_p):

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} = 8,38 \times 10^{-5} \text{ s}$$

- Tempo de assentamento (T_s):

$$T_s = \frac{4}{\zeta \omega_n} = 3,4664 \times 10^{-4} \text{ s}$$

- Sobrevalor percentual (%SP):

$$\%SP = e^{-(\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2})} \times 100 = 38,02 \%$$

- Tempo de subida (T_r): usando um polinômio que aproxima a curva de tempo de subida normalizado em função da fração de amortecimento, têm-se:

$$\omega_n T_r = 1,76\zeta^3 - 0,417\zeta^2 + 1,039\zeta + 1$$

$$T_r = 3,3511 \times 10^{-5} \text{ s}$$

Agora se diminui mais ainda o valor da resistência e observa-se o impacto dessa ação sobre a resposta do sistema. Os valores para o circuito agora são:

Tabela 8: Valores dos componentes utilizados na prática

Resistência	Indutância	Capacitância
1,0 k Ω	65mH	0,01 μ F

A fig.22 mostra a resposta calculada pelo MATLAB para um circuito de 2ª ordem com essas especificações.

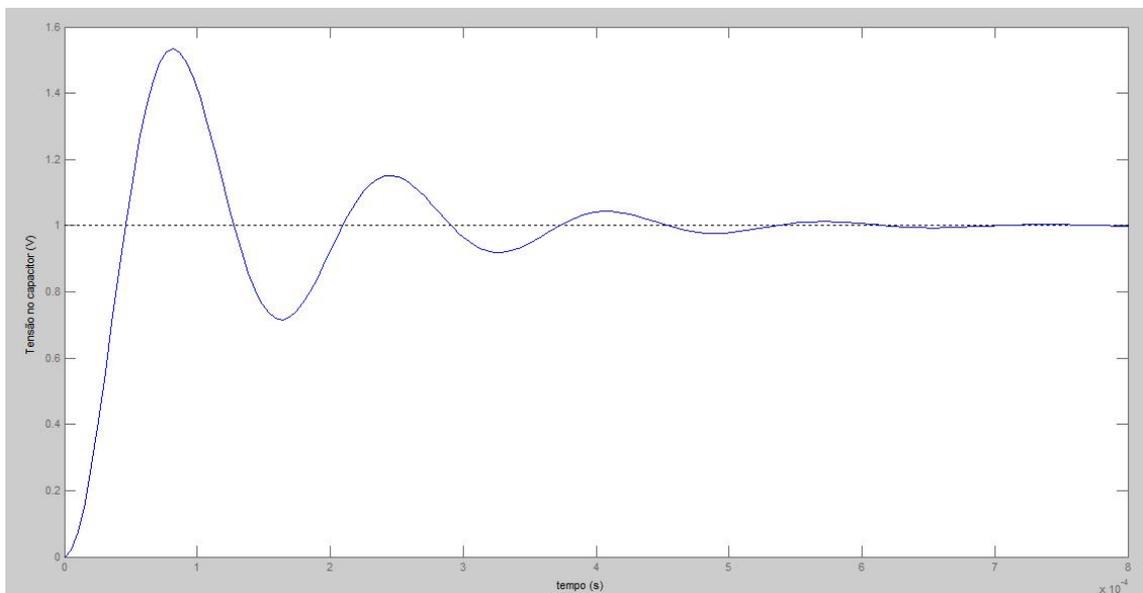


Fig. 22: Resposta mostrada pelo MATLAB

A resposta continua do tipo subamortecida, porém pode-se perceber uma oscilação ainda maior da resposta antes de atingir seu valor final se comparada ao circuito anterior. A fig.23 mostra a entrada usada e a resposta conseguida em laboratório para a implementação do circuito em questão.

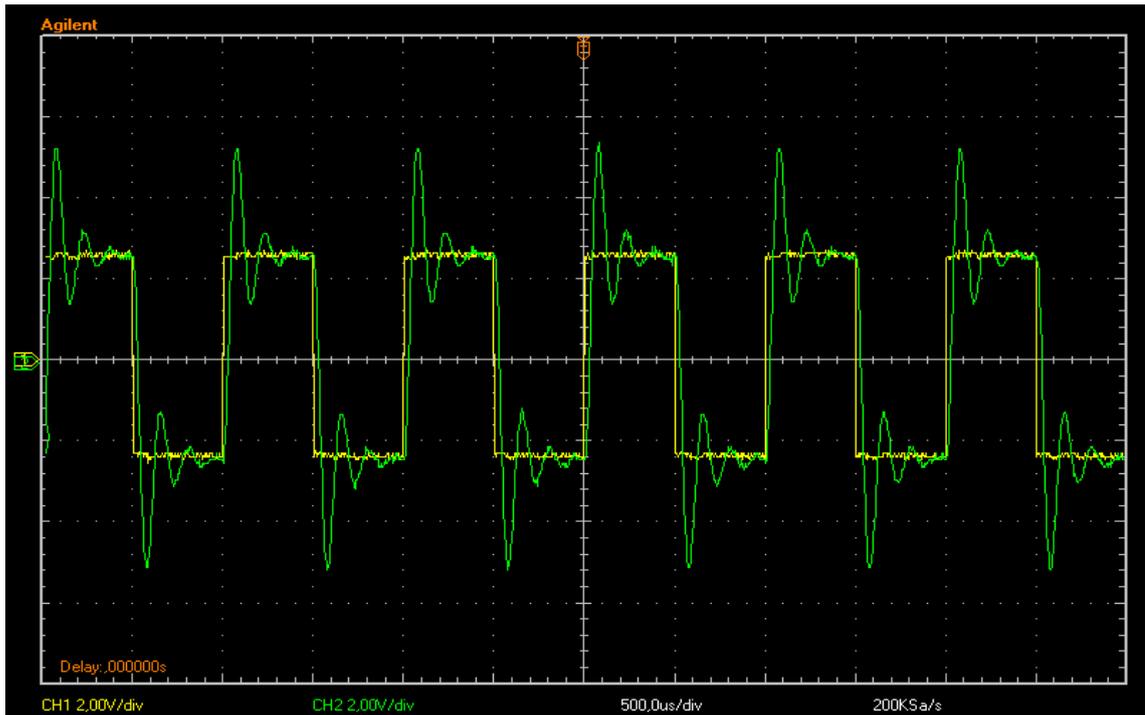


Fig. 23: Entrada (amarela) e saída (verde) vistas no osciloscópio

Novamente verificou-se que a resposta do sistema é subamortecida. Agora é possível calcular os mesmos parâmetros calculados para os circuitos anteriores. São eles:

- Frequência Natural (ω_n):

$$\omega_n = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 39223,23 \text{ rad/s}$$

- Fator de amortecimento (ζ):

$$\zeta = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} = 0,1961$$

- Tempo de pico (T_p):

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} = 8,168 \times 10^{-5} \text{ s}$$

- Tempo de assentamento (T_s):

$$T_s = \frac{4}{\zeta \omega_n} = 5,2004 \times 10^{-4} \text{ s}$$

- Sobrevalor percentual (%SP):

$$\%SP = e^{-(\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2})} \times 100 = 53,352 \%$$

- Tempo de subida (T_r): usando um polinômio que aproxima a curva de tempo de subida normalizado em função da fração de amortecimento, têm-se:

$$\omega_n T_r = 1,76\zeta^3 - 0,417\zeta^2 + 1,039\zeta + 1$$

$$T_r = 3,062 \times 10^{-5} \text{ s}$$

A análise dos três circuitos anteriores permite que se tirem as seguintes conclusões sobre o impacto da mudança da resistência num circuito RLC onde os valores de L e C são constantes. O valor da resistência está bastante ligado ao fator de amortecimento (ζ), que aumenta linearmente com o aumento da resistência, isso implica que o valor da resistência pode fazer com que o circuito mude a natureza da resposta de acordo com um aumento ou diminuição do valor desse componente resistivo. Para os sistemas subamortecidos a diminuição da resistência fortalece o caráter oscilatório da resposta e influencia fortemente nos parâmetros referentes a esse tipo de resposta, por exemplo, com a diminuição da resistência o tempo de pico (T_p) diminui, o tempo de assentamento (T_s) aumenta, o sobre valor percentual(%SP) aumenta e o tempo de subida (T_r) diminui. Para um caso ideal onde a resistência fosse nula a resposta do sistema seria puramente oscilatória, pois o fator de amortecimento seria nulo. Vale ressaltar que a mudança de R não altera a frequência natural (ω_n) do circuito.

Agora se estudará o efeito da mudança da capacitância C em um circuito RLC proposto nos procedimentos experimentais para valores de indutância (L) e resistência (R) constantes. Os primeiros valores adotados foram os seguintes:

Tabela 9: Valores dos componentes utilizados na prática

Resistência	Indutância	Capacitância
1,0 k Ω	65mH	0,01 μ F

A fig.24 mostra a resposta calculada pelo MATLAB para um circuito de 2ª ordem com essas especificações.

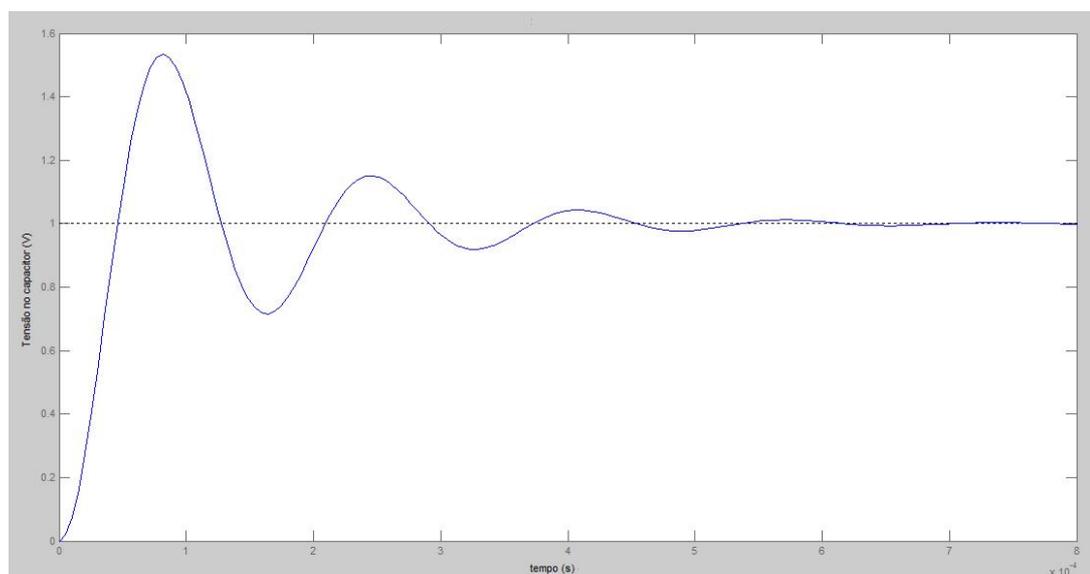


Fig. 24: Resposta mostrada pelo MATLAB

A resposta é do tipo subamortecida para esse valor de capacitância. A fig.25 mostra a entrada usada e a resposta conseguida em laboratório para a implementação do circuito em questão.

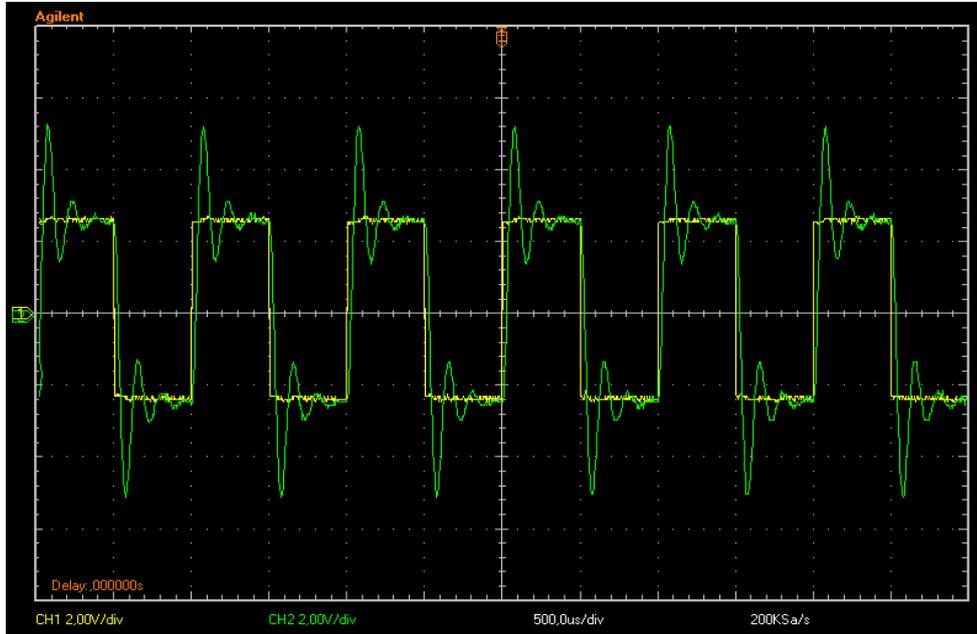


Fig. 25: Entrada (amarela) e saída (verde) vistas no osciloscópio

Devido à resposta ser do tipo subamortecida é possível calcular os mesmos parâmetros calculados para os circuitos subamortecidos anteriores. São eles:

- Freqüência Natural (ω_n):

$$\omega_n = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 39223,23 \text{ rad/s}$$

- Fator de amortecimento (ζ):

$$\zeta = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} = 0,1961$$

- Tempo de pico (T_p):

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} = 8,168 \times 10^{-5} \text{ s}$$

- Tempo de assentamento (T_s):

$$T_s = \frac{4}{\zeta \omega_n} = 5,2004 \times 10^{-4} \text{ s}$$

- Sobrevalor percentual (%SP):

$$\%SP = e^{-(\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2})} \times 100 = 53,352 \%$$

- Tempo de subida (T_r): usando um polinômio que aproxima a curva de tempo de subida normalizado em função da fração de amortecimento, têm-se:

$$\omega_n T_r = 1,76\zeta^3 - 0,417\zeta^2 + 1,039\zeta + 1$$

$$T_r = 3,062 \times 10^{-5} \text{ s}$$

Após essa análise o valor da capacitância foi mudado. Os valores referentes ao segundo circuito são os seguintes:

Tabela 10: Valores dos componentes utilizados na prática

Resistência	Indutância	Capacitância
1,0 kΩ	65mH	0,417 μF

A fig.26 mostra a resposta calculada pelo MATLAB para um circuito de 2ª ordem com esses valores.

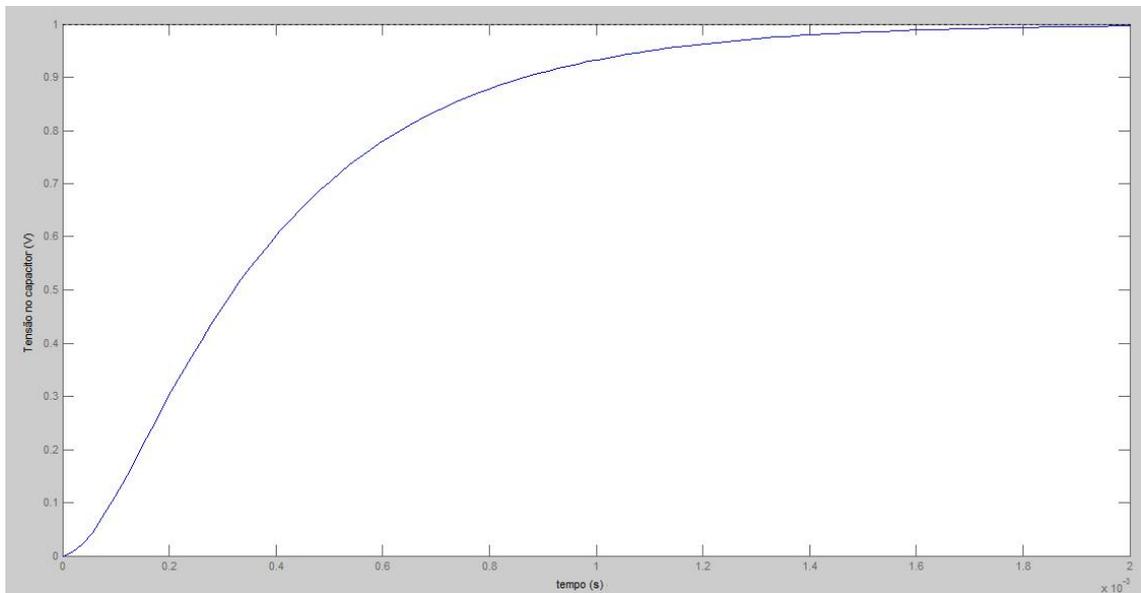


Fig. 26: Resposta mostrada pelo MATLAB

A resposta é do tipo super amortecida para esse valor de capacitância. A fig.27 mostra a entrada usada e a resposta conseguida em laboratório para a implementação do circuito em questão.

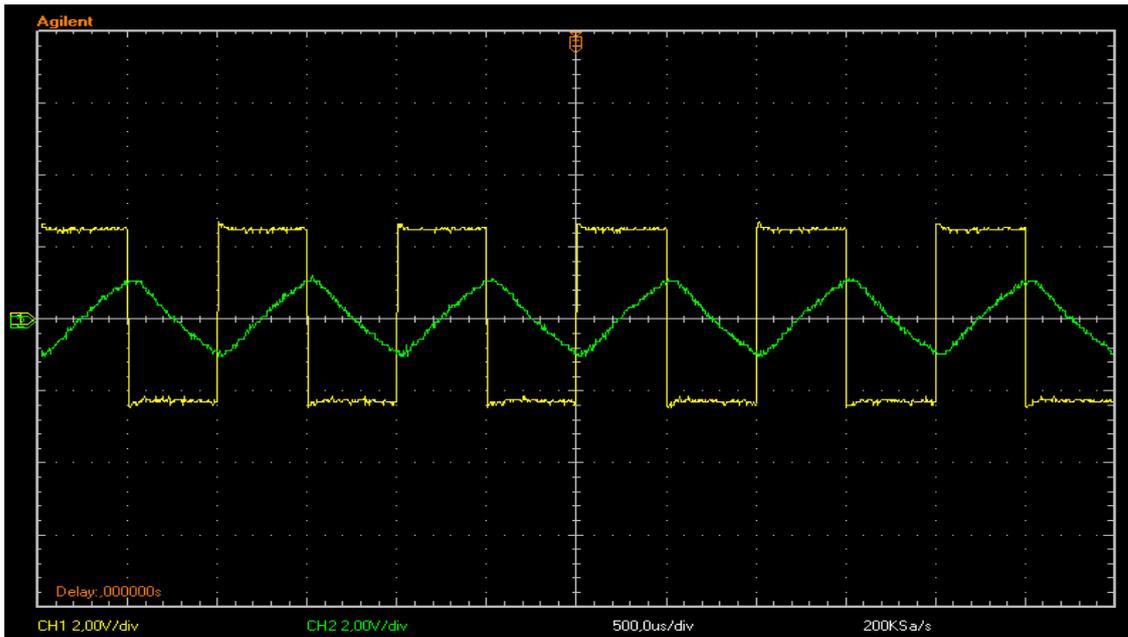


Fig. 27: Entrada (amarela) e saída (verde) vistas no osciloscópio

Para esse circuito a resposta mostrada pelo MATLAB pode parecer diferente da vista experimentalmente, no entanto isso não é verdade. O que ocorreu é que o período da onda usada na entrada do circuito era muito curto o que impediu que se visse o ponto em que a saída se iguala a entrada.

Para esse circuito é possível calcular os seguintes parâmetros:

- Freqüência Natural (ω_n):

$$\omega_n = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 6074 \text{ rad/s}$$

- Fator de amortecimento (ζ):

$$\zeta = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} = 1,2664$$

Como previsto teoricamente, o fator de amortecimento (ζ) é maior que 1 para sistemas que apresentam resposta super amortecida.

Agora o valor da capacitância será novamente mudado. Os componentes usados foram os seguintes:

Tabela 11: Valores dos componentes utilizados na prática

Resistência	Indutância	Capacitância
1,0 k Ω	65mH	0,1 μ F

A resposta calculada pelo MATLAB para esse circuito está representada na fig.28.

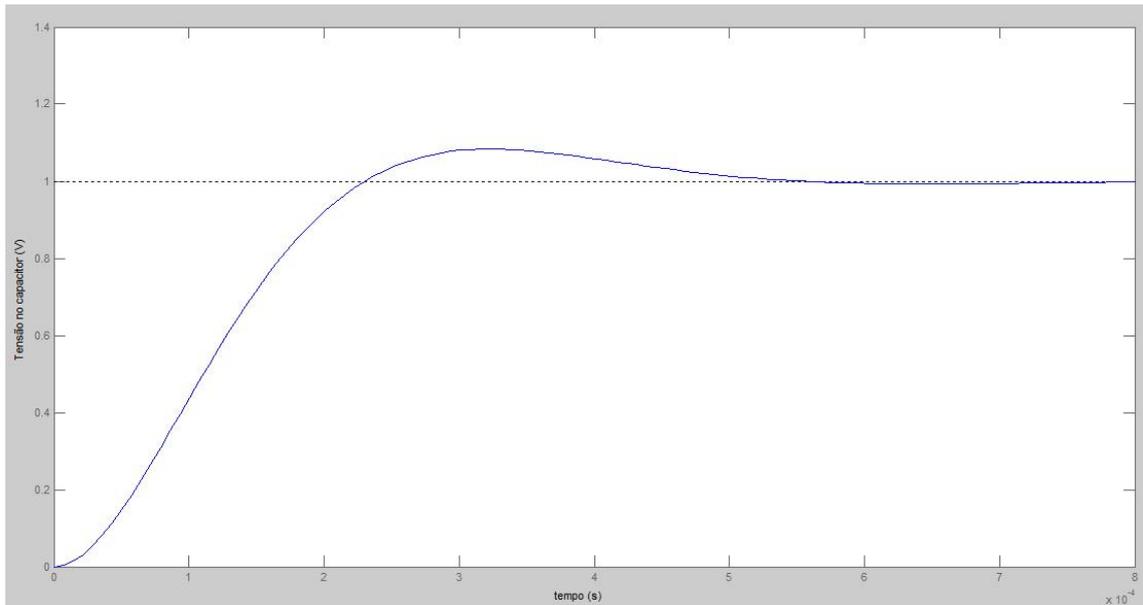


Fig. 28: Resposta mostrada pelo MATLAB

A resposta obtida com o MATLAB é do tipo subamortecida, com uma oscilação quase que imperceptível. As formas de onda da fig.29 foram obtidas em laboratório usando um circuito com os mesmos valores já citados.

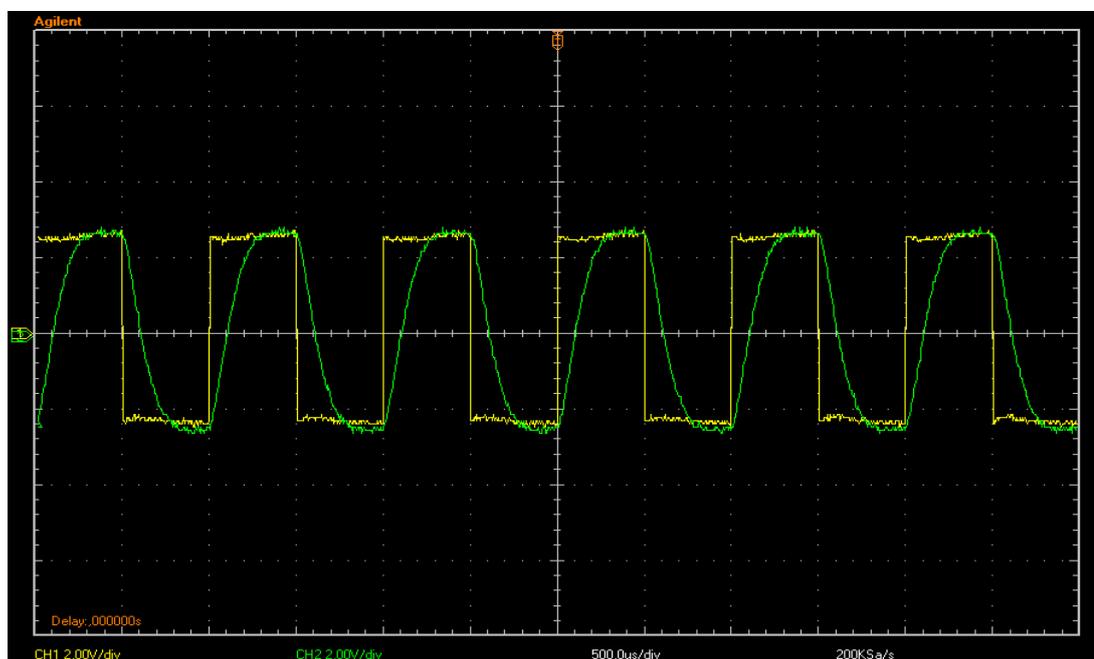


Fig. 29: Entrada (amarela) e saída (verde) vistas no osciloscópio

Novamente pode-se pensar que a resposta vista no osciloscópio não é do tipo subamortecida, porém, essa é uma impressão errada causada pelo fato de se ter usado uma frequência muito alta para a entrada o que impossibilitou a visualização das oscilações

que para esse circuito são quase imperceptíveis provavelmente por ter um fator de amortecimento mais próximo da 1.

A frequência natural (ω_n) e o fator de amortecimento (ζ) são agora calculados, além dos outros fatores referentes a esse tipo de resposta.

- Frequência Natural (ω_n):

$$\omega_n = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 12403,47 \text{ rad/s}$$

- Fator de amortecimento (ζ):

$$\zeta = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} = 0,6202$$

- Tempo de pico (T_p):

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} = 3,229 \times 10^{-4} \text{ s}$$

- Tempo de assentamento (T_s):

$$T_s = \frac{4}{\zeta \omega_n} = 5,1998 \times 10^{-4} \text{ s}$$

- Sobrevalor percentual (%SP):

$$\%SP = e^{-(\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2})} \times 100 = 8,3424 \%$$

- Tempo de subida (T_r): usando um polinômio que aproxima a curva de tempo de subida normalizado em função da fração de amortecimento, têm-se:

$$\omega_n T_r = 1,76\zeta^3 - 0,417\zeta^2 + 1,039\zeta + 1$$

$$T_r = 1,535 \times 10^{-4} \text{ s}$$

Um último valor de capacitância foi usado para a implementação do circuito. Os valores para os 3 elementos estão listados a seguir:

Tabela 12: Valores dos componentes utilizados na prática

Resistência	Indutância	Capacitância
1,0 kΩ	65mH	2,2nF

A resposta calculada pelo MATLAB para um circuito com esses valores está representada na fig.30.

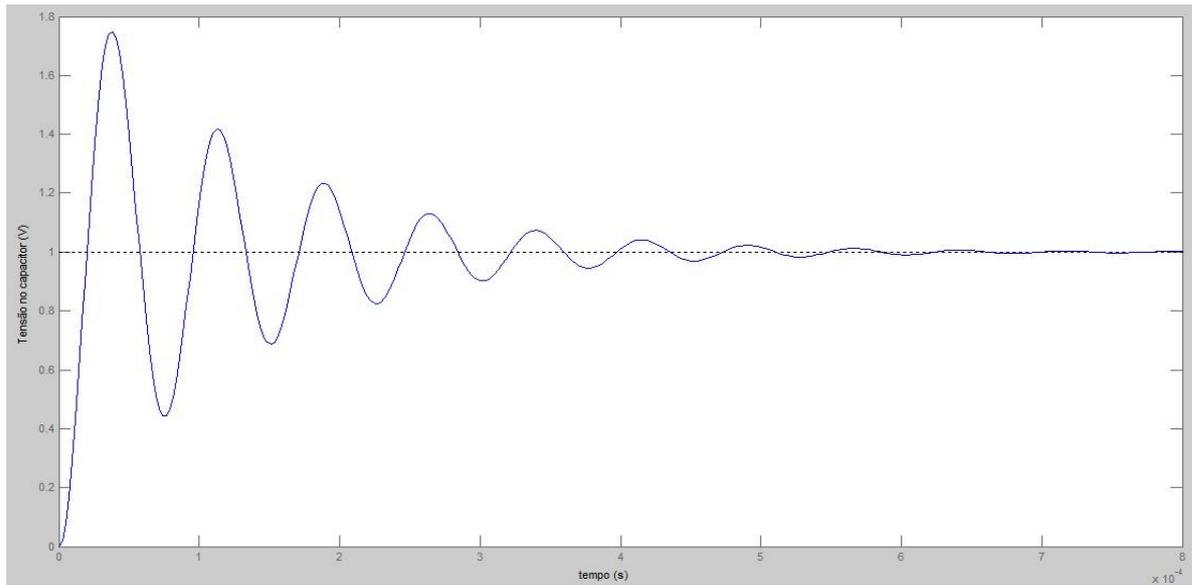


Fig. 30: Resposta mostrada pelo MATLAB

A resposta é do tipo subamortecida para esse valor de capacitância. A fig.31 mostra a entrada usada e a resposta conseguida em laboratório para a implementação do circuito em questão.

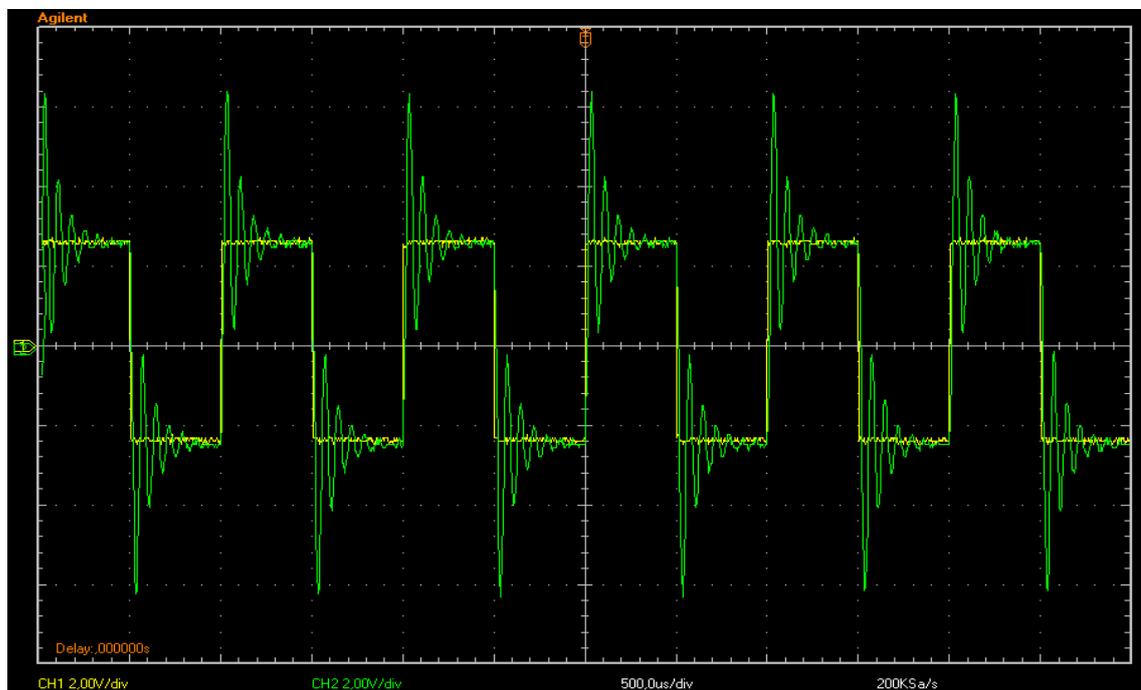


Fig. 31: Entrada (amarela) e saída (verde) vistas no osciloscópio

Os parâmetros para o circuito em questão são calculados a seguir:

- Freqüência Natural (ω_n):

$$\omega_n = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 83624,201 \text{ rad/s}$$

- Fator de amortecimento (ζ):

$$\zeta = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} = 0,092$$

- Tempo de pico (T_p):

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} = 3,7728 \times 10^{-5} \text{ s}$$

- Tempo de assentamento (T_s):

$$T_s = \frac{4}{\zeta \omega_n} = 5,1992 \times 10^{-4} \text{ s}$$

- Sobrevalor percentual (%SP):

$$\%SP = e^{-(\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2})} \times 100 = 74,81 \%$$

- Tempo de subida (T_r): usando um polinômio que aproxima a curva de tempo de subida normalizado em função da fração de amortecimento, têm-se:

$$\omega_n T_r = 1,76\zeta^3 - 0,417\zeta^2 + 1,039\zeta + 1$$

$$T_r = 1,308 \times 10^{-5} \text{ s}$$

Através da análise desses circuitos é possível fazer algumas inferências sobre a mudança do comportamento do circuito RLC com a variação da capacitância considerando valores de resistência e indutância constante. O valor da capacitância usada influi diretamente na frequência natural do circuito e são valores inversamente proporcionais, ou seja, a frequência natural aumenta com a diminuição da capacitância, considerando os outros parâmetros constantes. A magnitude da capacitância também influi diretamente no valor do fator de amortecimento, podendo então mudar o tipo de resposta do sistema de acordo com a sua combinação com os outros elementos do circuito, quanto maior o valor do capacitor maior será o fator de amortecimento, portanto para um dado R e L, um capacitor variável pode ser usado para mudar transitar a resposta do circuito entre todas as possibilidades (sem amortecimento, subamortecido, criticamente amortecido e super amortecido). Quando dentro da faixa de resposta submamortecida o valor do capacitor afeta os parâmetros da seguinte forma: o tempo de pico (T_p) diminui quando a capacitância diminui; o tempo de assentamento (T_s) se mantém praticamente inalterado com a mudança na capacitância pois ela tem efeito inverso nos termos que determinam T_s ; o sobrevalor percentual (%SP) aumenta a medida que a capacitância diminui devido ao fortalecimento do caráter oscilatório; e o tempo de subida (T_r) diminui com a diminuição do valor de C.

Por fim, agora se deseja entender o impacto da mudança da indutância (L) do circuito na resposta do sistema, considerando valores fixos de resistência R e da capacitância C. O primeiro circuito montado possuía os seguintes valores para R, L e C:

Tabela 13: Valores dos componentes utilizados na prática

Resistência	Indutância	Capacitância
1,0 k Ω	65mH	0,417 nF

O MATLAB calcula a resposta mostrada na fig.32 para o circuito especificado acima.

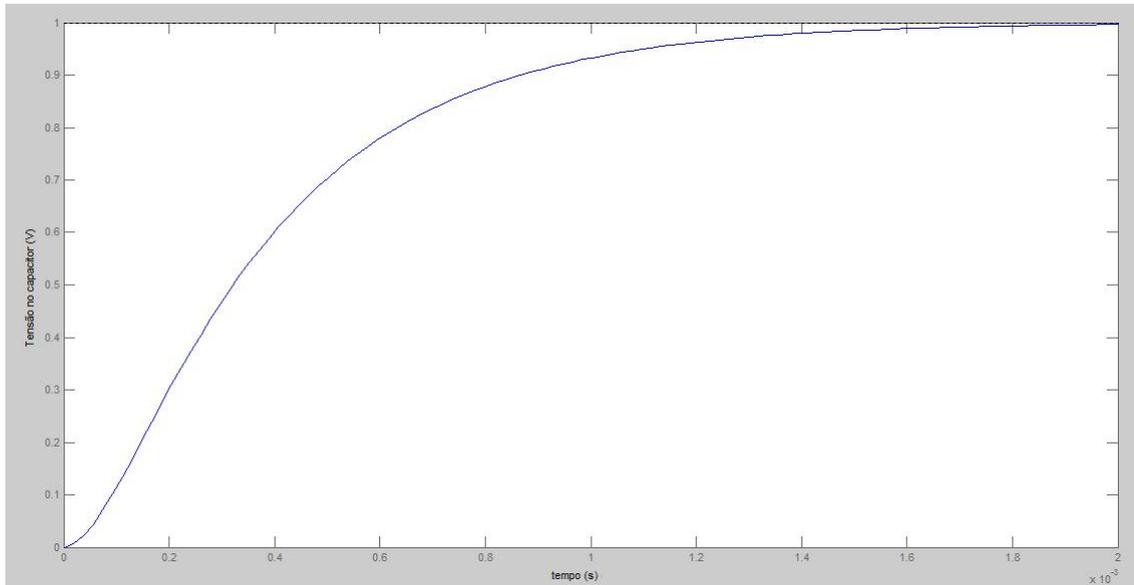


Fig. 32: Resposta mostrada pelo MATLAB

A resposta é do tipo super amortecida para esse valor de indutância. A fig.33 mostra a entrada usada e a resposta conseguida em laboratório para a implementação do circuito em questão.

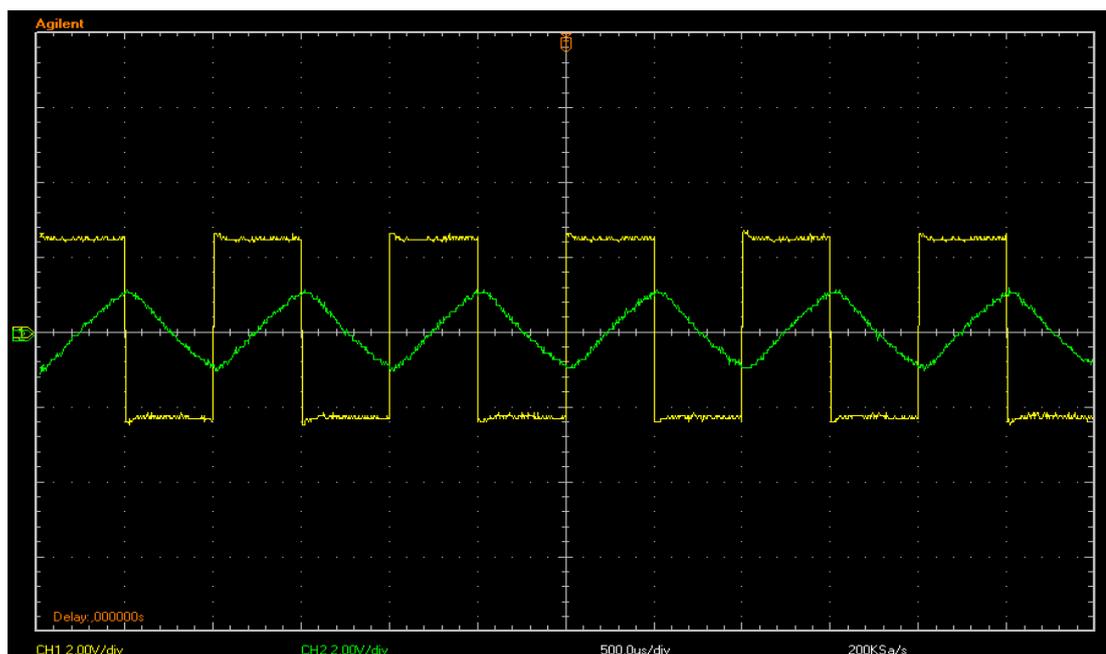


Fig. 33: Entrada (amarela) e saída (verde) vistas no osciloscópio

Como esse circuito é o mesmo utilizado anteriormente para estudar o impacto da mudança da capacitância o mesmo problema relativo à visualização do assentamento da resposta ocorreu devido à alta frequência do sinal de entrada. No entanto, a resposta é realmente super amortecida como mostrado pela resposta do MATLAB. Pode-se agora calcular a frequência natural do sistema (ω_n) e o fator de amortecimento (ζ).

- Frequência Natural (ω_n):

$$\omega_n = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 6074 \text{ rad/s}$$

- Fator de amortecimento (ζ):

$$\zeta = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} = 1,2664$$

Como previsto teoricamente, o fator de amortecimento (ζ) é maior que 1 para sistemas que apresentam resposta super amortecida.

Após essa análise o indutor foi substituído. Os valores para o 2º circuito analisado nessa parte da prática estão a seguir:

Tabela 14: Valores dos componentes utilizados na prática

Resistência	Indutância	Capacitância
1,0 kΩ	12mH	0,417 nF

O MATLAB calcula a resposta mostrada na fig.34 para o circuito especificado acima.

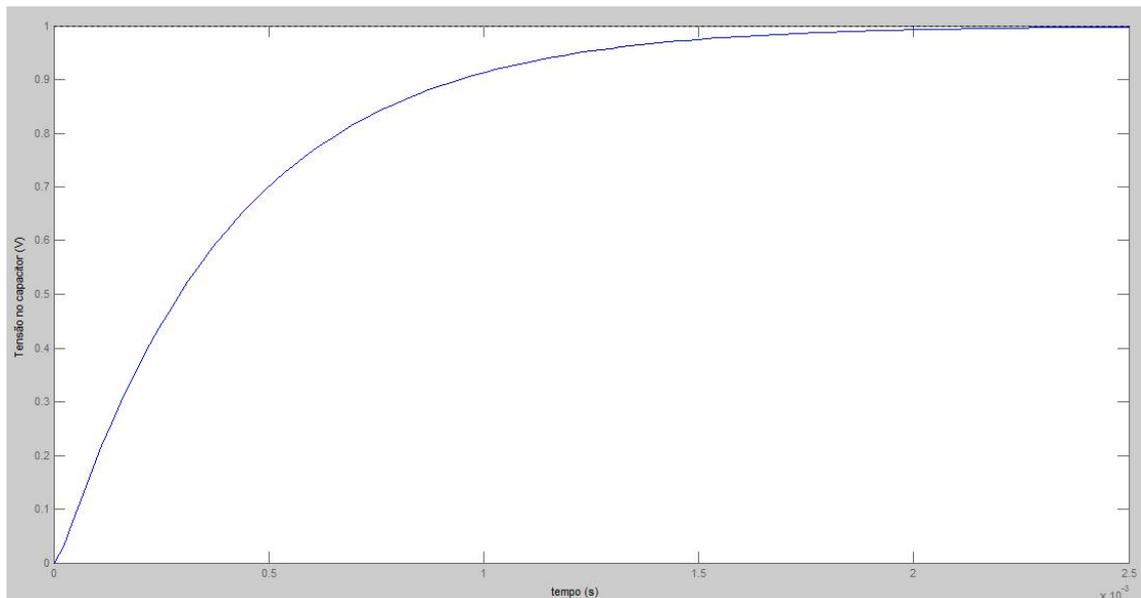


Fig. 34: Resposta mostrada pelo MATLAB

A resposta é do tipo super amortecida para esse valor de indutância. A fig.35 mostra a entrada usada e a resposta conseguida em laboratório para a implementação do circuito em questão.

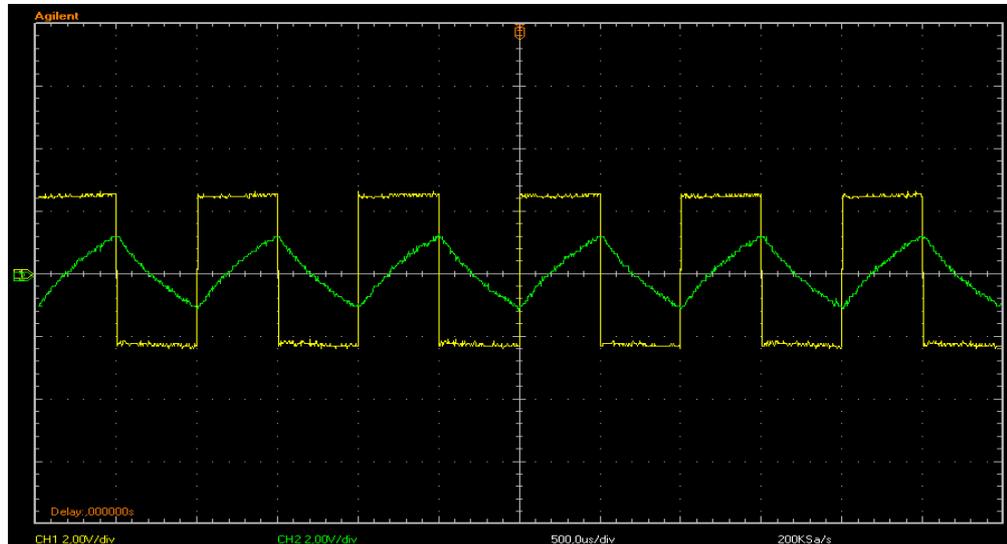


Fig. 35: Entrada (amarela) e saída (verde) vistas no osciloscópio

Mais uma vez o problema da frequência de entrada impediu a visualização da saída até o ponto de assentamento. Novamente a resposta é do tipo super amortecida e os parâmetros relativos ao sistema são calculados a seguir:

- Frequência Natural (ω_n):

$$\omega_n = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 14136,48 \text{ rad/s}$$

- Fator de amortecimento (ζ):

$$\zeta = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} = 2,9475$$

Como esperado para um sistema super amortecido o fator de amortecimento (ζ) é maior que 1.

Devido à falta de variedade de indutores nas placas utilizadas, apenas os dois circuitos anteriores foram estudados, e ambos acabaram produzindo o mesmo tipo de resposta. No entanto, analisando as equações utilizadas é possível fazer algumas inferências sobre o comportamento do sistema RLC para as variações na indutância. A frequência natural (ω_n) é diretamente afetada pelo valor da indutância, aumentando a medida que a magnitude do valor do indutor diminui. Em relação aos outros parâmetros a mudança do indutor apresenta um comportamento dual em relação à mudança da capacitância, ou seja, o fator de amortecimento diminui quando L aumenta, o contrário do

que acontecia com a capacitância. A mudança do valor da indutância também faz o sistema passear entre todos os tipos de resposta possíveis para um sistema de 2ª ordem.

O estudo de sistemas através da análise de circuitos elétricos é bastante valioso, pois todos os sistemas sempre têm um circuito elétrico análogo. Portanto, a compreensão desse tipo de sistema (circuitos) ajuda a entender outros tipos de sistemas.

CÓDIGO MATLAB

Código no MATLAB para plotar gráficos de 1° ordem:

```
>> 'Gráfico do circuito de 1° ordem'  
>> numf=[1];  
>> denf=[RC 1];  
>> 'G(s)'  
ans =  
G(s)  
>> G=tf(numf,denf)  
Transfer function:
```

$$\frac{1}{RCs + 1}$$

```
>> numu=[1];  
>> denu=[1 0];  
>> 'V(s)'  
ans =  
V(s)  
>> V=tf(numu,denu)  
Transfer function:
```

$$\frac{1}{s}$$

```
>> Vc=G*V
```

```
Transfer function:
```

$$\frac{1}{RCs^2 + s}$$

```
>> Vc=sym('1/(RCs^2+s)');
```

```
>> vc=ilaplace(Vc);
```

```
>> disp(['vc(t)=', char(vc),'=',char(simplify(vc))]);  
vc(t)=2*exp(-1/RC*t)*sinh(1/Rc*t)=2*exp(-1/RC*t)*sinh(1/RC*t)
```

```
>> disp(['vc(t)=', char(vc),'=',char(simplify(vc))]);% isso é o mesmo que (1-exp(-t/RC))u(t)  
vc(t)=2*exp(-1/2*t)*sinh(1/2*t)=2*exp(-1/2*t)*sinh(1/2*t)
```

```
>> t=tempo inicial:incremento:tempo final;
```

```
>> f1= 1-exp(-t/RC);
```

```
>> plot(t,f1,'b') % neste ponto o código é finalizado e obtém-se os gráficos.
```

Código no MATLAB para plotar gráficos de 2° ordem

```
>> 'Gráfico do circuito de 2° ordem'  
>> numg=[1];  
>> deng=[1 1 1];  
>> 'H(s)';  
H(s)  
>> H=tf(numg,deng) %função transferência do circuito de 2° ordem
```

Transfer function:

$$\frac{1}{LCs^2 + CRs + 1}$$

```
>> numu=[1];  
>> denu=[1 0]; % entrada ao degrau  
>> 'V(s)'  
ans =  
V(s)  
>> V=tf(numu,denu)  
Transfer function:
```

$$\frac{1}{s}$$

```
>> 'Vc(s)% saída resultado da entrada multiplicado pela função de transferência do sistema.  
ans =  
Vc(s)  
>> Vc= G*V  
Transfer function:
```

$$\frac{1}{LCs^3 + CRs^2 + s}$$

```
>> Vc=sym('(1)/(LCs^3 +CRs^2 + s)');  
>> vc=ilaplace(Vc);  
>> disp(['vc(t)=' char(vc), '=', char(simplify(vc))]);% resultado da transformada inversa  
vc(t)=-exp(X*t)*cos(1/2*3^(X)*t)-1/3*3^(1/2)*exp(X*t)*sin(1/2*3^(X)*t)+1=-  
exp(X*t)*cos(1/2*3^(X)*t)-1/3*3^(1/2)*exp(-X*t)*sin(1/2*3^(X)*t)+1  
% onde x é uma variável que depende dos valores do indutor,resistor e capacitor.
```

```
>> t=tempo inicial:incremento:tempo final;  
>> f2=(-exp(-xt)*cos(1/2*3^(x)*t)-1/3*3^(x)*exp(-x*t)*sin(1/2*3^(x)*t) +1; % onde x é uma  
variável que depende dos valores do indutor,resistor e capacitor.  
>> plot(t,f2,'b') % neste ponto o código é finalizado e obtém-se os gráficos.
```

CONCLUSÃO

Analisados sistemas de 1ª e 2ª ordem, circuitos RC e RLC, respectivamente, algumas conclusões podem ser extraídas.

No caso do circuito RC, quando variada a resistência e mantendo a capacitância fixa, observou-se que este influenciou diretamente no tempo de resposta do sistema. Quanto menor o valor da resistência mais rápida é a resposta do sistema, isso fica comprovado pela análise das constantes de tempo calculadas anteriormente que decrescem de valor com a diminuição de R aumentando a velocidade de resposta do sistema. Idealmente uma resistência nula forneceria uma resposta instantânea a uma determinada entrada.

Mantendo a resistência fixa e variando a capacitância do circuito RC, observou-se que o tempo de resposta diminui com a diminuição do valor da capacitância isso ocorre porque o capacitor demora menos tempo para carregar, tornando assim a resposta mais imediata.

Para o circuito RLC (2ª ordem) quando variado o valor da resistência, mantendo a capacitância e a indutância fixas, foi notado que o valor da resistência está bastante ligado ao fator de amortecimento (ζ), que aumenta linearmente com o aumento da resistência, isso implica que o valor da resistência pode fazer com que o circuito mude a natureza da resposta de acordo com um aumento ou diminuição do valor desse componente resistivo.

Para os sistemas subamortecidos a diminuição da resistência fortalece o caráter oscilatório da resposta e influencia fortemente nos parâmetros referentes a esse tipo de resposta, por exemplo, com a diminuição da resistência o tempo de pico (T_p) diminui, o tempo de assentamento (T_s) aumenta, o sobre valor percentual(%SP) aumenta e o tempo de subida (T_r) diminui. Para um caso ideal onde a resistência fosse nula a resposta do sistema seria puramente oscilatória, pois o fator de amortecimento seria nulo.

Prosseguindo com a análise, quando mantido a resistência e a indutância fixas e variando a capacitância, percebeu-se que o valor da capacitância usada influencia diretamente na frequência natural do circuito e são valores inversamente proporcionais, ou seja, a frequência natural aumenta com a diminuição da capacitância, considerando os outros parâmetros constantes. A magnitude da capacitância também influencia diretamente no valor do fator de amortecimento, podendo então mudar o tipo de resposta do sistema de acordo com a sua combinação com os outros elementos do circuito, quanto maior o valor do capacitor maior será o fator de amortecimento, portanto para um dado R e L, um capacitor variável pode ser usado para mudar transitar a resposta do circuito entre todas as possibilidades (sem amortecimento, subamortecido, criticamente amortecido e super amortecido).

Quando dentro da faixa de resposta subamortecida o valor do capacitor afeta os parâmetros da seguinte forma: o tempo de pico (T_p) diminui quando a capacitância diminui; o tempo de assentamento (T_s) se mantém praticamente inalterado com a mudança na capacitância pois ela tem efeito inverso nos termos que determinam T_s ; o sobrevalor percentual (%SP) aumenta a medida que a capacitância diminui devido ao fortalecimento do caráter oscilatório; e o tempo de subida (T_r) diminui com a diminuição do valor de C.

E, posteriormente, quando variada a indutância, mantendo a resistência e a capacitância fixas, observou-se a frequência natural (ω_n) é diretamente afetada pelo valor da indutância, aumentando a medida que a magnitude do valor do indutor diminui. Em relação aos outros parâmetros a mudança do indutor apresenta um comportamento dual em relação à mudança da capacitância, ou seja, o fator de amortecimento diminui quando L aumenta, o contrário do que acontecia com a capacitância. A mudança do valor da indutância também faz o sistema passear entre todos os tipos de resposta possíveis para um sistema de 2ª ordem.

Caso se deseje melhorar a resposta de sistemas de 1ª e 2ª ordem em relação a um determinado parâmetro, pode-se usar circuitos controladores do tipo: proporcional-integral (PI), proporcional-derivativo (PD) e proporcional-integral-derivativo (PID).

REFERÊNCIAS

- [1] OGATA, Katsuhiko. **Engenharia de Controle Moderno**. 4.ed. São Paulo: Prentice Hall, 2004.
- [2] LATHI, B. P. **Sinais e Sistemas Lineares**. 2.ed. Porto Alegre: Bookman, 2007.
- [3] NISE, Norman S. **Engenharia de Sistemas de Controle**. 5.ed. Rio de Janeiro: LTC, 2009.