

Apostila de Eletromagnetismo:  
Campos Variantes no Tempo e Ondas Eletromagnéticas

Eduard Montgomery Meira Costa

2005

# Formalismo Matemático Necessário

## Números Complexos

Os números complexos são os que pertencem ao conjunto de números complexos, denotado por  $\mathbb{C}$ . Estes são representados por  $z = a + jb$ , em que  $a$  e  $b$  são números reais e  $j = \sqrt{-1}$  é o número *imaginário*. Esta representação é chamada de forma retangular, sendo também representada graficamente por um vetor iniciando da origem dos eixos coordenados de um plano cartesiano, em que o eixo  $x$  é o eixo real (valores de  $a$ ) e o eixo  $y$  é o eixo imaginário (valores de  $b$ ), como se pode ver na Figura 1.

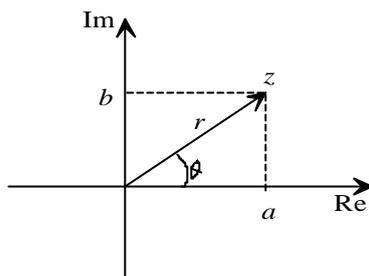


Figura 1: Plano cartesiano para representação dos números complexos.

Este mesmo número tem outra representação denominada de forma polar, dada por  $z = r \angle \mathbf{q}$  em que  $r = \sqrt{a^2 + b^2}$  e  $\mathbf{q} = \arctg \frac{b}{a}$ , o que também é visto na mesma figura.

Os números complexos comportam todas as operações aritméticas da mesma forma que todo número real. Assim, para dois números complexos  $z_1 = a + jb$  e  $z_2 = c + jd$ , tem-se as operações aritméticas como a seguir:

- Soma e subtração:

$$z_1 \pm z_2 = (a + jb) \pm (c + jd) = (a \pm c) + j(b \pm d);$$

- Multiplicação:

$$z_1 \times z_2 = (a + jb) \times (c + jd) = ac + jab + jbc + j^2 bd = (ac - bd) + jb(a + c),$$

ou

$$z_1 \times z_2 = r_1 \angle \mathbf{q}_1 \times r_2 \angle \mathbf{q}_2 = (r_1 \times r_2) \angle (\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2);$$

- Divisão:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 \angle \mathbf{q}_1}{r_2 \angle \mathbf{q}_2} = \frac{r_1}{r_2} \angle (\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2);$$

- Potência e raiz:

$$z_1^n = r_1^n \angle (n\mathbf{q}_1);$$
$$\sqrt[n]{z_1} = z_1^{1/n} = \sqrt[n]{r_1} \angle (\mathbf{q}_1 / n).$$

Além destas operações, os números complexos apresentam a operação definida por complexo conjugado, que é denotada por  $z^*$ . Assim, para  $z = a + jb$ , o complexo conjugado de  $z$  é  $z^* = a - jb$ .

## Identidade de Euler

Para os números complexos, uma importante propriedade é definida, a qual é conhecida por identidade de Euler. Esta identidade relaciona um número complexo com funções trigonométricas.

A identidade de Euler é apresentada a seguir, a qual é válida para todo número complexo  $z = a + jb = r \angle \mathbf{q}$ :

$$r \angle \mathbf{q} = r e^{j\mathbf{q}} = r(\cos \mathbf{q} + j \operatorname{sen} \mathbf{q}).$$

Assim, naturalmente encontra-se que  $a = r \cos \mathbf{q}$  e  $b = r \operatorname{sen} \mathbf{q}$ , ou, considerando as operações Re e Im, que retornam os valores das partes reais e imaginárias, respectivamente, quando aplicadas a um número complexo  $z$  qualquer, tem-se

$$a = \operatorname{Re}\{z\} = \operatorname{Re}\{r \cos \mathbf{q} + j r \operatorname{sen} \mathbf{q}\} = r \cos \mathbf{q}$$

e

$$b = \operatorname{Im}\{z\} = \operatorname{Im}\{r \cos \mathbf{q} + j r \operatorname{sen} \mathbf{q}\} = r \operatorname{sen} \mathbf{q}.$$

Pela identidade de Euler, comprovam-se facilmente as operações matemáticas realizadas de soma, subtração, multiplicação, divisão, potência e raiz.

## Campos Variantes no Tempo e Equações de Maxwell

### A Lei de Faraday

Com as experiências realizadas por Faraday, a respeito dos campos variantes, ele percebeu que um fluxo magnético variável produz uma força eletromotriz, ou diferença de potencial, que pode estabelecer uma corrente elétrica num circuito fechado. Dessa forma, a Lei de Faraday ficou estabelecida como:

$$fem = -\frac{d\Phi}{dt},$$

dada em volts. Um exemplo simples é passar um ímã por dentro de uma bobina, em que se percebe uma pequena diferença de potencial momentânea entre os seus terminais. O sinal negativo da equação indica que a tensão induzida nos terminais do fio está gerando uma corrente em uma direção, de forma a reduzir a variação do fluxo original, reduzindo assim, a magnitude da  $fem$ . Isto provém da Lei de Lenz que define a produção do fluxo de oposição a uma tensão induzida. Esta equação também determina que uma  $fem$  existirá se houver uma das situações descritas a seguir:

1. Um fluxo variável no tempo envolvendo um trajeto fechado estacionado: por exemplo, um ímã passando perto de uma bobina;
2. Movimento relativo entre um fluxo e um trajeto fechado: por exemplo, uma bobina se movendo perto de um ímã fixo;
3. A combinação dos dois.

Deve-se ver que, quando se considera um circuito fechado com  $n$  espiras, ou seja, uma bobina, então tem-se:

$$fem = -n \frac{d\Phi}{dt},$$

onde  $\Phi$  é o fluxo magnético que atravessa seu centro perpendicularmente à área descrita pelas espiras.

Desde que a  $fem$  induzida se refere à um circuito fechado, então:

$$fem = \oint \dot{\vec{E}} \cdot d\vec{L}.$$

Observe que, qualquer variação no percurso fechado varia a *fem*, o que naturalmente se pode confirmar devido à variação na área da espira em relação ao fluxo magnético que a atravessa. Desta equação, utilizando a lei de Faraday, encontra-se

$$\oint \dot{\vec{E}} \cdot d\vec{L} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_S \dot{\vec{B}} \cdot d\vec{S},$$

desde que

$$\Phi = \int_S \dot{\vec{B}} \cdot d\vec{S},$$

e o percurso  $\oint dL$  é o contorno da área  $\int_S dS$ . Por outro lado, desde que a área da espira seja mantida constante, e o fluxo magnético varie no tempo, então

$$\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S},$$

e conseqüentemente,

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{L} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}.$$

Pelo Teorema de Stokes no primeiro membro desta equação, tem-se

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{L} = \int_S (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{S},$$

e assim

$$\int_S (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{S} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

que é a forma integral da equação de Maxwell para o campo magnético variante no tempo.

Como são superfícies idênticas, então a relação

$$(\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{S} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

é satisfeita, e conseqüentemente,

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

que é a equação de Maxwell para o campo magnético variante escrita na forma diferencial, ou forma pontual.

**Exemplo:** Considerando agora que o fluxo é constante, mas há uma variação na área que o mesmo atravessa, percebe-se que indiretamente este fluxo está variando. Este é o caso da barra de curto-circuito sobre trilhos vista na Figura 2.

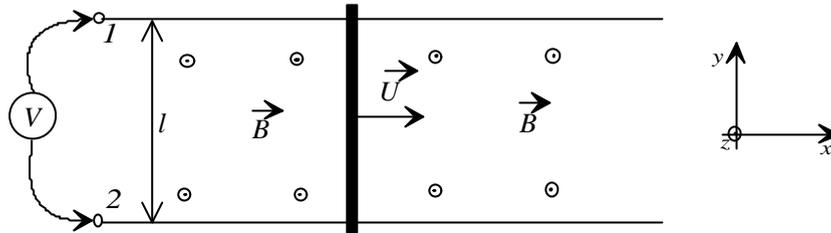


Figura 2: Barra de curto-circuito sobre trilhos: há uma *fem* induzida com intensidade proporcional à sua velocidade.

Neste caso, observa-se que a área do circuito fechado entre a barra de curto-circuito e o voltímetro é

$$S = lx.$$

Da equação de *fem* induzida, tem-se que

$$fem = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d(BS)}{dt}.$$

Entretanto, como  $B$  é constante, então

$$fem = -B \frac{dS}{dt} = -B \frac{d(lx)}{dt} = -Bl \frac{dx}{dt},$$

e assim, como

$$\frac{dx}{dt} = U,$$

logo

$$fem = -BlU,$$

que é a tensão registrada pelo voltímetro.

### **Força Eletromotriz de Movimento**

Considerando o exemplo anterior, uma outra observação é feita a respeito da geração da *fem* quando a barra de curto-circuito se move no campo magnético. Desde que a barra de curto-circuito é metálica, nela há elétrons livres que podem se mover ao longo da mesma. Como são elétrons livres e os mesmos estão acompanhando o movimento da barra de forma perpendicular ao campo magnético, então há uma força sobre estes elétrons dada por

$$\vec{F} = q\vec{U} \times \vec{B},$$

que pode ser vista na Figura 3.

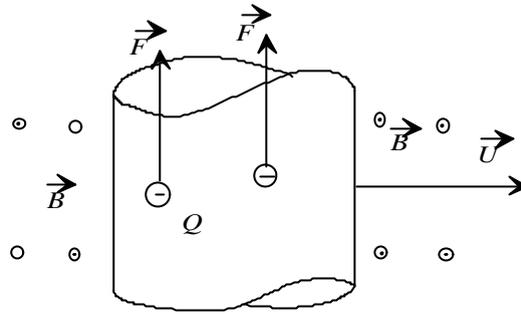


Figura 3: Seção do condutor da barra de curto-circuito: a velocidade da barra perpendicular ao campo magnético gera uma força sobre os elétrons livres criando uma diferença de potencial entre os terminais da barra.

Assim, como os elétrons são livres, eles tendem a se mover na direção da ponta superior da barra, ficando esta negativa em relação a ponta inferior, que se mantém relativamente positiva. Isto define uma diferença de potencial crescente de cima para baixo, o que explica a tensão negativa registrada no voltímetro, além da direção da corrente que é subindo o condutor.

Por outro lado, da equação da força, vê-se que há um campo elétrico entre os dois terminais da barra, dado por

$$\frac{\vec{F}}{Q} = \vec{U} \times \vec{B},$$

que é chamado de campo elétrico de movimento, denotado por  $\vec{E}_m$ , isto é,

$$\vec{E}_m = \vec{U} \times \vec{B}.$$

Considerando que haja uma variação no campo magnético, além da velocidade da barra modificando a área, as duas contribuições são incluídas para a  $fem$  resultante, a qual é dada por

$$fem = \oint \vec{E} \cdot d\vec{L} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} + \oint (\vec{U} \times \vec{B}) \cdot d\vec{L},$$

onde o último termo provém do campo elétrico de movimento no circuito fechado. Esta equação é equivalente à

$$fem = - \frac{d\Phi}{dt}.$$

### Corrente de Deslocamento

Observando a Lei Circuital de Ampère para cargas estáticas na forma pontual, isto é,

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J},$$

vê-se que a divergência fornece

$$\nabla \cdot \nabla \times \vec{H} = 0 = \nabla \cdot \vec{J}$$

o que é inadequada quando se observa a Equação da Continuidade na forma pontual, que é

$$\nabla \cdot \vec{J} = - \frac{\partial \rho}{\partial t},$$

pois só será válida se

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} = 0.$$

Entretanto, para avaliar o que acontece com o campo variante, adiciona-se um novo vetor, denotado por  $\vec{G}$  à Lei Circuital de Ampère para encontrar uma relação mais concreta em relação à variação deste campo. Assim,

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \vec{G}$$

em que, tomando a divergência, encontra-se

$$\nabla \cdot \vec{J} + \nabla \cdot \vec{G} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \vec{G} = -\nabla \cdot \vec{J} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}.$$

Como

$$\nabla \cdot \vec{D} = \mathbf{r},$$

então

$$\nabla \cdot \vec{G} = \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \vec{D}) = \nabla \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t},$$

pois a divergência não inclui a variação no tempo. E dessa forma, tem-se que o novo termo adicionado à Lei Circuital de Ampère é dado por

$$\vec{G} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t},$$

ou,

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

Observa-se agora que a Lei Circuital de Ampère envolve um termo baseado na variação do campo elétrico, e que

$$\vec{G} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t},$$

tem a mesma dimensão de  $\vec{J}$ , que é  $A/m^2$ , o que leva a denominar o vetor  $\vec{G}$  de densidade de corrente de deslocamento. Logo, para simplificar a notação, denota-se esta por

$$\vec{J}_d = \vec{G} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

e, conseqüentemente,

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \vec{J}_d.$$

Com esta nova definição, complementa-se o terceiro tipo de densidade de corrente. Em síntese:

- Densidade de corrente de condução:  $\vec{J} = \mathbf{s} \vec{E}$ ;
- Densidade de corrente de convecção:  $\vec{J} = \mathbf{r} \vec{U}$ ;
- Densidade de corrente de deslocamento:  $\vec{J}_d = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ .

No caso de  $\dot{J}_d$ , para um meio não condutor em que a densidade volumétrica de cargas não está presente, por exemplo no espaço livre,  $\vec{J} = 0$ , e conseqüentemente,

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_d = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t},$$

que apresenta uma simetria com

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

Da mesma relação entre corrente  $I$  e densidade de corrente  $\vec{J}$ , define-se a corrente de deslocamento  $I_d$ , como

$$I_d = \int_s \vec{J}_d \cdot d\vec{S} = \int_s \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S}.$$

Esta corrente existe em todos os condutores reais em que flui uma corrente de condução com campo elétrico variável. Um exemplo prático desta corrente de deslocamento é a corrente senoidal que passa em um capacitor, que em termos de corrente contínua (densidade de corrente de condução  $\vec{J}$ ) não há passagem de cargas. Entretanto, a corrente variável (senoidal) ou alternada, passa, que é uma corrente de deslocamento, o que pode ser provado utilizando a Lei Circuital de Ampère com a inclusão desta corrente.

**Exemplo:** Considere um circuito  $RC$  onde uma chave  $s$ , ao ser ligada, fornece tensão ao capacitor, como visto na Figura 4.

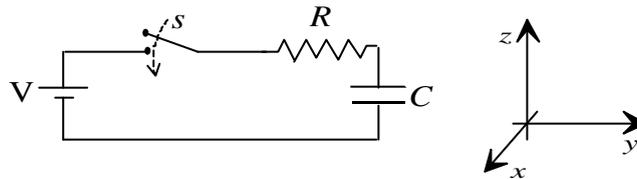


Figura 4: Circuito  $RC$  para análise do campo magnético gerado através da variação do campo elétrico variável no capacitor.

Pela teoria de circuito, sabe-se que a tensão no capacitor é

$$V = V_0 \left( 1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right) = IR \left( 1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right),$$

e, sendo  $V$  uma função de  $z$ , com  $C$  sendo a capacitor de placas paralelas, o campo elétrico entre as placas é dado por:

$$\vec{E} = -\nabla V = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{V}{d} z \right) \vec{a}_z = -\frac{V}{d} \vec{a}_z = \frac{IR}{d} \left( e^{-\frac{t}{RC}} - 1 \right) \vec{a}_z,$$

Logo, um campo elétrico variável é gerado dentro do capacitor, e dessa forma, utilizando a equação de Maxwell para campos variantes no tempo, tem-se

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{J} + \vec{e} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t},$$

ou, do rotacional,

$$\left(\frac{1}{r} \frac{\partial H_r}{\partial f} - \frac{\partial H_f}{\partial z}\right) \bar{a}_r + \left(\frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r}\right) \bar{a}_f + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(rH_f)}{\partial r} - \frac{\partial H_r}{\partial f}\right) \bar{a}_z = \bar{J} + \mathbf{e} \frac{IR}{d} \frac{\partial}{\partial t} \left(e^{-\frac{t}{RC}} - 1\right) \bar{a}_z,$$

que, comparando os termos, vê-se que

$$\frac{1}{r} \left(\frac{\partial(rH_f)}{\partial r} - \frac{\partial H_r}{\partial f}\right) = -\mathbf{e} \frac{IR}{RCd} e^{-\frac{t}{RC}} = -\mathbf{e} \frac{I}{Cd} e^{-\frac{t}{RC}},$$

considerando que a densidade de corrente  $\bar{J}$  seja nula para um capacitor com dielétrico perfeito. Dessa forma, observando que o campo magnético apenas varia na direção  $\mathbf{f}$ , que é dada pela regra da mão direita, desde que a corrente variante está na direção  $z$ , então tem-se

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rH_f)}{\partial r} = -\frac{\mathbf{e}I}{Cd} e^{-\frac{t}{RC}},$$

que integrando em  $r$ , dá

$$rH_f = \frac{\mathbf{e}r^2 I}{2Cd} e^{-\frac{t}{RC}},$$

ou,

$$\dot{H} = H_f \bar{a}_f = \frac{\mathbf{e}rI}{2Cd} e^{-\frac{t}{RC}} \bar{a}_f,$$

onde  $d$  é a distância entre as placas do capacitor e  $I$  é a corrente em regime permanente.

## Condições de Contorno

Deve-se observar que, para dois meios físicos reais, as condições de contorno necessárias para solucionar as Equações de Maxwell são invariáveis, de tal forma que se pode obter:

$$E_{t_1} = E_{t_2}$$

$$H_{t_1} = H_{t_2}$$

$$D_{n_1} - D_{n_2} = \mathbf{r}_s$$

$$B_{n_1} = B_{n_2}.$$

Se for considerado um dos meios como sendo um condutor perfeito com  $\mathbf{s} = \infty$ , mas tal que  $\bar{J}$  seja finito, tem-se  $\bar{E} = 0$  e, da Lei de Faraday, encontra-se em consequência  $\bar{H} = 0$  tal que a densidade de corrente  $\bar{J}$  considerada finita é encontrada como  $\bar{J} = 0$  determinando que a corrente flui no condutor por sua superfície. Assim,  $E_{t_1} = 0$ ,  $H_{t_1} = K$ ,  $D_{n_1} = \mathbf{r}_s$  e  $B_{n_1} = 0$ , onde a densidade superficial de corrente  $K$  só é admitida em condutores perfeitos, pois caso contrário, cargas livres distribuídas dentro do condutor podem se mover, o que explica o efeito Joule em condutores não perfeitos.

## Efeito das Variações dos Campos nos Potenciais

Com a variação dos campos, outros fenômenos se apresentam. Sabendo-se que para cada campo há os campos potenciais relacionados, é necessário entender o que acontece com estes quando há variações nos campos elétricos e magnéticos.

Denominam-se de *Potenciais Retardados* os campos potenciais variáveis no tempo, cujo motivo é visto nesta Seção.

Quando tratando dos campos estáticos, tem-se que o potencial elétrico e o potencial vetor magnético são dados, respectivamente, por:

$$V = \int_{vol} \frac{\rho dv}{4\pi\epsilon R}$$

$$\vec{A} = \int_{vol} \frac{\vec{m}J dv}{4\pi R}$$

com  $\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon}$  e  $\nabla^2 \vec{A} = -\vec{m}J$  onde os campos estão relacionados por  $\vec{E} = -\nabla V$  e  $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ .

Observando a relação de  $\vec{E}$  com  $V$ , quando é tomado o rotacional seu valor dá zero, ou seja,  $\nabla \times \vec{E} = -\nabla \times \nabla V = 0$  o que não é consistente com o resultado encontrado para os campos variantes, que é

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

Assim, comparando os termos deste rotacional, percebe-se que há um novo termo que não é visto quando se admite o campo elétrico estático. Chamando este termo de  $\vec{N}$ , tem-se que  $\vec{E} = -\nabla V + \vec{N}$ , e, então, encontra-se para a aplicação do rotacional que

$$\nabla \times \vec{E} = 0 + \nabla \times \vec{N} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

e, pela relação entre  $\vec{B}$  e  $\vec{A}$ , encontra-se

$$\nabla \times \vec{N} = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{A}) = -\nabla \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t},$$

que tem como solução mais simples  $\vec{N} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ . Dessa forma, o campo elétrico é formalizado por

$$\vec{E} = -\nabla V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}.$$

Substituindo este conceito nas equações anteriores, encontram-se

$$\frac{1}{m} \nabla \times \nabla \times \dot{\vec{A}} = \vec{j} + \epsilon \left( -\nabla \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial^2 \dot{\vec{A}}}{\partial t^2} \right)$$

e

$$\epsilon \left( -\nabla \cdot \nabla V - \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \dot{\vec{A}}) \right) = \vec{r}.$$

ou, pela identidade vetorial

$$\nabla \times \nabla \times \dot{\vec{A}} = \nabla (\nabla \cdot \dot{\vec{A}}) - \nabla^2 \dot{\vec{A}},$$

tem-se

$$\nabla (\nabla \cdot \dot{\vec{A}}) - \nabla^2 \dot{\vec{A}} = \vec{m}\vec{j} - \vec{m}\epsilon \left( -\nabla \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial^2 \dot{\vec{A}}}{\partial t^2} \right)$$

e

$$\nabla^2 V + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \vec{A}) = -\frac{\mathbf{r}}{\epsilon}.$$

A solução para estas equações é formalizada por:

$$\nabla \cdot \vec{A} = -\mathbf{m}\epsilon \frac{\partial V}{\partial t},$$

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mathbf{m}\vec{J} + \mathbf{m}\epsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}$$

e

$$\nabla^2 V = -\frac{\mathbf{r}}{\epsilon} + \mathbf{m}\epsilon \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}.$$

Entretanto, o maior problema referente aos campos potenciais, refere-se à propagação. Adiante, ao estudar as ondas eletromagnéticas, será visto que a velocidade da onda para um meio qualquer é dada por

$$U = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{m}\epsilon}}.$$

Porém, como segundo a relatividade, nada pode ultrapassar a velocidade da luz, então a variação de densidade de carga em um ponto não gera um potencial em um ponto distante instantaneamente, mas após algum tempo. Dessa forma, considera-se que os geradores do campo potencial  $\mathbf{r}$  e  $\vec{J}$ , passam a ser  $[\mathbf{r}]$  e  $[\vec{J}]$ , tal que

$$V = \int_{vol} \frac{[\mathbf{r}]dv}{4\pi\epsilon R}$$

e

$$\vec{A} = \int_{vol} \frac{\mathbf{m}[\vec{J}]dv}{4\pi R}$$

em que o valor entre colchetes ( $[\mathbf{r}]$  ou  $[\vec{J}]$ ) são interpretados como sendo retardados no tempo, onde em toda expressão, o valor de  $t$  é substituído por

$$t' = t - \frac{R}{U},$$

com  $R$  sendo o raio, ou distância onde se está medindo a potência e  $U$  a velocidade descrita anteriormente.

**Exemplo 3.3:** Seja  $\mathbf{r} = 2pe^{-3t}$ . Assim, para calcular o valor do potencial em um ponto distante  $R$ , sendo o meio de propagação o espaço livre, tem-se

$$[\mathbf{r}] = 2pe^{-3\left(t - \frac{R}{3 \times 10^8}\right)}$$

que é utilizada na Equação (3.50) para encontrar  $V$ .

## Ondas Eletromagnéticas

Foi estudado na seção anterior o efeito da variação dos campos nas equações de Maxwell e a relação direta entre o campo elétrico e magnético. Um dos casos mais consideráveis a ser estudado se

refere ao caso da variação permanente de um dos campos na forma cossenoidal e sua conseqüente influência no outro. Esta forma define a formação de uma onda eletromagnética, desde que, considerando esta variação no campo elétrico, há uma constante formação de um campo magnético e vice-versa. Para trabalhar com estas estruturas, escrevem-se as equações de Maxwell no espaço livre, onde não há cargas distribuídas nem densidade de corrente circulando, como:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{E} &= 0 \\ \nabla \times \vec{E} &= -\mathbf{m}_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{H} &= 0 \\ \nabla \times \vec{H} &= \mathbf{e}_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\end{aligned}$$

Quando se considera a variação de um campo na forma de uma função cossenoidal, relaciona-se todo o sistema descritivo dos campos com os números complexos e com os fasores. Considerando que um campo elétrico

$$\vec{E} = E_x \vec{a}_x = E_{xyz} \cos(\mathbf{w}t + \mathbf{f}) \vec{a}_x$$

em que  $E_{xyz}$  é uma função de  $x$ ,  $y$  e  $z$ , podendo ser também de  $\mathbf{w}$ , mas nunca de  $t$  (pois este valor é a amplitude máxima da onda que pode variar com a posição ou com a freqüência, como é o caso da tensão que passa num capacitor, mas não com o tempo: a função do tempo está definida no cosseno), e  $\mathbf{f}$  é o ângulo de fase que também pode ser função das mesmas variáveis de  $E_{xyz}$ .

Utilizando a identidade de Euler, encontra-se

$$E_x = \text{Re}\{E_{xyz} \cos(\mathbf{w}t + \mathbf{f}) + j E_{xyz} \text{sen}(\mathbf{w}t + \mathbf{f})\} = \text{Re}\{E_{xyz} e^{j(\mathbf{w}t + \mathbf{f})}\} = \text{Re}\{E_{xyz} e^{j\mathbf{f}} e^{j\mathbf{w}t}\}$$

Ou, em forma de fasor, obtém-se  $E_{xs} = E_{xyz} e^{j\mathbf{f}}$ , onde o índice  $s$  indica uma quantidade no domínio da freqüência, em que a quantidade real no domínio do tempo pode ser feita pela multiplicação de  $e^{j\mathbf{w}t}$ , retirando a parte real via função Re.

Deve-se observar que qualquer vetor na forma de fasor, a derivada em relação ao tempo equivale a multiplicar o fasor por  $j\mathbf{w}$ . Por exemplo, sendo

$$E_x = E_{xyz} \cos(\mathbf{w}t + \mathbf{f}) = \text{Re}\{E_{xyz} e^{j(\mathbf{w}t + \mathbf{f})}\}$$

então,

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = -\mathbf{w} E_{xyz} \text{sen}(\mathbf{w}t + \mathbf{f}) = \text{Re}\{j\mathbf{w} E_{xyz} e^{j(\mathbf{w}t + \mathbf{f})}\}$$

e, tomando a última parte desta equação, tem-se

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_x}{\partial t} &= \text{Re}\{j\mathbf{w} E_{xyz} e^{j(\mathbf{w}t + \mathbf{f})}\} \\ &= \text{Re}\{j\mathbf{w} E_{xyz} (\cos(\mathbf{w}t + \mathbf{f}) + j\text{sen}(\mathbf{w}t + \mathbf{f}))\} \\ &= \text{Re}\{j\mathbf{w} E_{xyz} \cos(\mathbf{w}t + \mathbf{f}) - \mathbf{w} E_{xyz} \text{sen}(\mathbf{w}t + \mathbf{f})\} \\ &= -\mathbf{w} E_{xyz} \text{sen}(\mathbf{w}t + \mathbf{f})\end{aligned}$$

Em termos de fasores,

$$\frac{\partial E_{xs}}{\partial t} = \frac{\partial(E_{xyz} e^{j\mathbf{f}})}{\partial t} = \frac{\partial(E_{xyz} e^{j\mathbf{f}} e^{j\mathbf{w}t})}{\partial t} = j\mathbf{w} E_{xyz} e^{j\mathbf{f}} e^{j\mathbf{w}t} = j\mathbf{w} E_{xyz} e^{j\mathbf{f}} = j\mathbf{w} E_{xs}$$

Com este formalismo apresentado, representam-se as equações de Maxwell quando considerando variações senoidais, na forma de fasores de maneira simples, como a seguir:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{E}_s &= 0 \\ \nabla \times \vec{E}_s &= -j\omega\mathbf{m}_0 \vec{H}_s \\ \nabla \cdot \vec{H}_s &= 0 \\ \nabla \times \vec{H}_s &= j\omega\mathbf{e}_0 \vec{E}_s\end{aligned}$$

Para solucionar as equações de Maxwell de uma forma simplificada, utiliza-se o procedimento a seguir, que leva a equação conhecida por Equação de Ondas:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E}_s = -j\omega\mathbf{m}_0 \nabla \times \vec{H}_s.$$

Pela identidade vetorial:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{A} = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A},$$

em que  $\vec{A}$  é um vetor qualquer, encontra-se

$$\begin{aligned}\nabla(\nabla \cdot \vec{E}_s) - \nabla^2 \vec{E}_s &= -j\omega\mathbf{m}_0 \nabla \times \vec{H}_s \\ 0 - \nabla^2 \vec{E}_s &= -j\omega\mathbf{m}_0 \nabla \times \vec{H}_s \\ \nabla^2 \vec{E}_s &= j\omega\mathbf{m}_0 \nabla \times \vec{H}_s \\ \nabla^2 \vec{E}_s &= j\omega\mathbf{m}_0 (j\omega\mathbf{e}_0 \vec{E}_s) \\ \nabla^2 \vec{E}_s &= -\omega^2 \mathbf{m}_0 \mathbf{e}_0 \vec{E}_s\end{aligned}$$

em que esta última equação, ou Equação de Onda, também é conhecida por Equação Vetorial de Helmholtz. A equação de onda é uma equação que pode ser expandida em termos de equações escalares e solucionadas. Por exemplo, para a componente de  $x$ , tem-se

$$\nabla^2 E_{xs} = -\omega^2 \mathbf{m}_0 \mathbf{e}_0 E_{xs}$$

ou

$$\frac{\partial^2 E_{xs}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_{xs}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_{xs}}{\partial z^2} = -\omega^2 \mathbf{m}_0 \mathbf{e}_0 E_{xs}.$$

Para a componente de  $y$ , tem-se

$$\nabla^2 E_{ys} = -\omega^2 \mathbf{m}_0 \mathbf{e}_0 E_{ys}$$

ou

$$\frac{\partial^2 E_{ys}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_{ys}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_{ys}}{\partial z^2} = -\omega^2 \mathbf{m}_0 \mathbf{e}_0 E_{ys}$$

e para  $z$ ,

$$\nabla^2 E_{zs} = -\omega^2 \mathbf{m}_0 \mathbf{e}_0 E_{zs}$$

ou

$$\frac{\partial^2 E_{zs}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_{zs}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_{zs}}{\partial z^2} = -\omega^2 \mathbf{m}_0 \mathbf{e}_0 E_{zs}.$$

De uma forma simplificada, pode-se solucionar a equação de onda, considerando que o campo elétrico só tenha componente em  $x$  e esta não varie com  $y$  ou  $z$ . Dessa forma, as derivadas de  $E_{xs}$  em relação à estas variáveis se tornam zero, o que resulta em uma equação diferencial ordinária, dada por

$$\frac{d^2 E_{xs}}{dz^2} = -\omega^2 \mathbf{m}_0 \mathbf{e}_0 E_{xs},$$

a qual tem como solução  $E_{xs} = E_{x0} e^{-j\omega\sqrt{\mathbf{m}_0 \mathbf{e}_0} z}$ , ou, no domínio do tempo,

$$E_x = \text{Re} \left\{ E_{x0} e^{-j\omega\sqrt{\mathbf{m}_0 \mathbf{e}_0} z e^{j\omega t}} \right\} = E_{x0} \cos(\omega(t - z\sqrt{\mathbf{m}_0 \mathbf{e}_0})) = E_{x0} \cos(\omega t - \mathbf{b}z),$$

em que  $E_{x0}$  é o valor da magnitude máxima de  $E_x$  no ponto  $z = 0$  em  $t = 0$ , e  $\mathbf{b} = \omega\sqrt{\mathbf{m}_0 \mathbf{e}_0}$  é a constante de fase ou número de onda, medido em  $rad/m$ . Observa-se neste resultado o valor

$$\sqrt{\mathbf{m}_0 \mathbf{e}_0} = \sqrt{4\mathbf{p} \times 10^{-7} \times 8,854 \times 10^{-12}} \cong \frac{1}{3 \times 10^8} = \frac{1}{c}$$

$$c \cong 3 \times 10^8 \text{ m/s} = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{m}_0 \mathbf{e}_0}} = \text{velocidade da luz no espaço livre}$$

e, conseqüentemente, o termo  $z\sqrt{\mathbf{m}_0 \mathbf{e}_0} = \frac{z}{c}$  tem unidades de tempo, o que indica que este tempo representa o atraso que apresenta uma onda para sair de um ponto inicial e ir a um ponto final a  $z$  metros de distância.

Disto, encontra-se também que  $\mathbf{b} = \frac{\omega}{c}$ .

Por outro lado, considerando  $t = 0$ , encontra-se o termo do cosseno como

$$-\omega z \sqrt{\mathbf{m}_0 \mathbf{e}_0} = -\frac{\omega z}{c}.$$

Desde que o cosseno é uma função par, pode-se desprezar o sinal para entender este termo. Assim, observando que para distâncias periódicas  $z$ , o cosseno deste termo repete seu valor, denomina-se então  $\mathbf{l} = z$  de comprimento de onda, tal que

$$\frac{\omega \mathbf{l}}{c} = 2\mathbf{p},$$

que implica dizer

$$\frac{\mathbf{l}}{c} = \frac{2\mathbf{p}}{\omega} = \frac{2\mathbf{p}}{2\mathbf{p}f},$$

ou

$$\mathbf{l} = \frac{c}{f}$$

e, conseqüentemente

$$\mathbf{b} = \frac{2\mathbf{p}}{\mathbf{l}}.$$

A onda, então, propaga-se na direção  $+z$ , onde se pode observar que para um ponto  $P$  onde  $E_x$  é constante, é necessário que  $\omega t - \mathbf{b}z = k$ , onde  $k$  é uma constante e, desde que o valor desta equação seja constante (embora  $t$  e  $z$  variem), então se o tempo necessariamente cresce,  $z$  também cresce linearmente, de forma que o valor da fase não muda. Em outros termos, tomando a derivada, tem-se

$$\frac{dz}{dt} = \frac{w}{b} = c.$$

Este caso é visto na Figura 4.1, onde o ponto  $P$  é localizado sempre na crista da onda e, com o passar do tempo, sua posição em  $z$  vai mudando. Assim, vê-se que o campo elétrico está em movimento, sendo chamado de Onda Caminhante, ou Onda Progressiva.

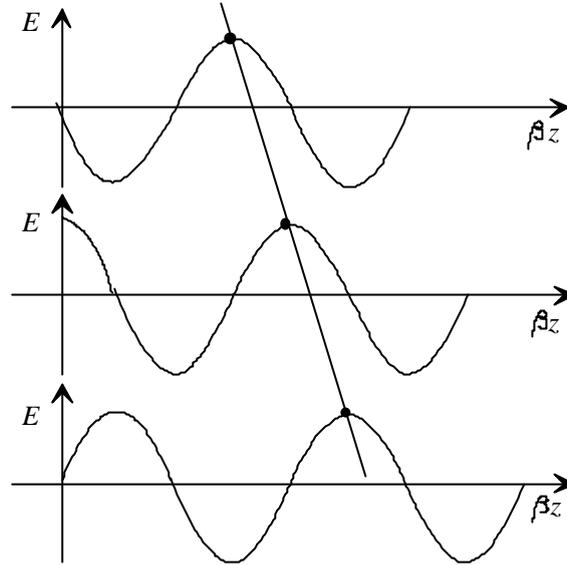


Figura 5: Onda caminhante.

Com este resultado obtido, analisa-se a partir deste momento, o campo magnético, utilizando a Equação de Maxwell na forma de fasores:

$$\nabla \times \vec{H}_s = j\omega \epsilon_0 \vec{E}_s.$$

Desde que se está considerando apenas a componente  $E_{xs}$  que varia apenas com  $z$ , então

$$\frac{\partial E_{xs}}{\partial z} = -j\omega \mu_0 H_{ys}.$$

Do valor de  $E_{xs}$  encontrado anteriormente, tem-se

$$\frac{\partial E_{xs}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} (E_{x0} e^{-j\omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}z}) = \frac{\partial}{\partial z} (E_{x0} e^{-jbz}) = -jbE_{x0} e^{-jbz} = -j\omega\mu_0 H_{ys}$$

e, dessa forma,

$$H_{ys} = \frac{bE_{x0}}{\omega\mu_0} e^{-jbz} = \frac{w\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}{\omega\mu_0} E_{x0} e^{-jbz} = E_{x0} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} e^{-jbz}$$

que, passando para o domínio do tempo, encontra-se

$$H_y = \text{Re} \left\{ E_{x0} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} [\cos(\mathbf{w}t - \mathbf{b}z) + j \text{sen}(\mathbf{w}t - \mathbf{b}z)] \right\} = E_{x0} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \cos(\mathbf{w}t - \mathbf{b}z)$$

$$= E_{x0} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \cos \left( \mathbf{w} \left( t - \frac{z}{c} \right) \right)$$

Observa-se que a componente do campo elétrico se movimenta na direção  $z$  com um campo magnético perpendicular. Além disso, tomando a relação entre estas componentes, tem-se

$$\frac{E_x}{H_y} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}},$$

que é constante, determinando que os campos estão em fase. Este valor é denominado de impedância intrínseca, denotado por  $h$ , ou

$$h = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

em uma forma generalizada, tendo dimensões de  $\Omega$  (ohms). E sendo este valor considerado no espaço livre, encontra-se pela substituição direta dos valores de  $\mu_0$  e  $\epsilon_0$ , a impedância intrínseca do espaço livre, dada por

$$h_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 377 \Omega \cong 120 \pi \Omega.$$

Uma importante consideração é a denominação desta onda, a qual é chamada de onda plana uniforme, pois seu valor é uniforme ao longo do plano  $z = \text{constante}$ , representando um fluxo de energia na direção de  $+z$ . E, como os campos elétrico e magnético são perpendiculares à direção de propagação, esta onda é chamada de onda Transversal Eletromagnética (ou onda TEM).

Deve-se observar que a onda TEM fisicamente não pode existir, pois ela se estende ao infinito em duas dimensões, o que representa uma quantidade infinita de energia, embora alguns casos como o campo distante de uma antena transmissora seja uma onda plana para uma região limitada. Também, deve-se observar que o caso tratado aqui, não limita os resultados das ondas, pois qualquer sinal como uma onda quadrada, triangular, etc., pode ser formalizado em termos de soma de infinitas senóides via Séries de Fourier.

## O Vetor de Poynting

Uma onda eletromagnética apresenta uma potência que é carregada em seus campos, desde que estes apresentam uma energia acumulada. A determinação da potência em uma onda eletromagnética é baseada em um teorema, conhecido por Teorema de Poynting. Para apresentar este teorema, inicia-se pela Equação de Maxwell

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

em que, fazendo o produto escalar com o campo elétrico  $\vec{E}$ , encontra-se

$$\vec{E} \cdot \nabla \times \vec{H} = \vec{J} \cdot \vec{E} + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

Através da identidade vetorial:  $\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = -\vec{A} \cdot \nabla \times \vec{B} + \vec{B} \cdot \nabla \times \vec{A}$ , e identificando  $\vec{A}$  com  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  com  $\vec{H}$ , tem-se que o primeiro termo do segundo membro desta identidade é o negativo do primeiro membro da Equação (4.13). Assim, tem-se

$$\vec{H} \cdot \nabla \times \vec{E} - \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = \vec{J} \cdot \vec{E} + \dot{\vec{E}} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

Entretanto, a Equação de Maxwell fornece

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$$

e dessa forma,

$$-\vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = \vec{J} \cdot \vec{E} + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

Como no espaço livre  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$  e  $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ , então, encontra-se

$$-\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = \vec{J} \cdot \vec{E} + \epsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}.$$

Além do mais,

$$\epsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\epsilon_0}{2} \frac{\partial E^2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\epsilon_0 E^2}{2} \right)$$

que pode ser provada facilmente, desde que  $\vec{E}$  é uma função de um cosseno.

Da mesma forma, tem-se

$$\mu_0 \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \frac{\mu_0}{2} \frac{\partial H^2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\mu_0 H^2}{2} \right)$$

Daí, substituindo na equação anterior, encontra-se

$$-\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = \vec{J} \cdot \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu_0 H^2}{2} \right)$$

que integrando em um volume, encontra-se

$$-\int_{vol} \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) dv = \int_{vol} \vec{J} \cdot \vec{E} dv + \frac{\partial}{\partial t} \int_{vol} \left( \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu_0 H^2}{2} \right) dv.$$

O primeiro termo desta equação pode ser transformado em uma integral de superfície utilizando o Teorema da Divergência,

$$\int_{vol} \nabla \cdot \vec{A} dv = \oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S}$$

o que resulta em

$$-\oint_S (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot d\vec{S} = \int_{vol} \vec{J} \cdot \vec{E} dv + \frac{\partial}{\partial t} \int_{vol} \left( \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu_0 H^2}{2} \right) dv.$$

Nesta equação, observa-se em analogia com a Lei de Gauss, o primeiro membro indica um fluxo que atravessa uma superfície fechada. Entretanto, olhando para o segundo membro da equação, vê-se que ambos os termos têm unidades de potência. Logo, o que flui, atravessando normalmente a superfície fechada da integral do primeiro membro é a potência que entra no volume limitado pela superfície. O primeiro termo do segundo membro da equação é a potência ôhmica total dissipada dentro do volume, e a integral do segundo termo é a energia total armazenada nos campos elétrico e magnético. Como há uma

derivada no tempo, este segundo termo do segundo membro da equação é uma potência instantânea que incrementa a energia dentro deste volume. E, se

$$-\oint_S (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot d\vec{S}$$

é a potência que entra no volume limitado pela superfície, então

$$\oint_S (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot d\vec{S}$$

é a potência que sai normalmente do volume. E dessa forma, denomina-se de vetor de Poynting, denotado por  $\vec{P}$ , o produto vetorial nesta integral. Ou seja,

$$\vec{P} = \vec{E} \times \vec{H}$$

que é a densidade de potência instantânea, cujas unidades de medida são  $W/m^2$ .

Através do vetor de Poynting, comprova-se o que foi citado anteriormente, em que uma onda com campo elétrico na direção  $x$  e um campo magnético na direção  $y$  se propaga na direção  $z$ , pois

$$E_x \vec{a}_x \times H_y \vec{a}_y = P_z \vec{a}_z.$$

Deve-se observar que para calcular o valor médio de uma função periódica, integra-se a função ao longo de um ciclo completo, dividindo o resultado pelo período  $T=1/f$ . Assim, utilizando-se deste procedimento, encontra-se a densidade média de potência no tempo por meio de:

$$P_{med} = \frac{1}{T} \int_0^T |\vec{P}| dt = \frac{1}{T} \int_0^T |\vec{E} \times \vec{H}| dt.$$

## Propagação das Ondas em Outros Meios

### Propagação de Ondas Eletromagnéticas em Dielétricos Perfeitos

Introduz-se aqui a primeira discussão da propagação das ondas eletromagnéticas em um meio que não é o espaço livre. Dessa forma, sendo um dielétrico perfeito (sem perdas), sabendo que neste meio só há dipolos (meio isotrópico e homogêneo), o que define uma carga total nula, e tendo este dielétrico permissividade  $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$  e permeabilidade  $\mu = \mu_r \mu_0$ , então a Equação de Ondas se torna

$$\nabla^2 \vec{E}_s = -\omega^2 \mu \epsilon \vec{E}_s = -\omega^2 \mu_r \mu_0 \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E}_s$$

Considerando o exemplo trabalhado no Capítulo anterior, isto é, que  $\vec{E}_s = E_{xs} \vec{a}_x$  e que  $E_{xs}$  só varia com  $z$ , então

$$\frac{\partial^2 E_{xs}}{\partial z^2} = -\omega^2 \mu \epsilon E_{xs}.$$

A solução desta equação é simples como vista na seção anterior, considerando a permeabilidade  $\mu = \mu_r \mu_0$  e a permissividade  $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$ . Entretanto, para se mostrar que não há perdas neste meio, considera-se que há uma atenuação exponencial na solução, que é da forma:

$$E_x = E_{x0} e^{-\mathbf{a}z} \cos(\omega t - \mathbf{b}z),$$

ou

$$E_{xs} = E_{x0} e^{-\mathbf{a}z} e^{-j\mathbf{b}z} \quad (*)$$

onde  $\mathbf{a}$  é a constante de atenuação, e se deseja provar que  $\mathbf{a} = 0$  (sem perdas).

Como na Equação (\*) se tem duas exponenciais, esta equação pode ser escrita como

$$E_{xs} = E_{x0} e^{-(a+jb)z} = E_{x0} e^{-\mathbf{g}},$$

onde  $\mathbf{g} = \mathbf{a} + j\mathbf{b}$  é a constante de propagação complexa.

Colocando esta nova formulação de  $E_{xs}$  na Equação de Onda, encontra-se

$$\mathbf{g}^2 E_{x0} e^{-\mathbf{g}z} = -\mathbf{w}^2 \mathbf{m}\mathbf{e} E_{x0} e^{-\mathbf{g}z}$$

que solucionando dá  $\mathbf{g}^2 = -\mathbf{w}^2 \mathbf{m}\mathbf{e}$  ou  $\mathbf{g} = \pm \sqrt{-\mathbf{w}^2 \mathbf{m}\mathbf{e}} = \pm j\mathbf{w}\sqrt{\mathbf{m}\mathbf{e}}$ . Isto é, como  $\mathbf{g} = \mathbf{a} + j\mathbf{b}$ , percebe-se que só há o valor complexo  $\mathbf{g} = \pm j\mathbf{w}\sqrt{\mathbf{m}\mathbf{e}} = \pm j\mathbf{b}$ , ou  $\mathbf{b} = \pm \mathbf{w}\sqrt{\mathbf{m}\mathbf{e}}$  e  $\mathbf{a} = 0$ , como era desejado comprovar, ou seja, não há perdas em um dielétrico perfeito.

Considerando a propagação positiva ( $\mathbf{b} = + \mathbf{w}\sqrt{\mathbf{m}\mathbf{e}}$ ), então,  $E_x = E_{x0} \cos(\mathbf{w}t - \mathbf{b}z)$  e sua velocidade de propagação é

$$U = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{m}\mathbf{e}}} = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{m}_0 \mathbf{e}_0}} \frac{1}{\sqrt{\mathbf{m}_R \mathbf{e}_R}} = \frac{c}{\sqrt{\mathbf{m}_R \mathbf{e}_R}}$$

o que se pode observar que em qualquer meio, a onda se propaga mais lenta que no espaço livre, pois  $\sqrt{\mathbf{m}_R \mathbf{e}_R}$  é sempre maior que 1. Além disso, tem-se que o comprimento de onda é dado por

$$\mathbf{l} = \frac{U}{f} = \frac{c}{f \sqrt{\mathbf{m}_R \mathbf{e}_R}} = \frac{\mathbf{l}_0}{\sqrt{\mathbf{m}_R \mathbf{e}_R}}$$

que mostra que o comprimento de onda também é reduzido ao entrar em um meio que não seja o espaço livre.

Por outro lado, o campo magnético associado ao campo elétrico  $E_x$  é dado por

$$H_y = \frac{E_{x0}}{\mathbf{h}} \cos(\mathbf{w}t - \mathbf{b}z)$$

tal que, a relação entre os campos define a impedância intrínseca que é

$$\mathbf{h} = \frac{E_x}{H_y} = \sqrt{\frac{\mathbf{m}_R}{\mathbf{e}_R}} = \sqrt{\frac{\mathbf{m}_0}{\mathbf{e}_0}} \sqrt{\frac{\mathbf{m}_R}{\mathbf{e}_R}} = \mathbf{h}_0 \sqrt{\frac{\mathbf{m}_R}{\mathbf{e}_R}} = 377 \sqrt{\frac{\mathbf{m}_R}{\mathbf{e}_R}} \Omega$$

que se pode ver que para meios dielétricos e não magnéticos, a impedância intrínseca é sempre menor que a do espaço livre.

Um exemplo típico pode ser visto como a seguir: considerando uma onda de 3GHz, com  $E_{x0} = 1$  V/m, que se propaga no espaço livre tem

$$U = c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$$

$$\mathbf{l} = \mathbf{l}_0 = \frac{c}{f} = \frac{3 \times 10^8}{3 \times 10^9} = 0,1 \text{ m}$$

$$\mathbf{h} = \mathbf{h}_0 = 377 \Omega$$

$$\mathbf{b} = \frac{2\mathbf{p}}{\mathbf{l}} = 62,8 \text{ rad/m}$$

e, dessa forma

$$E_x = \cos(6\mathbf{p} \times 10^9 t - 62,8z) \text{ V/m}$$

$$H_y = \frac{E_x}{\mathbf{h}} = 2,653 \times 10^{-3} \cos(6\mathbf{p} \times 10^9 t - 62,8z) \text{ A/m}$$

$$P_{z,med} = \frac{E_{x0}^2}{2h_0} = 0,0013263 \text{ W.}$$

Entretanto, considerando que esta onda esteja passando por um meio dielétrico perfeito, com  $m_R = 1$  e  $e_R = 250$ , então

$$U = \frac{c}{\sqrt{m_R e_R}} = \frac{3 \times 10^8}{\sqrt{250}} = 1,8973 \times 10^7 \text{ m/s}$$

$$l = \frac{l_0}{\sqrt{m_R e_R}} = \frac{0,1}{\sqrt{250}} = 6,325 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$h = h_0 \sqrt{\frac{m_R}{e_R}} = 377 \sqrt{\frac{1}{250}} = 23,844 \text{ } \Omega$$

$$b = \frac{2p}{l} = 993,389 \text{ rad/m}$$

e,

$$E_x = \cos(6p \times 10^9 t - 993,389 z) \text{ V/m}$$

$$H_y = \frac{E_x}{h} = 41,9 \times 10^{-3} \cos(6p \times 10^9 t - 993,389 z) \text{ A/m}$$

$$P_{z,med} = \frac{E_{x0}^2}{2h} = 0,02097 \text{ W.}$$

onde se pode ver que a velocidade da onda reduz bastante, bem como o comprimento de onda e a impedância intrínseca. Entretanto, a constante de fase aumenta e a potência média da onda, idem.

### **Propagação de Ondas Eletromagnéticas em Dielétricos com Perdas**

Quando se consideram materiais com perdas, implica dizer que sua condutividade é finita, o que indica que há resistividade e conseqüente perda ôhmica. Assim, os materiais dielétricos reais apresentam uma certa condutividade que em muitos casos podem ser desprezada, mas é necessário que um critério seja estabelecido para que isto seja possível, como será visto a seguir.

Iniciando com a equação de Maxwell  $\nabla \times \vec{H}_s = \vec{J}_s + j\omega \vec{E}_s$  e sabendo que a corrente de condução é dada por  $\vec{J}_s = \mathbf{s} \vec{E}_s$ , então,

$$\nabla \times \vec{H}_s = \mathbf{s} \vec{E}_s + j\omega \vec{E}_s = (\mathbf{s} + j\omega) \vec{E}_s$$

e, como  $\nabla \times \vec{E}_s = -j\omega \vec{H}_s$ , então, do que foi visto na Seção anterior, a constante de propagação se torna  $\mathbf{g}^2 = (\mathbf{s} + j\omega) j\omega = \pm \sqrt{(\mathbf{s} + j\omega) j\omega}$ , onde se pode ver que o efeito da condutividade incluída  $\mathbf{s}$ , mudou o valor da constante de propagação  $\mathbf{g}$ .

Desenvolvendo este novo termo de  $\mathbf{g}$ , tem-se

$$\begin{aligned}
\mathbf{g} &= \sqrt{(\mathbf{s} + j\mathbf{w}\mathbf{e})j\mathbf{w}\mathbf{m}} \\
\mathbf{g} &= \sqrt{(j\mathbf{w})^2 \left( \frac{\mathbf{s}}{j\mathbf{w}} + \mathbf{e} \right) \mathbf{m}} \\
\mathbf{g} &= j\mathbf{w} \sqrt{\mathbf{m}\mathbf{e} \left( \frac{\mathbf{s}}{j\mathbf{w}\mathbf{e}} + 1 \right)} \\
\mathbf{g} &= j\mathbf{w} \sqrt{\mathbf{m}\mathbf{e}} \sqrt{1 - j \frac{\mathbf{s}}{\mathbf{w}\mathbf{e}}}
\end{aligned}$$

onde foi desprezado o sinal negativo da equação anterior, por estar sendo considerada a propagação em  $z$  positivo.

Deve-se observar que, se o dielétrico for perfeito, não há corrente de condução  $\vec{J}$ , o que implica que há uma resistividade infinita (isolante perfeito) ou que a condutividade é zero ( $\mathbf{s} = 0$ ) e, então, a constante de propagação  $\mathbf{g}$  torna-se a mesma descrita anteriormente, em que  $\mathbf{a} = 0$ .

Considerando os valores de  $\mathbf{w}$ ,  $\mathbf{e}$ ,  $\mathbf{m}$  e  $\mathbf{s}$ , pode-se calcular o valor de  $\mathbf{g}$  em coordenadas retangulares, e encontrar os valores respectivos de  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$ , como as partes reais e imaginárias, como  $\mathbf{g} = \mathbf{a} + j\mathbf{b}$ . Além do mais, através de  $\mathbf{g}$ , considerando o exemplo trabalhado nestes Capítulos, encontra-se que o campo elétrico é dado por  $E_{xs} = E_{x0} e^{-\mathbf{a}z} e^{-j\mathbf{b}z}$  e, o campo magnético é dado por

$$H_{ys} = \frac{E_{xs}}{\mathbf{h}} = \frac{E_{x0}}{\mathbf{h}} e^{-\mathbf{a}z} e^{-j\mathbf{b}z}$$

onde

$$\begin{aligned}
\mathbf{h} &= \frac{H_{ys}}{E_{xs}} \\
\mathbf{h} &= \sqrt{\frac{j\mathbf{w}\mathbf{m}}{\mathbf{s} + j\mathbf{w}\mathbf{e}}} \\
\mathbf{h} &= \sqrt{\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{e}}} \sqrt{\frac{j\mathbf{w}}{\frac{\mathbf{s}}{\mathbf{e}} + j\mathbf{w}}} \\
\mathbf{h} &= \sqrt{\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{e}}} \sqrt{\frac{1}{\frac{\mathbf{s}}{j\mathbf{w}\mathbf{e}} + 1}} \\
\mathbf{h} &= \sqrt{\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{e}}} \frac{1}{\sqrt{\frac{\mathbf{s}}{j\mathbf{w}\mathbf{e}} + 1}} \\
\mathbf{h} &= \sqrt{\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{e}}} \frac{1}{\sqrt{1 - j \frac{\mathbf{s}}{\mathbf{w}\mathbf{e}}}},
\end{aligned}$$

em que se pode ver que os campos elétrico e magnético não mais estão em fase no tempo, pois há uma variação complexa entre os dois. Isto ocorre por que a pequena parte da corrente de condução, a qual tem a mesma fase do campo elétrico, é defasado de  $90^\circ$  em relação à corrente de deslocamento, e conseqüentemente, a componente vetorial equivalente dada pela soma das duas densidades de corrente não mais mantém a diferença de  $90^\circ$  em relação ao campo elétrico, como pode ser visto na Figura 5.

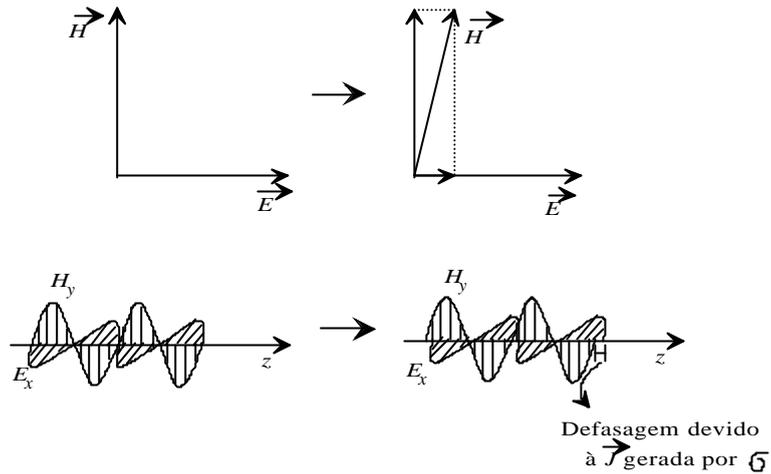


Figura 5: Defasagem entre os campos elétricos e magnéticos em um dielétrico com perdas.

Com o fator  $\alpha$ , ou a constante de atenuação, pode-se observar que à medida que a onda se propaga em direção à  $z$ , o termo exponencial  $e^{-\alpha z}$  implica em uma redução na amplitude da onda, tanto no campo elétrico, como no campo magnético, como se pode ver na Figura 6, onde além da atenuação, vê-se a defasagem entre o campo elétrico e o campo magnético.

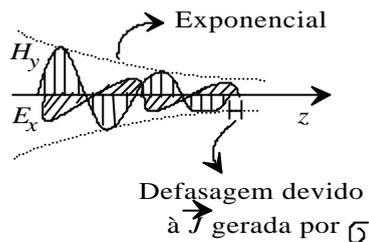


Figura 6: Atenuação e defasagem em uma onda eletromagnética.

Como um exemplo direto, considerando uma onda com  $\omega = 2 \times 10^{10} \text{ rad/s}$ ,  $\mu_R = 1$ ,  $\epsilon_R = 200$  e  $\sigma = 50 \text{ /m}$ , tem-se

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{2 \times 10^{10}}{2\pi} = 3,183 \text{ GHz}$$

$$\frac{\sigma}{\omega \epsilon} = \frac{50}{2 \times 10^{10} \times 200 \times 8,854 \times 10^{-12}} = \frac{50}{35,416} = 1,412$$

e daí,

$$\mathbf{g} = j2 \times 10^{10} \sqrt{1 \times 4\pi \times 10^{-7} \times 200 \times 8,854 \times 10^{-12}} \sqrt{1 - j1,412}$$

$$\mathbf{g} = j943,452 \sqrt{1,73 \angle -54,7^\circ}$$

$$\mathbf{g} = 943,452 \angle 90^\circ \times 1,315 \angle -27,35^\circ$$

$$\mathbf{g} = 1240,64 \angle 62,65^\circ$$

$$\mathbf{g} = 569,98 + j1101,96 \text{ m}^{-1}$$

Como  $\mathbf{g} = \mathbf{a} + j\mathbf{b}$ , então

$$\mathbf{a} = 569,98 \text{ Np} / m$$

e

$$\mathbf{b} = 1101,96 \text{ rad} / m.$$

Conseqüentemente,

$$\begin{aligned} \mathbf{h} &= 377 \sqrt{\frac{1}{200} \frac{1}{\sqrt{1-j1,412}}} \\ \mathbf{h} &= \frac{377}{\sqrt{200}} \frac{1}{1,315 \angle -27,35^\circ} = \frac{26,66 \angle 0^\circ}{1,315 \angle -27,35^\circ} \\ \mathbf{h} &= 20,27 \angle 27,35^\circ = 18 + j9,31 \Omega \end{aligned}$$

que determina que  $E_x$  apresenta um campo magnético  $H_y$  defasado de  $27,35^\circ$  em cada ponto.

Além do mais, como  $\mathbf{a} = 569,98 \text{ Np} / m$ , após a onda percorrer a distância de  $z = 1,2161 \text{ mm}$ , então

$$e^{-\mathbf{a}z} = e^{-569,98 \times 1,2161 \times 10^{-3}} = 0,5$$

ou seja, a onda tem as amplitudes de seus campos atenuadas em 50% do seu valor nominal (a constante de atenuação é grande!).

Neste exemplo pôde-se ver o efeito de uma condutividade não desprezível, em que uma onda eletromagnética. Porém, como citado anteriormente, é necessário definir os critérios para não considerar o efeito de  $\mathbf{s}$ .

O problema de considerar pequenas perdas é uma questão de engenharia, dada pela magnitude da razão  $\frac{\mathbf{s}}{w\mathbf{e}}$ , comparada com a unidade. Deve-se observar que, da teoria de circuitos, é o termo imaginário de uma impedância que defasa a tensão da corrente. Da mesma forma, numa onda eletromagnética, este termo imaginário é quem defasa o campo elétrico do campo magnético. E, também se pode ver que é o valor  $\frac{\mathbf{s}}{w\mathbf{e}}$  que é responsável pelo termo imaginário, onde, quanto mais próximo de zero, mais  $\mathbf{h}$  tende a um valor real.

O termo  $\frac{\mathbf{s}}{w\mathbf{e}}$  é conhecido por tangente de perdas ( $\tan \mathbf{q}$ ), que é a razão

$$\tan \mathbf{q} = \frac{\mathbf{s}}{w\mathbf{e}} = \frac{\left| \overline{J_{s_s}} \right|}{\left| \overline{J_{d_s}} \right|},$$

que provem da Equação de Maxwell

$$\nabla \times \overline{H_s} = (\mathbf{s} + jw\mathbf{e}) \overline{E_s} = \overline{J_{s_s}} + \overline{J_{d_s}} = \overline{J_s}.$$

Vê-se que a corrente de condução  $\overline{J_{s_s}}$  é defasada de  $90^\circ$  da corrente de deslocamento. Então, a tangente de perdas se referencia à tangente do ângulo formado entre a densidade de corrente de deslocamento  $\overline{J_{d_s}}$  e a densidade de corrente total  $\overline{J_s}$ . Com a redução deste valor a zero, implica dizer que  $\overline{J_{d_s}} = \overline{J_s}$ , ou que não há defasagem entre os campos elétrico e magnéticos. Mas, considerando que as perdas não são grandes, há aproximações úteis para a constante de atenuação  $\mathbf{a}$ , para a constante de fase  $\mathbf{b}$

e para a impedância intrínseca  $\mathbf{h}$ , se  $\mathbf{s} < 0,1\mathbf{we}$ , ou  $\frac{\mathbf{s}}{\mathbf{we}} < 0,1$  para não haver muitos erros de aproximações. O termo

$$\mathbf{g} = j\mathbf{w}\sqrt{\mathbf{me}}\sqrt{1 - j\frac{\mathbf{s}}{\mathbf{we}}}$$

pode ser escrito como um binomial na forma

$$\mathbf{g} = j\mathbf{w}\sqrt{\mathbf{me}}\left[1 - j\frac{\mathbf{s}}{\mathbf{we}} + \frac{1}{8}\left(\frac{\mathbf{s}}{\mathbf{we}}\right)^2 + \dots\right]$$

em que os valores procurados de  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  e  $\mathbf{h}$  podem ser aproximados para

$$\mathbf{a} \cong j\mathbf{w}\sqrt{\mathbf{me}}\left(-j\frac{\mathbf{s}}{2\mathbf{we}}\right) = \frac{\mathbf{s}}{2}\sqrt{\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{e}}}$$

$$\mathbf{b} \cong \mathbf{w}\sqrt{\mathbf{me}}\left[1 + \frac{1}{8}\left(\frac{\mathbf{s}}{\mathbf{we}}\right)^2\right]$$

ou, em muitos casos

$$\mathbf{b} \cong \mathbf{w}\sqrt{\mathbf{me}}$$

e, também

$$\mathbf{h} \cong \sqrt{\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{e}}}\left[1 - \frac{3}{8}\left(\frac{\mathbf{s}}{\mathbf{we}}\right)^2 + j\frac{\mathbf{s}}{2\mathbf{we}}\right] \cong \sqrt{\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{e}}}\left[1 + j\frac{\mathbf{s}}{2\mathbf{we}}\right]$$

**Exemplo:** Considerando uma onda com frequência de 15,9 GHz e um dielétrico em que  $\epsilon_R = 50$  e  $\mathbf{s} = 20$  /m, então

$$\tan \mathbf{q} = \frac{\mathbf{s}}{\mathbf{we}} = \frac{20}{2\mathbf{p} \times 15,9 \times 10^9 \times 50 \times 8,854 \times 10^{-12}} = 0,452$$

que é um valor maior que 0,1. Entretanto, utilizando as aproximações definidas, encontram-se

$$\mathbf{a} = 533 \text{ Np/m}$$

$$\mathbf{b} = 2420 \text{ rad/m}$$

e, utilizando a primeira aproximação para  $\mathbf{h}$ , encontra-se

$$\mathbf{h} = 50,3 \angle 13,7^\circ = 49,2 + j 12,0 \Omega.$$

ou através da segunda aproximação

$$\mathbf{h} = 54,7 \angle 12,7^\circ = 53,3 + j 12,0 \Omega.$$

Observe que o valor real para  $\mathbf{h}$  é:

$$\mathbf{h} = 50,8 \angle 12,2^\circ = 49,6 + j 10,7 \Omega.$$

o que mostra que há um erro razoável. E por isto que se devem utilizar estas aproximações para os casos em que a tangente de perdas é menor que 0,1.

## O Vetor de Poynting em meios dielétricos

Quando uma onda atravessa um meio dielétrico que não seja o espaço livre, sua direção continua sendo dada pelo vetor de Poynting, embora outras condições sejam consideradas.

Em princípio, a equação do vetor de Poynting vista na seção anterior, é dada por  $\vec{P} = \vec{E} \times \vec{H}$ . Porém, em se tratando de um dielétrico  $\mathbf{e} = \mathbf{e}_R \mathbf{e}_0$  e  $\mathbf{m} = \mathbf{m}_R \mathbf{m}_0$ , toda a formulação para o vetor de Poynting muda apenas na inclusão desses termos, onde aparecem  $\mathbf{e}_0$  e  $\mathbf{m}_0$ , respectivamente. Assim, a equação citada passa a ser escrita como

$$-\oint_S (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot d\vec{S} = \int_{vol} \vec{J} \cdot \vec{E} dv + \frac{\partial}{\partial t} \int_{vol} \left( \frac{\mathbf{e}E^2}{2} + \frac{\mathbf{m}H}{2} \right) dv,$$

ou

$$-\oint_S (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot d\vec{S} = \int_{vol} \vec{J} \cdot \vec{E} dv + \frac{\partial}{\partial t} \int_{vol} \left( \frac{\mathbf{e}_R \mathbf{e}_0 E^2}{2} + \frac{\mathbf{m}_R \mathbf{m}_0 H}{2} \right) dv.$$

Esta Equação apresenta os mesmos valores para  $P_{z,med}$ , se o dielétrico considerado for perfeito (não houver perdas). Ou seja,

$$P_{z,med} = \frac{E_{x0}^2}{2\mathbf{h}}$$

onde

$$\mathbf{h} = \sqrt{\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{e}}}.$$

Entretanto, considerando que os campos  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$  não estão em fase no tempo, isto é,  $E_x = E_{x0} \cos(\mathbf{w}t - \mathbf{b}z)$  e  $H_y = \frac{E_{x0}}{\mathbf{h}} \cos(\mathbf{w}t - \mathbf{b}z)$ , em que  $\mathbf{h}$  é um número complexo, então a integral de

$P_{z,med}$  deve ser recalculada, resultando no valor  $P_{z,med} = \frac{E_{x0}^2}{2\mathbf{h}_m} e^{-2a_z} \cos \mathbf{q}_n$ , com  $\mathbf{h} = \mathbf{h}_m \angle \mathbf{q}_n$ .

## Propagação de Ondas Planas em Bons Condutores

Quando foi tratado o problema dos dielétricos com perdas e a propagação das ondas planas, viu-se que as perdas são geradas devido à pequena condutividade existente nos materiais (ou alta resistividade), que são apresentadas devido ao termo

$$\tan \mathbf{q} = \frac{\mathbf{s}}{\mathbf{we}},$$

que é a tangente de perdas, e algumas aproximações podem ser feitas para a constante de atenuação  $\mathbf{a}$ , a constante de fase  $\mathbf{b}$  e a impedância intrínseca  $\mathbf{h}$ , quando esta tangente de perdas é pequena ( $\tan \mathbf{q} = \frac{\mathbf{s}}{\mathbf{we}}, < 0,1$ ).

Entretanto, em se tratando de bons condutores, em que há uma condutividade alta e, conseqüentemente, grandes correntes de condução, a energia representada pela onda decresce rapidamente ao penetrar o material. Assim, se há boa condutividade implica dizer que

$$\tan \mathbf{q} = \frac{\mathbf{s}}{\mathbf{we}} \gg 1,$$

e, conseqüentemente, é possível determinar boas aproximações para os termos **a**, **b** e **h**.

Tomando como base o valor de **g**, tem-se

$$g = jw\sqrt{me} \sqrt{1 - j\frac{s}{we}}.$$

Como

$$\frac{s}{we} \gg 1,$$

então se pode aproximar o valor de **g** para

$$g = jw\sqrt{me} \sqrt{-j\frac{s}{we}}.$$

ou

$$g = j\sqrt{-j\frac{w^2 me s}{we}} = j\sqrt{-jwms}.$$

Transformando o termo dentro da raiz na forma polar, que é  $-jwms = wms\angle -90^\circ$  e, conseqüentemente,

$$g = j\sqrt{wms\angle -90^\circ} = j(\sqrt{wms}\angle -45^\circ) = j\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - j\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\sqrt{wms}.$$

E como  $w = 2\pi f$ , então  $g = (j1+1)\sqrt{pfms} = \sqrt{pfms} + j\sqrt{pfms}$ . Ou seja,  $a = b = \sqrt{pfms}$ , que se percebe que em um bom condutor, para qualquer valor de frequência, permeabilidade magnética ou condutividade do material, os valores da constante de atenuação e da constante de fase são iguais.

Considerando agora o exemplo trabalhado, então

$$E_x = E_{x0}e^{-z\sqrt{pfms}} \cos(\omega t - \sqrt{pfms} z)$$

dentro de um condutor. Se a onda está passando de um meio dielétrico perfeito em  $z < 0$ , para um meio condutor ( $z > 0$ ), então na fronteira ( $z = 0$ ), tem-se  $E_x = E_{x0} \cos(\omega t)$  que, ao adentrar no condutor ( $z > 0$ ), este campo passa a ter seu valor dado pela Equação (5.17). e, no condutor, a corrente de deslocamento é desprezível em relação à corrente de condução  $J = \mathbf{S}\mathbf{E}$ , tal que

$$J_x = \mathbf{S}E_x = \mathbf{S}E_{x0}e^{-z\sqrt{pfms}} \cos(\omega t - z\sqrt{pfms}).$$

**Exemplo:** Este caso típico pode ser exemplificado por uma antena receptora, em que a onda transmite sua energia ao metal condutor da antena. Esta, ao gerar esta corrente de condução, o circuito de ressonância (filtro de captação da portadora ou sintonia) percebe o sinal transmitido, e no circuito de demodulação, a informação é trabalhada, como se pode ver na Figura 7.

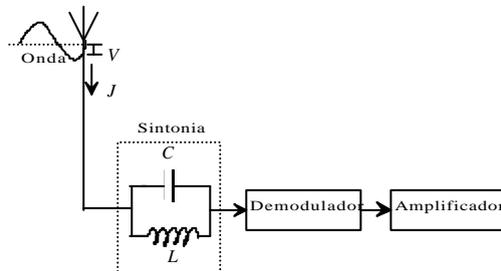


Figura 7: Diagrama de um circuito de recepção.

Após este exemplo, volta-se a discutir a respeito dos resultados encontrados para o campo elétrico e para a densidade de corrente de condução gerada com a transferência de energia da onda para o condutor. Primeiramente, observa-se que em ambos os casos há um decréscimo exponencial negativo, com a penetração no condutor. Este fator exponencial apresenta-se com valor unitário em  $z = 0$  ( $e^0 = 1$ ) e reduz seu valor para 0,368 ( $e^{-1}$ ) quando  $-z\sqrt{\rho f \mathbf{m} \mathbf{s}} = -1$  ou  $z = \frac{1}{\sqrt{\rho f \mathbf{m} \mathbf{s}}}$ . Em outros termos, a máxima corrente de condução está na superfície do condutor e cai rapidamente ao penetrá-lo. A distância definida nesta equação é denominada de *profundidade de penetração* ou *profundidade pelicular*, denotada por  $\mathbf{d}$ , ou

$$\mathbf{d} = \frac{1}{\sqrt{\rho f \mathbf{m} \mathbf{s}}} = \frac{1}{\mathbf{a}} = \frac{1}{\mathbf{b}}.$$

A profundidade pelicular é um parâmetro importante na descrição do comportamento do condutor em campos eletromagnéticos. Isto por que em um condutor qualquer, sendo ele um condutor não perfeito, em um campo elétrico estático, uma diferença de potencial é gerada, e os elétrons se movimentam através do retículo cristalino (entre as camadas de elétrons livres) em toda a seção do condutor, em que cada elétron pode ser visto como uma carga diferencial  $dQ$  que gera um vetor de densidade de corrente  $\vec{J}$  em uma área transversal diferencial do condutor, de forma que a resistência para um condutor de  $l$  metros de comprimento e área  $S$  de seção reta uniforme, com condutividade  $\mathbf{s}$ , tem resistência

$$R = \frac{l}{\mathbf{s}S},$$

onde se vê que os elétrons passam por toda a área do condutor. Por outro lado, considerando que haja uma onda eletromagnética de frequência  $f$ , o efeito pelicular existente garante que a área que as cargas podem penetrar seja menor, dada por  $S = \pi r^2 - \pi(r-d)^2 = \pi(r^2 - r^2 + 2rd - d^2) \cong 2\pi rd$ , desde que o termo  $d^2 \ll 2rd$  e pode ser desprezado. Assim, o efeito da penetração da onda em um condutor define que a área por onde passam as cargas seja menor, como visto na Figura 7.

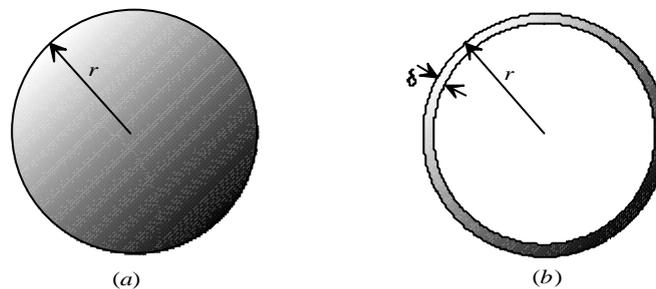


Figura 7: (a) Seção reta de um condutor cilíndrico com campo elétrico constante e uniforme e (b) efeito da profundidade de penetração da onda: a área por onde as cargas passam é menor.

E sendo a área menor, a resistência naturalmente é maior, pois a resistência em campos alternados se torna:

$$R = \frac{l}{\mathbf{s}S} = \frac{l}{2\pi r \mathbf{s} \mathbf{d}}.$$

**Exemplo:** Considerando que um condutor de alumínio ( $\mathbf{s} = 3,82 \times 10^7$  /m,  $\mathbf{m}_R = 1,00000065$ ) de 100 m de comprimento e área transversal de  $0,1 \text{ mm}^2$  está sujeito a um campo elétrico constante e uniforme, então sua resistência é dada por:

$$R_{DC} = \frac{l}{S} = \frac{100}{3,82 \times 10^7 \times 0,1 \times 10^{-6}} = 26,18 \Omega.$$

Entretanto, este mesmo condutor sujeito a uma onda de 1MHz, tem

$$d = \frac{1}{\sqrt{pfms}}$$

$$d = \frac{1}{\sqrt{pfm_r m_0 s}}$$

$$d = \frac{1}{\sqrt{p \times 10^6 \times 1,00000065 \times 4p \times 10^{-7} \times 3,82 \times 10^7}}$$

$$d = \frac{1}{\sqrt{150807653,3}} = \frac{1}{12280,377} = 8,94 \times 10^{-5} m$$

e

$$r = \sqrt{\frac{S}{p}} = \sqrt{\frac{0,1 \times 10^{-6}}{p}} = 1,784 \times 10^{-4} m.$$

E assim, encontra-se que

$$R_{AC} = \frac{l}{2p r d s}$$

$$R_{AC} = \frac{100}{2p \times 1,784 \times 10^{-4} \times 8,14 \times 10^{-5} \times 3,82 \times 10^7}$$

$$R_{AC} = \frac{100}{3,49} = 28,7 \Omega.$$

Este mesmo condutor sujeito a uma frequência de 1 GHz tem

$$d = 2,58 \times 10^{-6}$$

e

$$R_{AC} = \frac{100}{2p \times 1,784 \times 10^{-4} \times 2,58 \times 10^{-6} \times 3,82 \times 10^7}$$

$$R_{AC} = \frac{100}{0,110} = 90,7 \Omega$$

em que se vê que a resistência cresce muito com a frequência.

Nos casos da frequência da rede elétrica (60 Hz), este efeito é muito pequeno.

Continuando a discussão dos efeitos na onda eletromagnética em um bom condutor, é necessário verificar como são mudadas as expressões da velocidade, comprimento de onda, constante de fase, impedância intrínseca, bem como seus campos elétricos e magnéticos, vetor de Poynting e potência dissipada no condutor.

Tomando como base que  $b = \frac{2p}{l}$  e que  $b = \frac{1}{d} = \sqrt{pfms}$ , então  $l = 2pd$ . Para a velocidade, tem-se que  $U = fl$  e dessa forma,  $U = 2pfd = wd$ .

Completando as relações no bom condutor para as demais expressões, tem-se a impedância intrínseca, a qual é dada por

$$\mathbf{h} = \sqrt{\frac{j\omega\mathbf{m}}{\mathbf{s} + j\omega\mathbf{e}}}.$$

Porém, como  $\mathbf{s} \gg \omega\mathbf{e}$ , então

$$\mathbf{h} = \sqrt{\frac{j\omega\mathbf{m}}{\mathbf{s}}},$$

e, desde que  $\sqrt{j} = \sqrt{1\angle 90^\circ} = 1\angle 45^\circ$ , e

$$\mathbf{d} = \frac{1}{\sqrt{\rho j \mathbf{m} \mathbf{s}}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\omega\mathbf{m}}\sqrt{\mathbf{s}}}$$

pode-se escrever  $\mathbf{h}$  como

$$\begin{aligned}\mathbf{h} &= \sqrt{\frac{\omega\mathbf{m}}{\mathbf{s}}}\angle 45^\circ \\ \mathbf{h} &= \frac{\sqrt{\omega\mathbf{m}}}{\sqrt{\mathbf{s}}}\angle 45^\circ \times \frac{\sqrt{\mathbf{s}}\sqrt{2}}{\sqrt{\mathbf{s}}\sqrt{2}} \\ \mathbf{h} &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\mathbf{s}}}\angle 45^\circ \times \frac{\sqrt{\omega\mathbf{m}\mathbf{s}}}{\sqrt{2}} \\ \mathbf{h} &= \frac{\sqrt{2}}{\mathbf{s}\mathbf{d}}\angle 45^\circ\end{aligned}$$

ou

$$\mathbf{h} = \frac{1}{\mathbf{s}\mathbf{d}} + j\frac{1}{\mathbf{s}\mathbf{d}}$$

Dessa forma, encontra-se para  $E_x$  em termos de profundidade pelicular a forma definida por

$$E_x = E_{x0}e^{-\frac{z}{\mathbf{d}}}\cos\left(\omega t - \frac{z}{\mathbf{d}}\right)$$

e, o campo magnético dado por

$$H_y = \frac{E_x}{\mathbf{h}} = \frac{\mathbf{s}\mathbf{d}E_{x0}}{\sqrt{2}}e^{-\frac{z}{\mathbf{d}}}\cos\left(\omega t - \frac{z}{\mathbf{d}} - \frac{\mathbf{p}}{4}\right),$$

onde o atraso  $\frac{\mathbf{p}}{4}$  no cosseno determina que o campo magnético tem uma amplitude máxima ocorrendo a  $\frac{1}{8}$  do ciclo mais tarde que a da intensidade do campo elétrico a cada ponto.

Também, dados os valores de  $E_x$  e  $H_y$  em termos de profundidade pelicular, pode-se encontrar o vetor de Poynting médio, bem como a potência que atravessa a superfície de um condutor dentro de uma área  $0 < y < b$  e  $0 < x < L$  (na direção da corrente), como:

1) Vetor de Poynting médio:

$$P_{z,med} = \frac{\mathbf{s}\mathbf{d}E_{x0}^2}{2\sqrt{2}}e^{-\frac{2z}{\mathbf{d}}}\cos\frac{\mathbf{p}}{4},$$

ou

$$P_{z,med} = \frac{\mathbf{s}dE_{x0}^2}{4} e^{-\frac{2z}{d}}$$

onde para uma distância de uma profundidade pelicular a potência é reduzida para  $e^{-2} = 0,135 = 13,5\%$ ; e

2) Potência média atravessando a superfície do condutor:

$$P_{L,med} = \int_0^b \int_0^L \frac{\mathbf{s}dE_{x0}^2}{4} e^{-\frac{2z}{d}} \Big|_{z=0} dx dy$$

$$P_{L,med} = \frac{\mathbf{s}dbLE_{x0}^2}{4}$$

que, em termos da densidade de corrente  $J_{x0} = \mathbf{s} E_{x0}$  na superfície do condutor, encontra-se

$$P_{L,med} = \frac{dbLJ_{x0}^2}{4\mathbf{s}}$$

Com este resultado, se for considerado um condutor de profundidade infinita ( $z > 0$ ), então a perda de potência resultante para a corrente total na largura  $b$  distribuída uniformemente em  $d$ , pode ser obtida calculando a corrente como:

$$I = \int_0^\infty \int_0^b J_x dy dz$$

$$I = \int_0^\infty \int_0^b J_{x0} e^{-\frac{z}{d}} \cos\left(\omega t - \frac{z}{d}\right) dy dz$$

$$I = \frac{J_{x0} b d}{\sqrt{2}} \cos\left(\omega t - \frac{p}{4}\right)$$

ou, por meio de notação complexa

$$I_s = \int_0^\infty \int_0^b J_{x0} e^{-(1+j)\frac{z}{d}} dy dz$$

$$I_s = \frac{J_{x0} b d}{1 + j1}$$

que dá o mesmo resultado anterior. Daí, a perda ôhmica por unidade de volume é  $\vec{J} \cdot \vec{E}$  e, conseqüentemente, sendo a corrente  $I$  distribuída uniformemente em  $0 < y < b$  e  $0 < z < d$ , então

$$J' = \frac{I}{bd} = \frac{J_{x0}}{\sqrt{2}} \cos\left(\omega t - \frac{p}{4}\right)$$

e, dessa forma,

$$P_L = \frac{(J')^2 b L d}{\mathbf{s}} = \frac{J_{x0}^2 b L d}{2\mathbf{s}} \cos\left(\omega t - \frac{p}{4}\right)$$

que dá como valor médio através da integração no tempo para um período:

$$P_L = \frac{J_{x0}^2 b L d}{4\mathbf{s}},$$

desde que o valor médio do cosseno ao quadrado é  $\frac{1}{2}$

Estes resultados garantem a equação da resistência de um fio em tensão alternada.

## Reflexão e Transmissão de Ondas Planas Uniformes

Para esta discussão, considere um exemplo prático e visível: a luz. A luz, que é uma onda eletromagnética de alta frequência (da ordem de Terahertz) apresenta uma característica comum em vidros, que é a de refletir e transmitir. Ou seja, se há uma lâmpada dentro de um quarto, em que há uma janela com um vidro do tipo “fumê”, quem está dentro deste quarto olhando para a janela vê a lâmpada refletida, assim como quem está do lado de fora, vê a luz da lâmpada transmitida. O fenômeno que ocorre com a luz é denominado de reflexão, e ocorre por causa da mudança de meio. Partindo deste exemplo, considerando as ondas planas uniformes, este fenômeno pode ser estudado à luz do eletromagnetismo, e têm grandes aplicações diretas à linhas de transmissão, guias de ondas, entre outras.

Considere que a onda tem componente de campo elétrico unicamente em  $x$ , propagando-se na direção  $+z$  que é o exemplo trabalhado até o momento, em que a região  $z < 0$  é denominada de região 1, tendo o meio definido por  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{m}_1$  e  $\mathbf{s}_1$  e a região  $z > 0$ , é denominada de região 2, tendo o meio definido por  $\mathbf{e}_2$ ,  $\mathbf{m}_2$  e  $\mathbf{s}_2$ . também, sendo considerado que a onda está se movendo na direção  $+z$  da região 1, então o campo elétrico é definido por  $E_{x1}^+ = E_{x10}^+ e^{-g_1 z}$ , onde o índice 1 determina a região 1 e o sinal  $+$  indica a direção positiva de propagação. Como sendo uma onda, há um campo magnético associado à  $\vec{E}_1$ , dado por  $H_{y1}^+ = \frac{1}{h_1} E_{x10}^+ e^{-g_1 z}$ .

Como esta onda está se propagando em direção à fronteira entre os meios diferentes ( $z = 0$ ), ela é denominada de onda incidente, sendo sua propagação perpendicular ao plano de fronteira ( $xy$ ) ao que se descreve como incidência normal. Dessa forma, observa-se facilmente que tanto o campo elétrico  $E_x$  como o campo magnético  $H_y$  está tangente ao plano da fronteira, também localizada em  $z = 0$  para a região 2. como os campos são tangentes, essa transferência de energia é formulada diretamente por:  $E_{x2}^+ = E_{x20}^+ e^{-g_2 z}$ ,

e  $H_{y2}^+ = \frac{1}{h_2} E_{x20}^+ e^{-g_2 z}$ , que é chamada de onda transmitida, em que sua constante de propagação  $g_2$  e sua impedância intrínseca  $h_2$  têm valores diferentes e são consideradas. Como pelas condições de contorno percebe-se que  $E_{x10}^+ = E_{x20}^+$  só se  $h_1 = h_2$ , o que não é o caso, então pelo valor de  $h_2$ , implica que há uma onda que retorna ao encontrar a fronteira, como se pode ver na Figura 8.

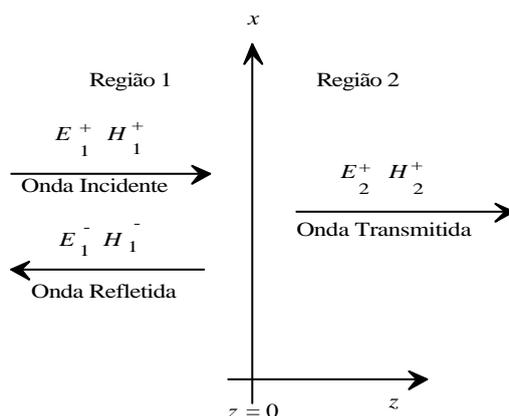


Figura 8: Regiões e ondas incidente, refletida e transmitida.

Esta onda que retorna na direção  $-z$  é chamada de onda refletida, e seus campos são:  $E_{xs1}^- = E_{x10}^- e^{g_1 z}$ ,

e  $H_{ys1}^- = \frac{1}{h_1} E_{x10}^- e^{g_1 z}$ , em que  $E_{x10}^-$  pode ser uma quantidade complexa. Este é o caso comum de um

receptor de televisão, em que a antena tem de ter a mesma impedância que a entrada do aparelho receptor. Se as impedâncias não são iguais, boa parte da energia da informação incidente retorna, sendo transferida ao circuito uma onda com pouca potência e fora de fase (efeito este que será visto adiante), dando uma péssima imagem no aparelho de televisão.

Com esta formalização para os campos da onda refletida, as condições de fronteira podem ser satisfeitas, como  $E_{xs1}^+ = E_{xs2}^+$  ou  $E_{xs1}^+ + E_{xs1}^- = E_{xs2}^+$  ou ainda  $E_{x10}^+ + E_{x10}^- = E_{x20}^+$  e  $H_{ys1}^+ = H_{ys2}^+$  ou  $H_{ys1}^+ + H_{ys1}^- = H_{ys2}^+$  ou ainda  $\frac{E_{x10}^+}{h_1} - \frac{E_{x10}^-}{h_1} = \frac{E_{x20}^+}{h_2}$ . Destas equações, comparando os termos de  $E_{x20}^+$ , encontra-se  $E_{x10}^+ + E_{x10}^- = \frac{h_2}{h_1} E_{x10}^+ - \frac{h_2}{h_1} E_{x10}^-$  ou  $E_{x10}^- = E_{x10}^+ \Gamma$ , onde

$$\Gamma = \frac{E_{x10}^-}{E_{x10}^+} = \frac{h_2 - h_1}{h_2 + h_1}$$

é denominado de coeficiente de reflexão, o qual pode ser um número complexo que define um defasamento da onda refletida.

Por outro lado, calculando  $E_{x20}^+$  em função de  $E_{x10}^+$ , tem-se

$$E_{x20}^+ = E_{x10}^+ \frac{2h_2}{h_2 + h_1}$$

ou,

$$\frac{E_{x20}^+}{E_{x10}^+} = \frac{2h_2}{h_2 + h_1}$$

é o coeficiente de transmissão. Com este coeficiente, explica-se o que foi citado anteriormente a respeito do aparelho receptor de televisão, pois quando as impedâncias de entrada do circuito do receptor e da antena não são iguais, a energia transmitida pode ter seus campos fora de fase, além de pouca potência, gerando “chuvisco” ou imagens distorcidas, devido a este valor poder ser uma quantidade complexa.

Aplicações específicas permitem encontrar resultados que dão interpretação mais lógica à engenharia. Um destes casos específicos é a junção de um dielétrico perfeito e um condutor perfeito, respectivamente, nas regiões 1 e 2, como a metade de um capacitor, o que pode ser visto na Figura 9, ou de uma onda no ar enviada por um radar ao se encontrar com a fuselagem de um avião (considerando um condutor perfeito).

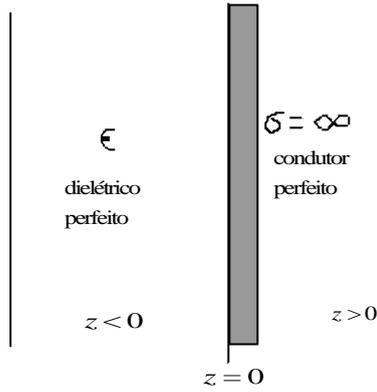


Figura 9: Meios especiais para uma onda incidente.

Assim, como  $\sigma_2 = \infty$ , então

$$\mathbf{h}_2 = \sqrt{\frac{j\omega\mathbf{m}_2}{\sigma_2 + j\omega\epsilon_2}} = 0.$$

Logo, a transmissão da onda é

$$E_{x20}^+ = \frac{2\mathbf{h}_2}{\mathbf{h}_2 + \mathbf{h}_1} E_{x10}^+ = 0,$$

o que implica dizer que não existem campos variáveis no tempo em um condutor perfeito, o que pode ser claramente visto na reflexão da onda, que dá

$$\Gamma = \frac{\mathbf{h}_2 - \mathbf{h}_1}{\mathbf{h}_2 + \mathbf{h}_1} = -1$$

e, conseqüentemente

$$E_{x10}^- = -E_{x10}^+$$

que indica que toda a onda incidente é refletida. Logo, o campo na região 1 torna-se

$$\begin{aligned} E_{xs1} &= E_{xs1}^+ + E_{xs1}^- \\ E_{xs1} &= E_{x10}^+ e^{-j\mathbf{b}_1 z} - E_{x10}^+ e^{j\mathbf{b}_1 z} \end{aligned}$$

em que  $\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_2 = 0$  por ambas as regiões serem consideradas perfeitas, o que indica não haver perdas. Assim, encontra-se que

$$\begin{aligned} E_{xs1} &= E_{x10}^+ (e^{-j\mathbf{b}_1 z} - e^{j\mathbf{b}_1 z}) \\ E_{xs1} &= -j2E_{x10}^+ \text{sen}(\mathbf{b}_1 z) \end{aligned}$$

ou, no domínio do tempo, através da parte real da identidade de Euler, tem-se

$$E_{x1} = 2E_{x10}^+ \text{sen}(\mathbf{b}_1 z) \text{sen}(\omega t).$$

O que se observa neste resultado é que o campo elétrico total região 1 não é uma onda se propagando. Lembrar-se que o que define a propagação é o termo  $\omega t - \mathbf{b}z$ , ou

$$\omega \left( t - \frac{z}{U_1} \right),$$

com

$$U_1 = \frac{w}{b_1},$$

na equação da onda incidente  $E_{x1}^+ = E_{x10}^+ \cos(\omega t - b_1 z)$ .

Deve-se ver que os fatores em relação ao tempo ( $\omega t$ ) e à distância ( $b_1 z$ ) estão separados, onde se vê que  $E_{x1} = 0$ , para todo  $b_1 z = n\pi$ , bem como quando  $\omega t = n\pi$ . Esta forma de campo é denominado de *Onda Estacionária*.

A onda estacionária tem seus pontos  $E_{x1} = 0$  nos planos localizados em

$$b_1 z = n\pi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

e assim, tem-se

$$\frac{2\pi}{\lambda_1} z = n\pi,$$

ou

$$z = n \frac{\lambda_1}{2}$$

o que se percebe que  $E_{x1} = 0$  em  $z = 0$  (isto é, na fronteira) a cada meio comprimento de onda para  $z < 0$ . Isto é visto na Figura 10, que é uma onda parada no espaço (o que seria visto, caso fosse possível ver os campos elétricos de uma onda plana uniforme!).

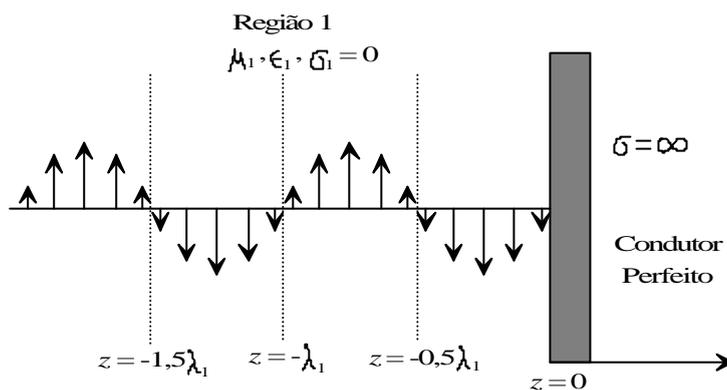


Figura 10: Onda Estacionária.

Para o caso do campo magnético, utilizando da informação já formalizada, tem-se  $H_{ys1}^+ = \frac{E_{xs1}^+}{h_1}$  e

$$H_{ys1}^- = -\frac{E_{xs1}^-}{h_1}, \quad \text{então,}$$

$$H_{ys1} = H_{ys1}^+ + H_{ys1}^-$$

$$H_{ys1} = \frac{E_{x10}^+}{h_1} (e^{-jb_1 z} + e^{jb_1 z})$$

ou

$$H_{ys1} = 2 \frac{E_{x10}^+}{h_1} \cos b_1 z \cos \omega t$$

que também é uma onda estacionária, mas com novas informações, que são: os valores máximos das amplitudes de  $H_{y1}$  se dão nos pontos em que  $E_{x1} = 0$ , e os campos magnéticos se encontram defasados de  $90^\circ$  no tempo, em relação à  $E_x$ , em toda parte, o que implica dizer que não há potência média transmitida em qualquer direção.

Este fenômeno denominado de onda estacionária permite a descrição de um formalismo específico para análise deste tipo de onda, o que é visto na Seção seguinte.

## O Coeficiente de Onda Estacionária

A onda estacionária descrita na Seção anterior foi formalizada como uma onda plana uniforme que incide em um condutor perfeito ( $S = \infty$ ) e é refletida completamente. Entretanto, quando não se considera um condutor perfeito, há uma onda refletida e uma transmitida. E, desde que na região 1 (onde a onda incide) há um campo incidente e um refletido, encontra uma composição de uma onda propagante e uma onda estacionária, onde se descreve este campo composto como uma onda estacionária, mesmo havendo uma onda propagante. Assim, do que foi encontrado, na região 1, tem-se  $E_{x1} = E_{x1}^+ + E_{x1}^-$ , em que  $E_{x1}$  é uma função senoidal de  $t$ , podendo ter um ângulo de fase diferente de zero.

Considerando a região 1 como sendo um dielétrico perfeito, ou seja,  $\mathbf{a}_1 = 0$ , e a região 2 sendo um material qualquer, tem-se que  $E_{xs1}^+ = E_{x10}^+ e^{-jb_1 z}$  e  $E_{xs1}^- = \Gamma E_{x10}^+ e^{jb_1 z}$ , em que

$$\Gamma = \frac{h_2 - h_1}{h_2 + h_1}$$

com  $h_1$  real e positivo e  $h_2$  podendo ser complexo, tal que  $\Gamma$  pode ser escrito em notação polar, como  $\Gamma = |\Gamma| e^{j\mathbf{f}}$  de tal forma que:

1. Se a região 2 é condutor perfeito ( $S_2 = \infty$ ), então  $\mathbf{f} = \mathbf{p}$ ;
2. Se a região 2 tem  $h_2 < h_1$  e  $h_2$  é real, então  $\mathbf{f} = \mathbf{p}$ ;
3. Se a região 2 tem  $h_2 > h_1$  e  $h_2$  é real, então  $\mathbf{f} = 0$ .

Assim, calculando o campo total na região 1 através das equações anteriores,

$$E_{xs1} = (e^{-jb_1 z} + |\Gamma| e^{j(b_1 z + \mathbf{f})}) E_{x10}^+$$

Nesta Equação do campo elétrico na região 1, este campo apresenta seus valores máximos quando

$$E_{xs1, \max} = (1 + |\Gamma|) E_{x10}^+$$

que ocorrem para

$$-b_1 z = b_1 z + \mathbf{f} + 2n\mathbf{p}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

ou

$$-b_1 z_{\max} = \frac{\mathbf{f}}{2} + n\mathbf{p},$$

Por outro lado, os valores mínimos da amplitude do campo elétrico ocorrem quando os ângulos de fase dos dois termos desta equação diferirem de  $180^\circ$ . Ou seja, quando  $E_{xs1, \min} = (1 - |\Gamma|) E_{x10}^+$  que define os pontos  $-b_1 z = b_1 z + \mathbf{f} + \mathbf{p} + 2n\mathbf{p}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  ou

$$-b_1 z_{\min} = \frac{\mathbf{f}}{2} + n\mathbf{p} + \frac{\mathbf{p}}{2},$$

que indica que os valores mínimos das amplitudes do campo elétrico estão separados por múltiplos de meio comprimento de onda.

Com estes valores determinados, define-se o *coeficiente de onda estacionária* como sendo a média entre as amplitudes máxima e mínima do campo elétrico, formalizada por

$$s = \frac{E_{xs1,\max}}{E_{xs1,\min}} = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|}.$$

Por meio deste coeficiente, pode-se determinar se há reflexão ou não de uma onda estacionária, pois como  $|\Gamma| \leq 1$ ,  $s$  é sempre positivo e maior que a unidade. Estas informações podem ser facilmente observadas, pois para  $|\Gamma| = 1$ , a amplitude da onda refletida é igual a amplitude da onda incidente. Isto é, toda a energia incidente é refletida, pois o numerador da equação caindo para zero, o coeficiente de onda estacionária vai para infinito ( $s = \infty$ ). Por outro lado, se  $\mathbf{h}_2 = \mathbf{h}_1$ , então  $\Gamma = 0$  e nenhuma energia é refletida, o que implica em que  $s = 1$ , e os máximos e mínimos de amplitudes são iguais.

Se for considerado que há perdas na região 1, ou seja,  $\mathbf{a}_1 \neq 0$ , então a onda incidente é atenuada à medida que avança na direção do eixo  $z$  positivo, enquanto que a onda refletida na mudança de material para a região 2, também é atenuada ao se propagar na direção do eixo  $z$  negativo. Neste caso, não é possível definir o valor do coeficiente de onda estacionária especificamente, mas como uma questão de engenharia, todo meio é com perdas, mas sua variação não é apreciável na região que interessa, podendo ser aproximado de um meio sem perdas.

Desde que se formulou as equações do campo elétrico e do campo magnético, então, considerando que a distância seja  $z = -L$ , ou seja, considerando que a onda se encontra na região 1, os campos totais são dados por

$$E_{xs1} = (e^{jb_1L} + \Gamma e^{-jb_1L}) E_{xs10}^+$$

e

$$H_{ys1} = (e^{jb_1L} - \Gamma e^{-jb_1L}) \frac{E_{xs10}^+}{\mathbf{h}_1}$$

define-se a impedância de entrada no meio como a relação entre estes campos, como:

$$\mathbf{h}_{ent} = \frac{E_{xs1}}{H_{ys1}} \Big|_{z=-L} = \mathbf{h}_1 \frac{e^{jb_1L} + \Gamma e^{-jb_1L}}{e^{jb_1L} - \Gamma e^{-jb_1L}}.$$

Fazendo

$$\Gamma = \frac{\mathbf{h}_2 - \mathbf{h}_1}{\mathbf{h}_2 + \mathbf{h}_1}$$

e usando a identidade de Euler, encontra-se

$$\mathbf{h}_{ent} = \mathbf{h}_1 \frac{\mathbf{h}_2 + j\mathbf{h}_1 \tan(\mathbf{b}_1L)}{\mathbf{h}_1 + j\mathbf{h}_2 \tan(\mathbf{b}_1L)}.$$

Esta Equação se refere à impedância do meio que é “vista” pela onda, de forma similar a um fio de antena de comprimento  $L$  ligado a um circuito receptor de televisão. Assim, a onda “vê” a impedância de entrada como a composição da impedância do fio com uma impedância ao seu final.

Com o resultado encontrado, pode-se observar situações como:

1. Se  $\mathbf{h}_2 = \mathbf{h}_1$ , então  $\mathbf{h}_{ent} = \mathbf{h}_1$ , não havendo reflexão, o que se denomina de *sistema casado* (por isto a antena da televisão tem de ter a mesma impedância de entrada do circuito receptor, para evitar a reflexão e toda a potência da onda ser transferida ao aparelho, gerando a melhor imagem!);
2. Se  $\mathbf{h}_2 = 0$ , ou seja, a região 2 for um condutor perfeito, então  $\mathbf{h}_{ent} = j\mathbf{h}_1 \tan \mathbf{b}_1L$ , que é uma impedância puramente complexa, o que faz com que toda a energia seja refletida. Também, deve-se observar que se  $\mathbf{b}_1L = n\mathbf{p}$ , então  $\mathbf{h}_{ent} = 0$ , bem como quando  $E_{xs1} = 0$ . Por outro lado,  $\mathbf{h}_{ent} = \infty$  nos pontos em que  $H_{ys1} = 0$ .

## Exemplos

**Exemplo:** Uma onda eletromagnética é enviada do ar a uma distância de 100 metros, em uma frequência de 200 MHz para comunicação com um mergulhador que se encontra a 50 metros de profundidade na água. Considerando que a amplitude do campo elétrico desta onda no ar é  $E_{x10} = 50 \text{ V/m}$ , deseja-se determinar a potência desta onda ao atingir a posição do mergulhador, o tempo gasto para a onda chegar até ele, a potência média refletida, a impedância de entrada na distância em que a onda é enviada, o coeficiente de onda estacionária e as posições onde há os valores de máximos e mínimos do campo elétrico da onda.

Os dados deste exemplo são:  $f = 200 \text{ MHz}$  e  $L = 100 \text{ m}$  e, como a região 1 é o ar, considerando como espaço livre, então  $h_1 = h_0 = 377 \Omega$ , e

$$I_1 = \frac{c}{f} = \frac{3 \times 10^8}{2 \times 10^8} = 1,5 \text{ m}$$

$$b_1 = \frac{2p}{I_1} = 4,19 \text{ rad / m.}$$

Como  $E_{x10} = 50 \text{ V/m}$ , então  $E_{xs1} = 50e^{jblz} = 50e^{j4,19z} \text{ V/m}$  e

$$H_{ys1} = \frac{E_{xs1}}{h_1} = \frac{50}{377} e^{-j4,19z} = 0,133e^{-j4,19z} \text{ A/m}$$

e conseqüentemente, a potência transmitida é

$$P_{L,med} = \frac{1}{2} \frac{E_{x10}^2}{h_1} = 3,32 \text{ W}$$

que, como sendo o ar, é a mesma potência que chega à fronteira com a água. Entretanto, a impedância intrínseca da água, considerando que não haja condutividade e  $e_R = 50$  e  $m_R = 1$ , então

$$h_2 = h_0 \sqrt{\frac{m_R}{e_R}} = 53,32 \Omega.$$

Dessa forma,

$$\Gamma = \frac{h_2 - h_1}{h_2 + h_1} = -0,75$$

que implica que a onda refletida tem  $E_{x10}^- = \Gamma E_{x10}^+ = -37,5 \text{ V/m}$  e

$$H_{y10}^- = -\frac{E_{x10}^-}{h_1} = 0,1 \text{ A/m}$$

e a onda transmitida tem

$$E_{x20}^+ = \frac{2h_2}{h_2 + h_1} E_{x10}^+ = \frac{2 \times 53,32}{53,32 + 377} \times 50 = 0,25 \times 50 = 12,5 \text{ V/m}$$

e

$$H_{y20}^+ = -\frac{E_{x20}^+}{h_2} = 0,233 \text{ A/m.}$$

Considerando que a água é sem perdas, então a potência média que chega ao mergulhador será

$$P_{L,med_2}^+ = \frac{E_{x20}^+}{2h_2} = 1,46 \text{ W,}$$

e a refletida é

$$P_{L,med_1}^- = \frac{E_{x10}^-}{2h_1} = 1,86W .$$

Observe que a soma das duas potências (refletida e transmitida) é igual à potência média total enviada pelo transmissor.

O tempo passado para a onda percorrer o espaço no ar é de

$$t_1 = \frac{L_1}{c} = \frac{100}{3 \times 10^8} = 0,33 \text{ ns}$$

mas, ao se chocar com a água, sua velocidade é reduzida para

$$U_2 = \frac{c}{\sqrt{\mathbf{m}_R \mathbf{e}_R}} = \frac{3 \times 10^8}{\sqrt{50}} = 4,243 \times 10^7 \text{ m/s}$$

e o tempo passado para a onda atravessar o espaço entre a fronteira e o mergulhador é

$$t_2 = \frac{L_2}{U_2} = \frac{50}{4,243 \times 10^7} = 1,179 \text{ ns}$$

Logo, o tempo total para a onda eletromagnética atingir o mergulhador é  $t = t_1 + t_2 = 1,512 \text{ ns}$ . Observe que sem a água, este tempo seria de

$$t = \frac{150}{c} = 0,5 \text{ ns}$$

Por fim, a impedância de entrada “vista” pela onda é

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_{ent} &= \mathbf{h}_1 \frac{\mathbf{h}_2 + j\mathbf{h}_1 \tan(\mathbf{b}_1 L)}{\mathbf{h}_1 + j\mathbf{h}_2 \tan(\mathbf{b}_1 L)} \\ \mathbf{h}_{ent} &= 377 \frac{53,32 + j377 \tan(4,19 \times 100)}{377 + j53,32 \tan(4,19 \times 100)} \\ \mathbf{h}_{ent} &= 377 \frac{53,32 + j377 \times 2,35}{377 + j53,32 \times 2,35} \\ \mathbf{h}_{ent} &= 377 \frac{53,32 + j885,22}{377 + j125,2} \\ \mathbf{h}_{ent} &= 377 \frac{886,82 \angle 86,55^\circ}{397,25 \angle 18,37^\circ} \\ \mathbf{h}_{ent} &= 841,61 \angle 68,18^\circ \Omega \\ \mathbf{h}_{ent} &= 312,82 + j781,31 \Omega \end{aligned}$$

Além disso, o coeficiente de onda estacionária é determinado por

$$s = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|} = \frac{1,75}{0,25} = 7,$$

e, na região 1, os máximos e mínimos da onda estacionária são

- Máximos:  $z_{\max} = -\frac{1}{\mathbf{b}_1} \left( \frac{\mathbf{f}}{2} + n\mathbf{p} \right)$ , em que  $\mathbf{f} = 68,18^\circ = 1,19 \text{ rad}$ . Logo,

$$z_{\max} = -\frac{1}{4,19} \left( \frac{1,19}{2} + 3,14n \right)$$

$$z_{\max} = -0,142 - 0,75n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

a partir da fronteira, até a fonte de transmissão da onda.

- Mínimos:

$$z_{\min} = -\frac{1}{4,19} \left( \frac{1,19 + 3,14}{2} + n\mathbf{p} \right)$$

$$z_{\min} = -1,712 - 0,75n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

a partir da fronteira, até a fonte de transmissão da onda.

**Exemplo:** Uma antena de radar, que envia suas informações ao espaço tendo como portadora uma onda eletromagnética de frequência  $3 \text{ GHz}$ , deve ser protegida por um material dielétrico perfeito de  $\epsilon_R = 7$ , para evitar seu desgaste. Este material deve ser colocado próximo ao radar, tendo uma espessura  $L$ , de forma que a onda transmitida não apresenta perdas de potência ao atravessá-lo (ou seja, o sistema deve estar casado) levando a onda ao espaço exterior. Este objeto de proteção é denominado de radome, e este sistema é visto na Figura 11.

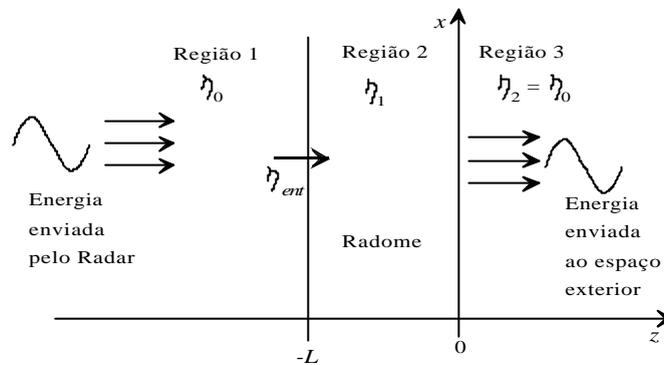


Figura 11: Exemplo de um Radome para a proteção do radar e casamento da impedância com o meio externo.

Para casar a antena ao espaço exterior, ou seja, na região 3, a impedância de entrada  $\mathbf{h}_{ent}$ , deve ser igual a  $\mathbf{h}_2 = \mathbf{h}_0 = 377 \Omega$ . Assim, tem-se

$$\mathbf{h}_{ent} = \mathbf{h}_1 \frac{\mathbf{h}_0 + j\mathbf{h}_1 \tan(\mathbf{b}_1 L)}{\mathbf{h}_1 + j\mathbf{h}_0 \tan(\mathbf{b}_1 L)}$$

ou

$$\mathbf{h}_{ent} = \mathbf{h}_1 \frac{377 + j\mathbf{h}_1 \tan(\mathbf{b}_1 L)}{\mathbf{h}_1 + j377 \tan(\mathbf{b}_1 L)},$$

ou ainda,

$$j377^2 \tan(\mathbf{b}_1 L) = j\mathbf{h}_1^2 \tan(\mathbf{b}_1 L).$$

Entretanto, desde que o radome é feito de um material dielétrico perfeito e não magnético, então  $\mathbf{h}_1 < 377 \Omega$ , e conseqüentemente, a Equação (5.50) pode ser satisfeita somente pela seleção de  $\mathbf{b}_1 L = n\mathbf{p}$ , pois

$$\mathbf{h}_1 = \mathbf{h}_0 \sqrt{\frac{\mathbf{m}_R}{\mathbf{e}_R}} = 142,5\Omega.$$

Assim, como  $\mathbf{b}_1 = \frac{2\mathbf{p}}{\mathbf{l}_1} = 165,35 \text{ rad/m}$ , então  $L = \frac{n\mathbf{l}_1}{2}$ . E, como

$$\mathbf{l}_1 = \frac{U_1}{f} = \frac{3 \times 10^8}{3 \times 10^9 \sqrt{7}} = 0,038m$$

então, tem-se que o mais fino radome deve ser dado para  $n = 1$ , ou seja, sua espessura deve ser  $L = \frac{\mathbf{l}_1}{2} = \frac{0,038}{2} = 0,019m$ , ou  $L = 1,9 \text{ cm}$ .

Pode-se observar que, caso seja utilizado um radome de  $L = 2 \text{ cm}$ , então, como

$$\mathbf{h}_1 = \mathbf{h}_0 \sqrt{\frac{\mathbf{m}_R}{\mathbf{e}_R}} = 142,5\Omega,$$

tem-se

$$\mathbf{h}_{ent} = \mathbf{h}_1 \frac{377 + j\mathbf{h}_1 \tan(2 \times 10^{-2} \mathbf{b}_1)}{\mathbf{h}_1 + j377 \tan(2 \times 10^{-2} \mathbf{b}_1)}$$

$$\mathbf{h}_{ent} = 142,5 \frac{377 + j142,5 \tan(3,31)}{142,5 + j377 \tan(3,31)}$$

$$\mathbf{h}_{ent} = 142,5 \frac{377 + j24,23}{142,5 + j64,09}$$

$$\mathbf{h}_{ent} = 142,5 \frac{377,78 \angle 3,7^\circ}{156,25 \angle 24,22^\circ}$$

$$\mathbf{h}_{ent} = 344,54 \angle -20,5^\circ \Omega$$

$$\mathbf{h}_{ent} = 322,72 - j120,66\Omega.$$

e, conseqüentemente,

$$\Gamma = \frac{\mathbf{h}_{ent} - \mathbf{h}_0}{\mathbf{h}_{ent} + \mathbf{h}_0}$$

$$\Gamma = \frac{-54,28 - j120,66}{699,72 - j120,66}$$

$$\Gamma = \frac{132,31 \angle 245,78^\circ}{710,05 \angle -9,78^\circ}$$

$$\Gamma = 0,19 \angle 255,66^\circ \Omega$$

$$\Gamma = -0,15 + j0,12\Omega,$$

e dessa forma,  $E_{x10}^- = |\Gamma| E_{x10}^+ = 0,19 E_{x10}^+$  que indica que 19% da amplitude da onda incidente está retornando (sendo refletida). E assim, a potência refletida é

$$P_{L,med}^- = \frac{1}{2} \frac{(E_{x10}^+)^2}{h_0}$$

$$P_{L,med}^- = 0,19^2 \left( \frac{(E_{x10}^+)^2}{2h_0} \right)$$

$$P_{L,med}^- = 0,0361 P_{L,med}$$

ou 3,61% da potência média incidente.

## Bibliografia

- Costa, E.M.M., *Eletromagnetismo: Eletrostática e Magnetostática*, Editora Altbooks, Rio de Janeiro, RJ, 2005.
- Albuquerque, R. O., *Análise de Circuitos em Corrente Alternada*, Editora Érica, São Paulo, 6ª. Edição, 1989.
- S.S. Peduzzi e M.A. Moreira. *Tópicos em Eletromagnetismo*. Universidade Federal de Santa Catarina, Secretaria de Estado da Educação da Bahia.
- M.N.O. Sadiku. *Elementos de Eletromagnetismo*, volume 3ª. Edição. Bookman Companhia Editora, Rio Grande do Sul, 2004.
- J.A. Edminister. *Eletromagnetismo*. Editora McGraw-Hill do Brasil, 1980.
- J.P.A. Bastos. *Eletromagnetismo e Cálculo de Campos*. Editora da UFSC, Florianópolis, Brasil, 1989.
- W.H. Hayt e J.A. Buck. *Eletromagnetismo*. LTC Editora, 6ª. Edição, 2003.
- J.D. Kraus e K.R. Carver, *Eletromagnetismo*. Editora Guanabara Dois, Rio de Janeiro, 1978.
- S. Ramo, J.R. Whinnery e R. Vanduser. *Campos e Ondas em Eletrônica das Comunicações*. Editora Guanabara Dois, Rio de Janeiro, 1981.