

Apostila
Redes de Petri e Modelagem de Sistemas

Eduard Montgomery Meira Costa, DSc
UFBA

©Eduard Montgomery Meira Costa, DSc
UFBA, 2002

Introdução

Sistemas são definidos fisicamente como uma parte limitada do universo, sujeito à observação imediata ou mediata, e que, em geral, podem caracterizar-se por um conjunto finito de variáveis associadas à grandezas físicas que o identificam univocamente. Num contexto mais geral, sistemas são conjuntos de elementos, materiais ou ideais, entre os quais se possa encontrar ou definir alguma relação, ou a disposição das partes ou dos elementos de um todo, coordenados entre si, e que funcionam com estrutura organizada.

Os sistemas físicos apresentam em sua estrutura componentes que são interagentes entre si. Assim, cada componente pode ser considerado um subsistema com características próprias, podendo seu comportamento ser descrito independentemente dos outros componentes do sistema, exceto pelas suas interações. Cada componente tem seu próprio conjunto de estados, ou configuração interna em um dado instante de tempo, que é quem determina a informação necessária para descrever suas ações futuras. Frequentemente, o estado de um componente depende dos seus estados passados. Logo, os estados de um componente definem uma trajetória no tempo, dando uma informação a respeito de sua descrição.

Os componentes de um sistema, em geral, apresentam concorrência, ou paralelismo entre si. A concorrência é definida como atividades paralelas que podem ocorrer entre vários componentes de um sistema. Assim, enquanto em um subsistema ocorre uma mudança de estado, no mesmo instante de tempo, pode ocorrer uma mudança de estado em um outro subsistema.

A temporização de ações de diferentes componentes pode ser muito complexa e, conseqüentemente, a descrição das interações resultantes entre eles, pode se tornar difícil.

Um modelo é uma representação, freqüentemente em termos matemáticos, da qual são analisadas importantes características do objeto ou sistema sob estudo através da manipulação deste modelo sem o perigo, custo ou inconveniência da manipulação real.

Em várias áreas do conhecimento, um fenômeno não é estudado diretamente, devido ao perigo, custo ou inconveniência da manipulação real. Assim, sistemas como os astronômicos podem ser descritos através de modelos de idade, nascimento, morte e interação entre estrelas que tomariam longos períodos de tempo e imensos amontoados de matéria e energia. Por outro lado, os sistemas como os da área da física nuclear,

também podem ser descritos por modelos que descrevam as interações entre partículas subatômicas, as quais existem por um período de tempo muito curto.

A descrição de um modelo matemático, em vários casos, é muito complexa. Porém, alguns tipos de sistemas podem ser modelados por paradigmas matemáticos que apresentam um grafo associado [1]. Estes sistemas geralmente apresentam características discretas no tempo. As transições de estados são quem definem as mudanças na configuração interna, ou estado do sistema. Dentre estes sistemas, encontram-se os Sistemas a Eventos Discretos (SED) [2, 3, 4], que são sistemas que apresentam sua evolução dinâmica descrita como uma trajetória discreta no tempo, onde as mudanças de estados ocorrem através de eventos. Exemplos desse tipo sistema são os sistemas de manufatura, as redes de computadores, sistemas de tráfego aéreo e ferroviário [5, 6, 7, 8].

Dentre os paradigmas existentes para a modelagem de sistemas que apresentam as características citadas anteriormente, isto é, o modelo matemático pode ter um grafo associado, encontram-se os autômatos [9]. Os autômatos são modelos matemáticos cuja representação gráfica apresenta vértices, denominados de estados, e arcos direcionados, denominados de transições. Um exemplo de autômato é apresentado na Figura 0.1. Nesta Figura, os círculos representam os estados alcançados, os círculos em linha dupla representam estados que definem final de tarefas, quando representando um sistema, e os arcos etiquetados por letras gregas representam funções de transição de estados. O estado dito inicial do autômato é o estado que contém uma seta que não é saída de nenhum outro estado. Estando em um estado, os arcos saindo dele são transições ou eventos habilitados (que podem ocorrer). A ocorrência de um destes eventos habilitados, provoca a transição do estado corrente para o estado para o qual aponta o arco.

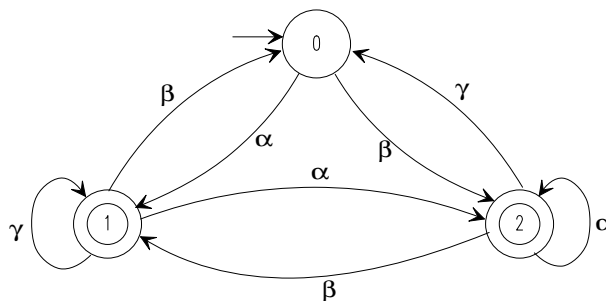


Figura 0.1: Exemplo de Autômato.

O grande problema encontrado com a modelagem de sistemas utilizando os autômatos é a sua representação gráfica, bem como sua descrição matemática, quando o sistema apresenta um grande número de atividades e eventos, que definem um número de estados que é exponencial em relação às atividades. Dessa forma, a difícil visualização do modelo implica diretamente na imensa complexidade da compreensão de sua dinâmica e, conseqüentemente, do estudo a ser desenvolvido. Inclusive, este paradigma só pode ser utilizado para sistemas que não apresentam concorrência entre eventos.

Neste contexto, um paradigma de modelagem que não apresenta estes tipos de problema, bem como outras vantagens, matemáticas e visuais foi introduzido por Carl Adam Petri na década de 60 (1962) em sua tese de doutorado e que ficou conhecida por redes de Petri. As redes de Petri [10, 11, 12, 13] se apresentam como uma importante ferramenta matemática e gráfica para análise de variados tipos de sistemas [14, 15, 16]. Especificamente para os SEDs, as redes de Petri têm se mostrado como uma importante ferramenta, pois facilita a visualização de todo o modelo do sistema e seu estado em qualquer instante de tempo [6, 17, 18, 19, 20].

Na modelagem de SEDs, as redes de Petri apresentam várias vantagens sobre os outros modelos. Dentre estas vantagens, podem ser citadas:

1. a facilidade para modelar as características de um sistema, ou seja, concorrência, sincronismo e assincronismo, conflito, exclusão mútua, relações de precedência, não determinismo e bloqueio;
2. excelente visualização de dependência de sistemas; focalização na informação local;
3. abordagens de modelagem do tipo refinamento e do tipo composição modular;
4. possibilidade de gerar código de controle supervisorio diretamente de sua representação gráfica;
5. possibilidade de testar propriedades indesejáveis para os sistemas, tais como bloqueio e reinicialização;
6. análise de desempenho sem simulação é possível para muitos sistemas, desde que taxas de produção, utilização de recursos, segurança e desempenho podem ser avaliadas;
7. simulação dos eventos discretos diretamente a partir do modelo e informação do estado atual do sistema que permite monitoração em tempo real [21, 22, 23, 8].

Redes de Petri

As redes de Petri são grafos direcionados, bi-partidos e ponderados, que apresentam uma marcação inicial. O conceito de grafo bi-partido define que uma rede de Petri tem dois tipos de nós, os quais são denominados lugares e transições. O termo grafo direcionado determina a existência de arcos, os quais são direcionados sempre de um lugar para uma transição e de uma transição sempre para um lugar. No primeiro caso, denominam-se lugar de entrada da transição e, transição de saída do lugar, e vice-versa no segundo caso. Os arcos em uma rede de Petri apresentam uma ponderação associada, onde um arco com peso k representa k arcos paralelos ligando dois nós. A marcação inicial de uma rede de Petri representa o estado em que a rede se encontra inicialmente.

Formalmente, uma rede de Petri é definida como a seguir:

Definição 1 *Uma rede de Petri é uma sextupla $RP = (P, T, A_r, K, W, M_0)$, onde:*

- $P = \{p_1, p_2, \dots, p_m\}$ é um conjunto finito de lugares;
- $T = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ é um conjunto finito de transições;
- $A_r \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$ é um conjunto de arcos;
- $K : P \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ é a função de capacidade;
- $W : A_r \rightarrow \mathbb{N}^+$ é a função de ponderação;
- $M_0 : P \rightarrow \mathbb{N}$ é a função de marcação inicial, que satisfaz $\forall p \in P : M_0(p) \leq K(p)$.

Deve-se observar que, pela definição de rede de Petri, as seguintes condições são satisfeitas:

$$P \cap T = \emptyset \quad (0.1)$$

e

$$P \cup T \neq \emptyset. \quad (0.2)$$

Assim, pela condição (0.1), os lugares e as transições são nós distintos, o que formaliza o termo bi-partido. Por outro lado, a condição (0.2) refere-se a que em uma rede de Petri existe pelo menos um lugar ou uma transição.

Uma rede de Petri é formada, então, por uma estrutura, formalizada pelos lugares e transições conectados pelos arcos, e uma marcação inicial.

Uma estrutura de rede de Petri é a rede sem a marcação inicial, a qual é denotada por $E_{rp} = (P, T, A_r, K, W)$. Dessa forma, considerando a definição da estrutura de rede de Petri, a notação de uma rede de Petri pode ser abreviada por $RP = \{E_{rp}, M_0\}$.

Representação gráfica

A representação gráfica de uma rede de Petri é a seguinte:

- Os lugares em uma rede de Petri são representados por círculos;
- A capacidade dos lugares são representadas pela igualdade de K ao seu valor, junto ao respectivo lugar. Quando este não aparece, o lugar apresenta capacidade infinita;
- As transições são representadas por barras ou retângulos;
- A marcação de uma rede de Petri atribui a cada lugar um número inteiro não negativo m , de onde se diz que o lugar com marcação m tem m fichas, as quais são representadas por pequenos círculos pretos. A marcação de uma rede de Petri é designada por um vetor

$$M = [m_1 \quad m_2 \quad m_3 \quad \dots \quad m_k]^T,$$

onde k é o número de lugares da rede, e m_i o número de fichas no lugar i ;

- Os arcos são sempre direcionados de uma transição para um lugar e de um lugar para uma transição;
- Os pesos dos arcos são representados por números juntos aos mesmos. Quando em um arco não aparece seu peso, então este arco tem, por definição, peso 1.

Exemplo 1 Na Figura 0.2, é apresentada uma rede de Petri. Nesta Figura, tem-se que os lugares são os círculos etiquetados por p_1 , p_2 , p_3 e p_4 e as transições são as

barras etiquetadas por t_1 , t_2 e t_3 . Pela definição de rede de Petri, tem-se:

$$P = \{p_1, p_2, p_3, p_4\};$$

$$T = \{t_1, t_2, t_3\};$$

$$A_r = \{(p_1, t_1), (p_1, t_2), (p_2, t_1), (p_3, t_2), (p_4, t_3), (t_1, p_3), (t_2, p_2), (t_2, p_4), (t_3, p_2)\};$$

$$K(p_2) = 4; K(p_3) = 5$$

$$W(p_1, t_1) = 2; W(p_1, t_2) = 3; W(p_2, t_1) = 1; W(p_3, t_2) = 1; W(p_4, t_3) = 2;$$

$$W(t_1, p_3) = 1; W(t_2, p_2) = 2; W(t_2, p_4) = 3; W(t_3, p_2) = 1;$$

$$M_0 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T.$$

Observe que os arcos são definidos por pares (p_i, t_j) ou (t_j, p_i) , que determinam respectivamente um arco saindo do lugar p_i para a transição t_j , e saindo da transição t_j para o lugar p_i .

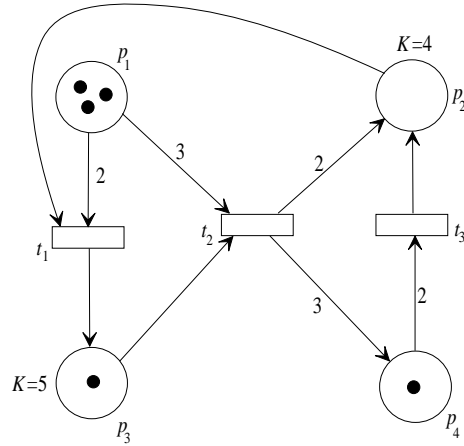


Figura 0.2: Exemplo de rede de Petri.

Notação matricial

Uma rede de Petri também apresenta uma representação matricial, a qual é feita através dos conjuntos de lugares P , transições T , vetor de marcação $k \times 1$, e duas matrizes, Pre e $Post$, as quais indicam de onde sai e para onde aponta um arco, com o seu respectivo peso.

Definição 2 Uma rede de Petri é uma quintupla $RP = (P, T, Pre, Post, M_0)$, onde:

- $P = \{p_1, p_2, \dots, p_m\}$ é um conjunto finito de lugares;
- $T = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ é um conjunto finito de transições;
- $Pre : P \times T \rightarrow \mathbb{N}$ é a aplicação de incidência para frente;
- $Post : P \times T \rightarrow \mathbb{N}$ é a aplicação de incidência para trás;
- $M_0 : P \rightarrow \mathbb{N}$ é a função de marcação inicial, que satisfaz

$$\forall p \in P : M_0(p) \leq K(p).$$

Com essa definição, observa-se que as matrizes Pre e $Post$ contém informações sobre os arcos da rede de Petri, onde:

- $Pre(\bullet, t)$ e $Post(\bullet, t)$ são as colunas associadas a uma transição t e,
- $Pre(p, \bullet)$ e $Post(p, \bullet)$ são as linhas associadas a um lugar p .

Exemplo 2 A rede de Petri apresentada na Figura 0.3, tem a seguinte representação matricial:

$$P = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$$

$$T = \{t_1, t_2, t_3\}$$

Pre	t_1	t_2	t_3	Post	t_1	t_2	t_3
p_1	1	0	0	p_1	0	0	2
p_2	0	1	0	p_2	1	0	0
p_3	0	0	1	p_3	0	1	0
p_4	1	0	0	p_4	0	2	0

$$M_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}^T.$$

Pode-se ver que as linhas da matriz Pre representam os arcos que saem de cada lugar e as linhas da matriz $Post$ representam os arcos que apontam para cada lugar. A partir destas matrizes, constrói-se o grafo associado à rede de Petri (representação gráfica) utilizando o procedimento definido a seguir:

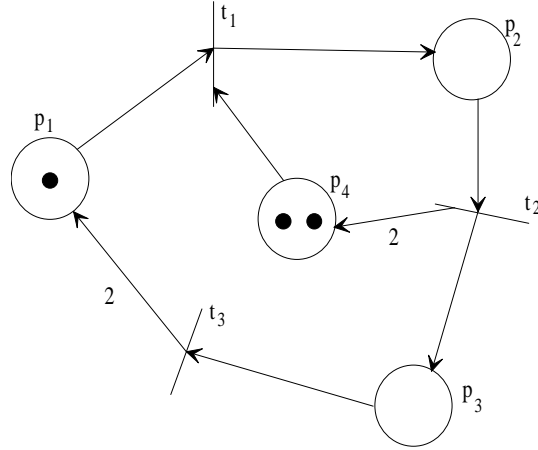


Figura 0.3: Rede de Petri utilizada no Exemplo das matrizes Pre e $Post$.

Definição 3 O grafo $G = \{P, T, \Gamma, V\}$ associado à rede de Petri $RP = \{P, T; Pre, Post, M_0\}$ é definido por:

- $\forall p \in P, \Gamma(p) = \{t \in T | Pre(p, t) > 0\};$
- $\forall t \in T, \Gamma(t) = \{p \in P | Post(p, t) > 0\};$
- $\forall p \in P, \forall t \in T, V(p, t) = Pre(p, t) \text{ e } V(t, p) = Post(p, t).$

Também, podem-se utilizar as notações $t^\bullet = \Gamma(t)$ e $p^\bullet = \Gamma(p)$.

Exemplo 3 A rede de Petri mostrada na Figura 0.3, tem seu grafo definido por:

$$\begin{aligned} \Gamma(p_1) &= \{t_1\} & \Gamma(t_1) &= \{p_2\} \\ \Gamma(p_2) &= \{t_2\} & \Gamma(t_2) &= \{p_3, p_4\} \\ \Gamma(p_3) &= \{t_3\} & \Gamma(t_3) &= \{p_1\} \\ \Gamma(p_4) &= \{t_1\} \end{aligned}$$

Equivalentemente, podem ser definidos para o grafo associado à rede de Petri o seguinte:

Definição 4 O grafo $G = \{P, T, \Gamma, V\}$ associado à rede $RP = \{P, T; Pre, Post, M_0\}$ é definido por:

- $\forall t \in T, \Gamma^{-1}(t) = \{p \in P | Pre(p, t) > 0\};$

- $\forall p \in P, \Gamma^{-1}(p) = \{t \in T | \text{Post}(p, t) > 0\};$

Também, podem-se utilizar as notações $\bullet t = \Gamma^{-1}(t)$ e $\bullet p = \Gamma^{-1}(p)$.

Com essa definição e com a Definição 3, tem-se que:

1. As entradas de uma transição são os lugares de $\Gamma^{-1}(t)$;
2. As saídas de uma transição são os lugares $\Gamma(t)$;
3. As entradas de um lugar são as transições de $\Gamma^{-1}(p)$ e
4. As saídas de um lugar são as transições de $\Gamma(p)$.

Exemplo 4 A rede de Petri mostrada na Figura 0.3, também pode ter seu grafo definido por:

$$\begin{aligned} \Gamma^{-1}(t_1) &= \{p_1, p_4\} & \Gamma^{-1}(p_1) &= \{t_3\} \\ \Gamma^{-1}(t_2) &= \{p_2\} & \Gamma^{-1}(p_2) &= \{t_1\} \\ \Gamma^{-1}(t_3) &= \{p_3\} & \Gamma^{-1}(p_3) &= \{t_2\} \\ & & \Gamma^{-1}(p_4) &= \{t_2\}. \end{aligned}$$

Matriz de incidência

A matriz de incidência de uma rede de Petri é uma matriz de inteiros $n \times m$ (n transições e m lugares), $A = [a_{ij}]$, com

$$a_{ij} = a_{ij}^+ - a_{ij}^-, \quad (0.3)$$

em que:

- $a_{ij}^+ = w(i, j)$ é o peso do arco que vai da transição t_i para o lugar de saída p_j ;
- $a_{ij}^- = w(j, i)$ é o peso do arco que vai do lugar p_j para a transição de saída t_i .

Observa-se que, a matriz de incidência A transposta é igual a subtração da matriz Pre da matriz $Post$, ou seja,

$$A^T = Post - Pre. \quad (0.4)$$

Exemplo 5 A rede de Petri vista na Figura 0.4 tem a sua matriz de incidência dada por:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

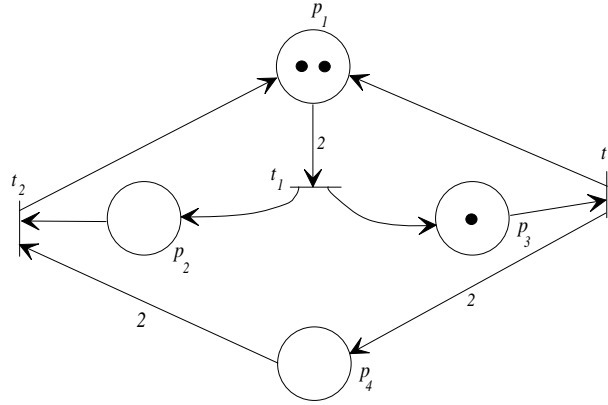


Figura 0.4: Rede de Petri para construção da matriz de incidência

Dinâmica

As redes de Petri possuem uma evolução dinâmica determinada por disparos de transições habilitadas em determinadas marcações e que modificam as marcações dos lugares. Assim, para um lugar p_i que contém um número n_i de fichas e habilita uma transição t , se esta transição dispara, há uma redução de fichas no número de fichas do lugar p_i para $n_i - w(p_i, t)$, com $w(p_i, t)$ sendo o peso do arco que liga p_i a t . Se há um lugar p_j com n_j fichas, sendo lugar de saída da transição t , então uma quantidade de fichas em p_j é aumentada para $n_j + w(t, p_j)$, em que $w(t, p_j)$ é o peso do arco ligando t a p_j . A evolução dinâmica de uma rede de Petri é formalizada através de algumas regras, as quais são apresentadas a seguir.

Definição 5 A mudança da marcação da rede de Petri segue as seguintes regras de disparo das transições:

1. Uma transição t é dita estar habilitada (pronta para disparar) em uma marcação M se e somente se

$$\begin{aligned} \forall p \in P \text{ que é entrada de } t : W(p, t) &\leq M(p) \\ \forall p \in P \text{ que é saída de } t : M(p) &\leq K(p) - W(t, p); \end{aligned}$$

2. Uma transição habilitada pode ou não disparar;
3. O disparo de uma transição $t \in T$, habilitada na marcação M , é instantânea e resulta em uma nova marcação M' da rede dada pela equação:

$$M'(p) = M(p) - W(p, t) + W(t, p), \forall p \in P; \quad (0.5)$$

4. A ocorrência do disparo de t , que modifica a marcação M da rede para uma nova marcação M' , é denotada por $M[t] M'$.

Exemplo 6 Na Figura 0.5, é visto um exemplo de uma rede de Petri com marcação inicial

$$M_0 = [2 \quad 0 \quad 0]^T,$$

e sua nova marcação, após o disparo da transição t . Observa-se que após o disparo de t , a nova marcação é

$$M_1 = [1 \quad 2 \quad 1]^T,$$

e que esta marcação está de acordo com a regra 3 de disparo das transições.

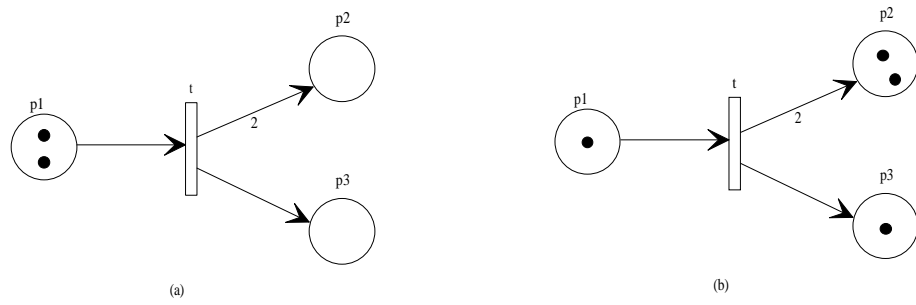


Figura 0.5: Exemplo de uma rede de Petri antes e após o disparo de sua transição.

Observação: Utiliza-se também a notação $M_k[t]$ significando que t está habilitada na marcação M_k .

Com a definição da dinâmica de uma rede de Petri, entende-se então que na representação da matriz de incidência de uma rede de Petri, $a_{ij}^+ = w(i, j)$ é o número de fichas acrescentadas ao lugar p_j quando a transição t_i dispara e $a_{ij}^- = w(j, i)$ representa o número de fichas removidas do lugar p_j quando a transição t_i dispara. Dessa forma, a_{ij} representa o número de fichas alteradas no lugar p_j quando a transição t_i dispara uma vez. Deve-se observar que uma transição t_i somente está habilitada numa marcação M , se e somente se $a_{ij}^- \leq M(p_j)$.

Grafo de alcançabilidade

Sempre que em uma rede de Petri uma transição t dispara, há uma mudança em sua marcação, como definido pela regra de disparos das transições. Assim, é possível construir um grafo que contenha todas as marcações alcançáveis da rede de Petri. Esse grafo é representado por um conjunto de marcações alcançáveis, orientado por arcos etiquetados pelas transições que disparam levando de uma marcação M para uma outra marcação M' . Define-se o grafo de alcançabilidade como:

Definição 6 *Grafo de alcançabilidade de uma rede de Petri é o grafo $G = (V, E)$ que apresenta todas as possíveis marcações a partir da marcação inicial M_0 , bem como todos os possíveis disparos a partir de cada marcação, onde V é um conjunto de nós (marcações alcançadas) e E um conjunto de transições disparáveis na rede.*

Dessa forma, dada a marcação inicial M_0 , com o disparo de cada transição t_i habilitada, são encontradas novas marcações M_i . A partir de cada uma destas marcações M_i , pelo disparo de cada transição t' habilitada são encontradas outras marcações M'_j , e assim por diante. Esse conjunto de marcações direcionadas por arcos etiquetados pelas respectivas transições t , formam um grafo de marcações no qual se pode obter toda a informação sobre quais transições levam de uma marcação a outra.

Exemplo 7 *Na Figura 0.6(a), é apresentada uma rede de Petri com marcação inicial*

$$M_0 = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T.$$

Na Figura 0.6(b), está seu grafo de alcançabilidade, em que este representa todos os possíveis disparos das transições da rede de Petri, a partir da marcação M_0 , conside-

rando o vetor de marcações representado por

$$M = [\begin{array}{ccccc} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 \end{array}].$$

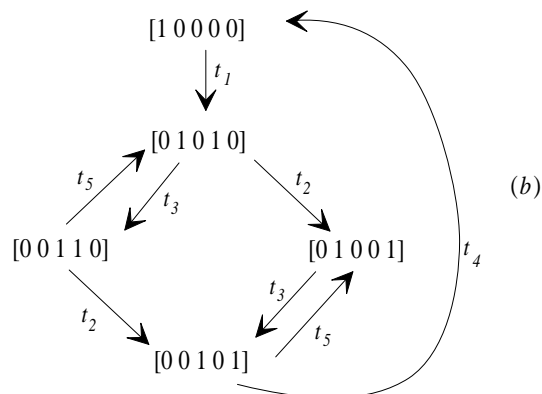
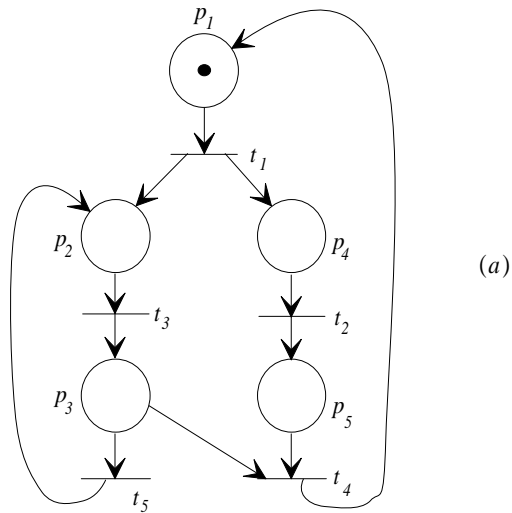


Figura 0.6: Exemplo de um grafo de alcançabilidade.

Deve-se observar que, por conveniência, no grafo de alcançabilidade o vetor de marcação sempre é representado por um vetor linha (dimensão $1 \times n$), e não por um vetor coluna (dimensão $n \times 1$), que é a representação matemática.

Outras definições

Algumas definições são de importância básica para o uso das redes de Petri, na modelagem de sistemas. Essas definições são: a transição fonte, a transição sorvedouro, o auto-laço, a rede de Petri pura e a rede de Petri ordinária.

Definição 7 *Uma transição sem lugar de entrada é chamada de **transição fonte**.*

Dessa definição, vê-se que uma transição fonte é uma transição que está sempre habilitada, pois sempre satisfaz as condições de disparo das transições, desde que seu lugar de saída tenha capacidade infinita.

Exemplo 8 *Na Figura 0.7 é apresentada uma transição fonte. Como não há nenhum lugar de entrada e o lugar de saída tem capacidade infinita, esta transição está sempre habilitada, podendo disparar. O constante disparo dessa transição aumenta o número de fichas no lugar p infinitamente.*

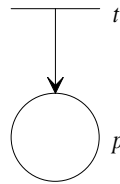


Figura 0.7: Exemplo de uma transição fonte.

Definição 8 *Uma transição sem lugar de saída é chamada de **transição sorvedouro**.*

Assim, por esta definição, vê-se que uma transição sorvedouro é uma transição que apenas consome fichas. Este tipo de transição necessita que sempre haja uma quantidade de fichas igual ao peso do arco para poder se tornar habilitada.

Exemplo 9 *Na Figura 0.8 é apresentada uma transição sorvedouro. Todas as fichas existentes no lugar p são consumidas após a transição t disparar quatro vezes. Como não há nenhum lugar de saída, as fichas do lugar p são apenas consumidas e a evolução da rede pára.*

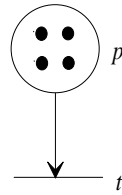


Figura 0.8: Exemplo de uma transição sorvedouro.

Definição 9 *Auto-laço* é um par formado por um lugar p e uma transição t , tal que p é, ao mesmo tempo, entrada e saída de t .

Há dois tipos de auto-laços a serem considerados:

1. Auto-laço em que o lugar p contém uma ficha (ou o número específico de fichas necessários ao seu disparo) - nesse caso, a transição t está sempre habilitada, podendo disparar. Porém, considera-se para fins práticos que quando a transição t dispara, uma (ou n , dependendo do peso do arco) ficha é retirada do lugar p , e novamente colocada;
2. Auto-laço em que o lugar p não contém fichas - neste caso, pode-se considerar que a transição t pode disparar (uma ficha é colocada e novamente retirada), ou não (o lugar não contém fichas para habilitar a transição).

Exemplo 10 Na Figura 0.9 são apresentados os tipos de auto-laços. No caso da Figura 0.9(a), sempre que t dispara, uma ficha é retirada do lugar p , e colocada novamente no lugar p .

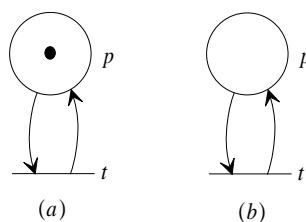


Figura 0.9: Exemplos de auto-laços.

Observação: Deve-se observar que nos auto-laços, os pesos dos arcos são iguais.

Outras definições são as seguintes:

Definição 10 *Rede de Petri pura* é uma rede de Petri que não contém auto-laços.

Definição 11 *Rede de Petri ordinária* é uma rede de Petri em que todos os arcos têm pesos unitários.

Exemplo 11 A rede de Petri vista na Figura 0.6, é uma rede de Petri pura e ordinária, pois não contém auto-laços e todos os seus arcos têm pesos unitários.

Propriedades das redes de Petri

As redes de Petri apresentam determinadas propriedades, cujo estudo possibilita analisar várias características e problemas associados aos sistemas concorrentes. Essas propriedades são classificadas em propriedades comportamentais e propriedades estruturais. As propriedades comportamentais são as características relacionadas à evolução dinâmica da rede. As propriedades estruturais são as características referentes à sua estrutura E_{rp} .

Propriedades comportamentais

As propriedades comportamentais de uma rede de Petri são definidas como características que uma rede com uma marcação inicial apresenta de acordo com sua evolução dinâmica.

As redes de Petri apresentam oito propriedades comportamentais que são: alcançabilidade, limitação, vivacidade, reversibilidade e estado de passagem, cobertura, persistência, distância síncrona e regularidade. Aqui são tratadas cada uma destas propriedades.

Alcançabilidade

Como na dinâmica da rede de Petri, uma transição habilitada pode disparar. Quando ocorre seu disparo, há uma mudança na marcação da rede. Se há uma seqüência de disparos de transições, esta seqüência resulta em uma seqüência de marcações alcançadas.

Assim, uma marcação M_n é alcançável a partir da marcação inicial M_0 , se existir uma seqüência de disparos s que transforma M_0 em M_n , isto é, $M_0 [s] M_n$.

Sendo $L(RP)$ o conjunto de todas as seqüências de disparos possíveis a partir de M_0 , define-se o problema da alcançabilidade como a seguir:

Definição 12 *O problema da alcançabilidade para redes de Petri é o problema de determinar se uma marcação $M_n \in MA(E_{rp}, M_0)$ para uma marcação M_n qualquer, numa rede $RP = (E_{rp}, M_0)$.*

Exemplo 12 *A marcação*

$$M = [0 \quad 1 \quad 3]^T$$

da rede de Petri vista na Figura 0.10 é alcançável, pois existe a seqüência $s = t_1 t_2 t_1 t_3$ que muda a marcação da rede de

$$M_0 = [2 \quad 0 \quad 0]^T$$

para M .

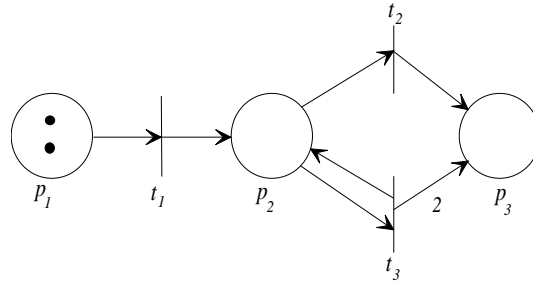


Figura 0.10: Rede de Petri

Em alguns casos, apenas algumas marcações de um subconjunto de lugares interessa para uma determinada questão em análise. Dessa forma, define-se:

Definição 13 *O problema da alcançabilidade de uma submarcação é o problema de determinar se alguma marcação que contenha uma submarcação (marcação de um subconjunto de lugares) pertence a $MA(E_{rp}, M_0)$.*

Exemplo 13 Considerando o subconjunto de lugares p_1 , p_3 e p_5 , com o vetor de sub-marcação

$$M = [p_1 \quad p_3 \quad p_5]^T,$$

a submarcação

$$M = [1 \quad 4 \quad 4]^T$$

da rede de Petri vista na Figura 0.11 é alcançável, pois existe a seqüência

$$s = t_4 t_4 t_4 t_2 t_3 t_2$$

que muda a submarcação da rede de

$$M_0 = [4 \quad 0 \quad 0]^T$$

para M . Observe que o vetor de marcação é definido por

$$M = [p_1 \quad p_2 \quad p_3 \quad p_4 \quad p_5]^T.$$

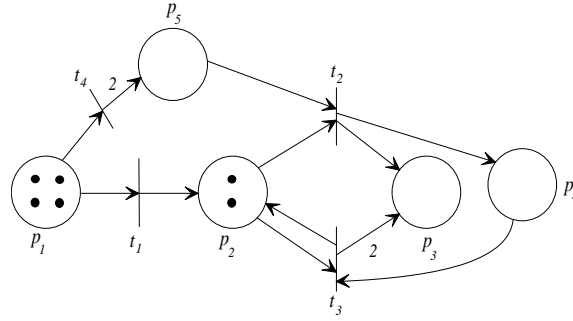


Figura 0.11: Rede de Petri

Limitação

A limitação de uma rede de Petri é uma característica natural, em que alguns lugares podem apresentar um limite máximo no número de fichas.

Embora a função de capacidade K definida para as redes de Petri limitem o número de fichas nos lugares para qualquer seqüência de disparos, a propriedade de limitação delimita, em alguns casos, este número sem a necessidade explícita da definição da função K . Assim, define-se:

Definição 14 Um lugar p de uma rede de Petri $RP = (E_{rp}, M_0)$ é k -limitado se para toda marcação alcançável

$$M \in MA(E_{rp}, M_0), M(p) \leq k.$$

Caso contrário, p é não limitado. Se p é 1-limitado, o lugar p é chamado de binário.

De acordo com esta definição, pode-se ver que um lugar p em uma rede de Petri pode ter uma limitação natural no número de fichas, pois sua marcação nunca ultrapassa este valor. Essa limitação natural refere-se a que, para quaisquer seqüências de disparos de transições há sempre um valor k finito, tal que o máximo número de fichas que um determinado lugar da rede pode conter em qualquer execução é sempre k , embora sua capacidade K seja infinita.

Exemplo 14 A rede de Petri apresentada na Figura 0.12 tem todos os lugares p_1 , p_2 e p_3 3-limitados, pois em qualquer seqüência de disparos das transições, suas marcações não ultrapassam o valor 3.

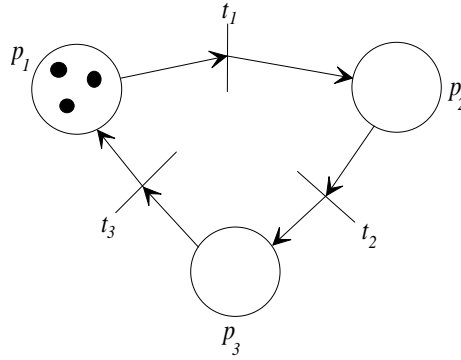


Figura 0.12: Rede de Petri com p_2 3-limitado.

Definição 15 Uma rede de Petri $RP = (E_{rp}, M_0)$ é limitada se para cada lugar p da rede existe um inteiro k tal que p seja k -limitado.

Dessa definição, tem-se que uma rede de Petri é limitada se todos os seus lugares são limitados.

Exemplo 15 A rede de Petri da Figura 0.12 é limitada, pois não há nenhuma seqüência de disparos das transições que preencha os seus lugares com um número infinito de fichas, pois como visto no Exemplo 14, seus lugares são 3-limitados.

Definição 16 Uma rede de Petri $RP = (E_{rp}, M_0)$ é k -limitada se o número de fichas em qualquer lugar não excede um número finito k para qualquer marcação alcançável a partir de M_0 , ou seja, se

$$M(p) \leq k \quad \forall p \in P, \forall M \in MA(E_{rp}, M_0).$$

Então, a limitação de uma rede de Petri é determinada pela máxima limitação entre seus lugares.

Exemplo 16 A rede de Petri do Exemplo 14, é 3-limitada, pois todos os seus lugares, no máximo, alcançam a marcação $M(p_i) = 3$, para $i = 1, 2, 3$.

Definição 17 Uma rede de Petri $RP = (E_{rp}, M_0)$ é dita segura se ela é 1-limitada.

Exemplo 17 A rede de Petri vista na Figura 0.13 é segura, pois todos os seus lugares são 1-limitados.

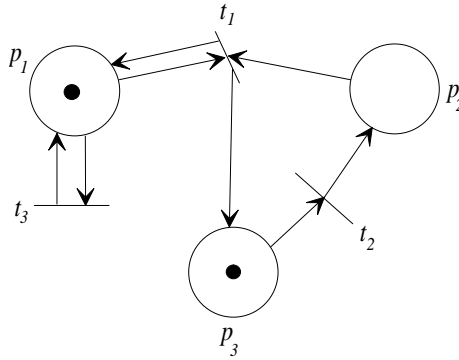


Figura 0.13: Rede de Petri segura.

A limitação de uma rede de Petri pode ser avaliada em determinadas situações específicas, em que seqüências de transições podem sempre ocorrer repetitivamente. Assim, define-se uma seqüência repetitiva como a seguir:

Definição 18 *Seja s uma seqüência formada com as transições de uma rede de Petri $RP = (E_{rp}, M_0)$. A seqüência s é repetitiva se, para toda marcação M da rede RP , tal que $M[s]$, $s^* \subseteq L(RP)$.*

Exemplo 18 *Na rede de Petri da Figura 0.12, apresentada no Exemplo 14, algumas das seqüências s_i repetitivas, são:*

$$\begin{aligned} s_1 &= t_1 t_2 t_3 \\ s_2 &= t_1^2 t_2^2 t_3^2 \\ s_3 &= t_1^3 t_2^3 t_3^3 \\ s_4 &= (t_1 t_2)^2 t_3^2. \end{aligned}$$

Na rede de Petri da Figura 0.13, apresentada no Exemplo 17, algumas das seqüências s_i repetitivas são:

$$\begin{aligned} s_1 &= t_3 \\ s_2 &= t_3^* t_2 t_1 \\ s_3 &= t_2 t_1 t_3^*. \end{aligned}$$

Quando uma seqüência de disparos é repetitiva e a marcação dos lugares sempre aumentam, denomina-se esta seqüência de seqüência repetitiva crescente. Formalmente, tem-se:

Definição 19 *Uma seqüência de disparos é repetitiva crescente para o lugar p se, para todo par de marcações (M, M') tal que*

$$M[s] M', M' > M$$

com $M'(p) > M(p)$.

Exemplo 19 *A rede de Petri vista na Figura 0.14 apresenta uma marcação crescente no lugar p_2 sempre que a seqüência $s = t_1 t_2$ ocorre repetitivamente. Logo, s é uma seqüência repetitiva crescente.*

Uma rede de Petri é não limitada se e somente se ela apresenta uma seqüência de disparos de transições repetitiva crescente s para um lugar p e uma marcação alcançável $M \in MA(E_{rp}, M_0)$, tal que $M[s]$.

Exemplo 20 *Uma rede de Petri com apenas um lugar e uma transição fonte, sem definição da função de capacidade para o lugar p , é não limitada e sua única seqüência de disparos de transição é repetitiva e crescente, isto é, $s = t^*$.*

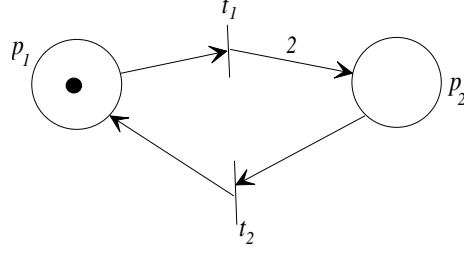


Figura 0.14: Rede de Petri com seqüência repetitiva crescente.

Vivacidade

O conceito de vivacidade de uma rede de Petri está relacionado com a ausência de bloqueios. Um bloqueio é a situação em que para qualquer marcação alcançada, a rede não pode mais disparar uma ou mais transições. Isto é, em nenhuma marcação alcançada, nunca são atingidos os números de fichas nos lugares de entrada das transições, ou sempre seus lugares de saída (que apresentem uma capacidade definida K) estão com uma marcação tal que tais transições não podem disparar.

Uma rede de Petri é viva se em qualquer marcação alcançada a partir da marcação inicial M_0 , sempre houver a possibilidade de disparar qualquer transição da rede, por meio de uma seqüência de disparos de transições. Assim, uma rede de Petri viva garante uma operação livre de bloqueios.

Exemplo 21 A rede de Petri vista na Figura 0.15(a), torna-se bloqueada (morta) quando, seguindo a seqüência de disparos de transições $s = t_1 t_1$, a marcação

$$M = [2 \quad 0 \quad 0]^T,$$

é alcançada, em que nenhuma transição está habilitada. Esta seqüência pode ser vista em seu grafo de alcançabilidade mostrado na Figura 0.15(b). Portanto, esta rede não é viva.

Definição 20 Uma transição t de uma rede de Petri $RP = (E_{rp}, M_0)$ é dita ser quasi-viva se existe uma marcação alcançável $M \in MA(E_{rp}, M_0)$ tal que $M[t\rangle$.

Assim, uma transição t é dita *quasi-viva* se ela pode disparar pelo menos uma vez em alguma marcação alcançada da rede. Se uma transição não possuir esta propriedade, ela é inútil ao funcionamento da rede, podendo ser eliminada.

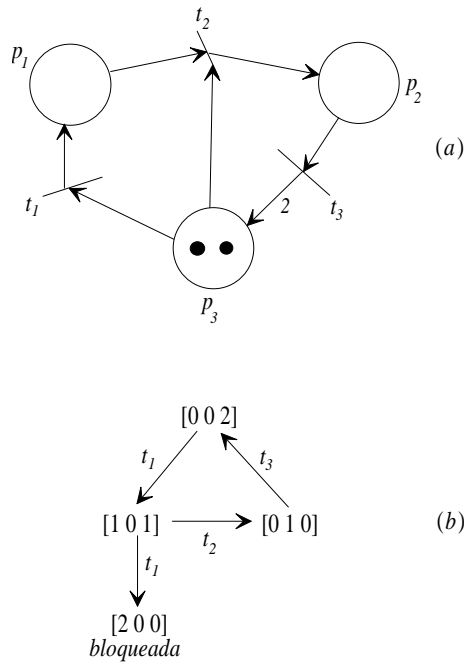


Figura 0.15: (a) Rede de Petri e (b) grafo de alcançabilidade. Há um bloqueio quando ocorre a seqüência de transições $s = t_1 t_1$, a partir da marcação inicial.

Exemplo 22 Na rede de Petri vista na Figura 0.16, a transição t_2 é quasi-viva, desde que a partir da marcação inicial, ela pode disparar uma única vez. Depois de seu disparo, ela não mais dispara em qualquer seqüência de disparos de transições da rede.

Exemplo 23 A transição t_3 da rede de Petri vista na Figura 0.17(a) não é quasi-viva, isto é, t_3 é morta, pois nunca pode disparar em qualquer marcação alcançada da rede. Logo, esta transição é inútil ao seu funcionamento, podendo ser eliminada. A rede de Petri resultante da eliminação de t_3 (vista na Figura 0.17(b)) apresenta o mesmo grafo de alcançabilidade da rede da Figura 0.17(a).

Definição 21 Uma rede de Petri $RP = (E_{rp}, M_0)$ é dita ser quasi-viva se todas as suas transições são quasi-vivas.

Desde que todas as transições de uma rede de Petri possam disparar pelo menos uma vez, a partir da marcação inicial, isto é, todas suas transições são *quasi-vivas*, a rede é *quasi-viva*.

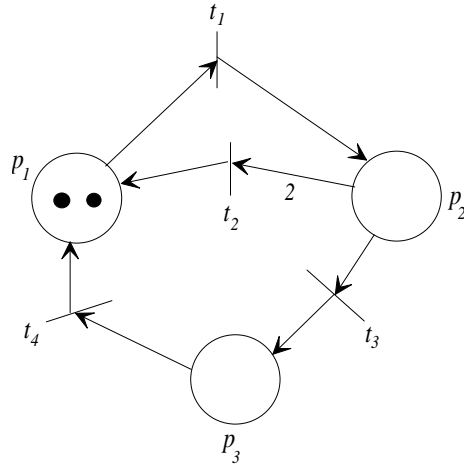


Figura 0.16: Rede de Petri com transição *quasi – viva*.

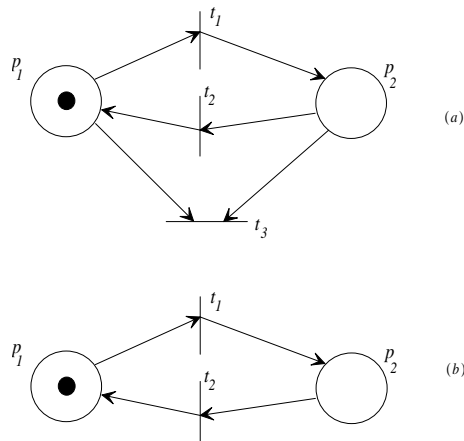


Figura 0.17: (a) Rede de Petri com transição t_3 morta e (b) rede de Petri resultante da eliminação de t_3 .

Exemplo 24 A rede de Petri vista na Figura 0.18 é quasi-viva, desde que todas as suas transições disparam apenas uma única vez, bloqueando a rede. Ou seja, todas as transições são quasi-vivas.

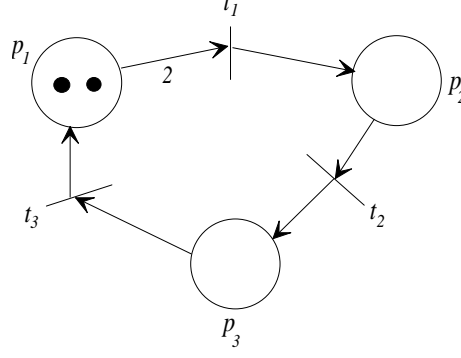


Figura 0.18: Rede de Petri *quasi – viva*.

Com a definição de quasi-vivacidade, torna-se necessário definir a vivacidade em uma rede de Petri. Para isto, as seguintes definições de vivacidade de transições são apresentadas:

Definição 22 Uma transição t de uma rede de Petri $RP = (E_{rp}, M_0)$ é viva se e somente se

$$\forall M \in MA(E_{rp}, M_0), \exists M' \in MA(E_{rp}, M),$$

tal que t é M' –habilitada (habilitada para M').

Definição 23 Uma transição t de uma rede de Petri $RP = (E_{rp}, M_0)$ é viva, se para toda marcação alcançável $M \in MA(E_{rp}, M_0)$, t é quasi-viva para a rede a partir da marcação M .

Exemplo 25 Na rede de Petri apresentada na Figura 0.16, do Exemplo 22, as transições t_1 , t_3 e t_4 são vivas, pois para qualquer marcação M , existe uma marcação M' onde estas transições podem disparar.

Define-se uma rede de Petri *viva* como a seguir:

Definição 24 Uma rede de Petri $RP = (E_{rp}, M_0)$ é viva se todas as suas transições são vivas.

Exemplo 26 A rede de Petri da Figura 0.16 não é viva, pois t_2 não é viva.

Também, pode-se definir uma rede de Petri *viva* como a seguir:

Definição 25 Uma rede de Petri $RP = (E_{rp}, M_0)$ é viva se existe uma marcação M tal que a rede $RP = (E_{rp}, M_0)$ a partir da marcação M , isto é, $RP = (E_{rp}, M)$, seja viva.

Exemplo 27 A rede de Petri vista na Figura 0.19 é viva pois todas as suas transições são vivas.

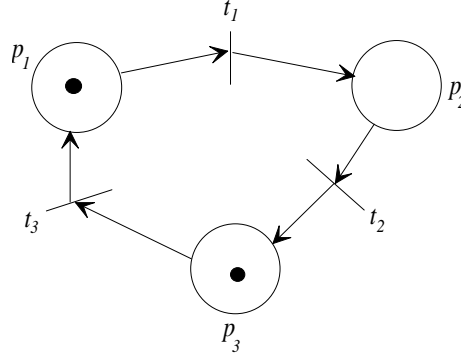


Figura 0.19: Rede de Petri *viva*.

Define-se ainda a rede de Petri *pseudo-viva*:

Definição 26 Uma rede de Petri $RP = (E_{rp}, M_0)$ é pseudo-viva se para toda marcação $M \in MA(E_{rp}, M_0)$, existe uma transição habilitada para M .

Com esta definição, vê-se que as redes de Petri que têm transições *quasi-vivas*, são redes de Petri *pseudo-vivas*.

Exemplo 28 A rede de Petri vista na Figura 0.16, do Exemplo 22 é pseudo-viva, pois a transição t_2 é quasi-viva. Seu disparo resulta na sua total inibição.

Com estas definições, são estruturadas as condições de vivacidade de uma rede de Petri. O conceito de vivacidade pode ser colocado a diferentes níveis, como a seguir:

Definição 27 Uma transição t numa rede de Petri $RP = (E_{rp}, M_0)$ é dita ser:

1. morta (L_0 – viva) se t nunca pode disparar em qualquer seqüência de disparos de transições da rede;
2. L_1 – viva (potencialmente disparável, ou quasi-viva) se t pode disparar pelo menos uma vez em alguma seqüência de disparos de transições da rede;
3. L_2 – viva se, dado um inteiro positivo k qualquer, a transição t pode disparar pelo menos k vezes em alguma seqüência de disparos de transições da rede;
4. L_3 – viva se a transição t aparece infinitamente em alguma seqüência de disparos de transições da rede;
5. L_4 – viva (ou viva) se a transição t é L_1 – viva em cada marcação M da rede $RP = (E_{rp}, M_0)$.

Com essa definição, estende-se o conceito de vivacidade para as redes de Petri como a seguir:

Definição 28 Uma rede de Petri $RP = (E_{rp}, M_0)$ é L_k – viva se todas as suas transições forem L_k – vivas, para $k = 0, 1, 2, 3, 4$.

Também define-se:

Definição 29 Uma transição t é estritamente L_k – viva se ela é L_k – viva mas não é L_{k+1} – viva, para $k = 1, 2, 3$.

Exemplo 29 A rede de Petri da Figura 0.18, do Exemplo 24 é estritamente L_1 –viva, pois cada transição pode ser disparada exatamente uma vez, na seqüência $t_1 t_2 t_3$.

Exemplo 30 Na Figura 0.20, as transições t_1, t_2, t_3 e t_4 são, respectivamente, L_0 –viva, estritamente L_1 –viva, L_2 –viva e L_3 –viva.

Um outro conceito, é dado a seguir:

Definição 30 Uma marcação M de uma rede de Petri $RP = (E_{rp}, M_0)$ é chamada de **marcação poço** se nenhuma transição for disparável após M .

E assim, pode-se definir uma rede sem bloqueio:

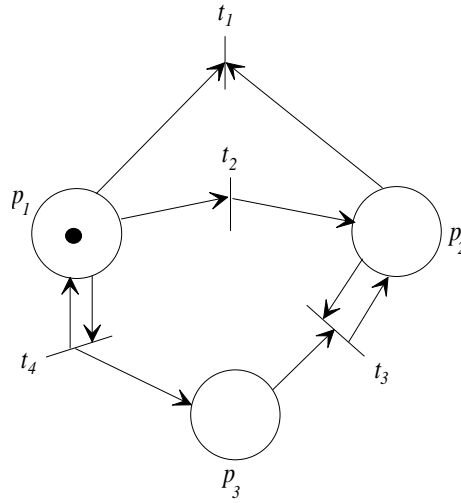


Figura 0.20: Rede de Petri com transições t_1 , t_2 , t_3 e t_4 , L_0 -viva, estritamente L_1 -viva, L_2 -viva e L_3 -viva, respectivamente.

Definição 31 Uma rede de Petri $RP = (E_{rp}, M_0)$ é dita **sem bloqueio** se nenhuma marcação alcançável a partir de M_0 for uma **marcação poço**.

Com esta definição, observa-se que a noção de rede de Petri sem bloqueio é mais fraca que a de rede de Petri viva.

Exemplo 31 A rede de Petri apresentada na Figura 0.21 é uma rede sem bloqueio. Contudo, vê-se que nenhuma de suas transições é viva.

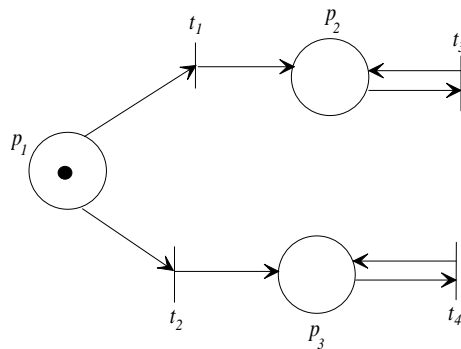


Figura 0.21: Rede de Petri sem bloqueio e sem transições vivas.

Exemplo 32 Na rede mostrada na Figura 0.22, existe um bloqueio quando se segue a seqüência de disparos de transições:

$$t_1 t_2 t_3 t_4 t_1 t_2 t_3 t_1 t_2 t_3 t_1 t_2.$$

Nessa marcação alcançada, nenhuma transição está habilitada. Logo, a marcação alcançada é uma marcação poço.

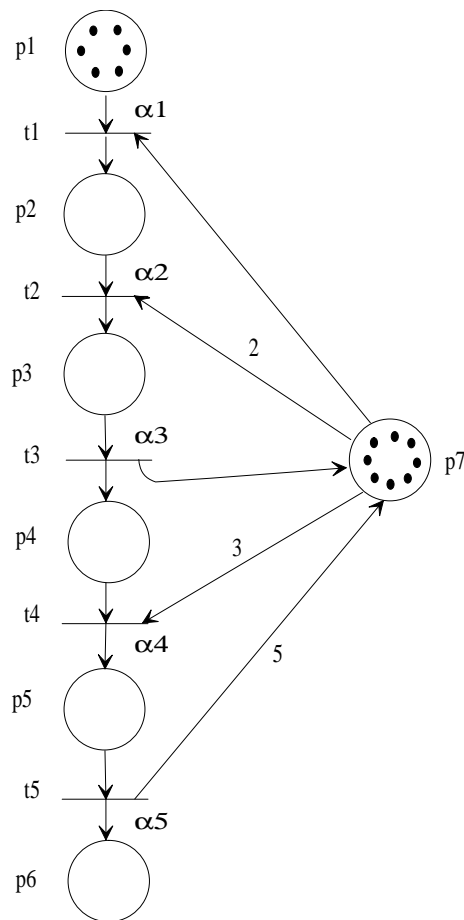


Figura 0.22: Rede de Petri com bloqueio.

Reversibilidade e estado de passagem

A propriedade de reversibilidade garante que uma rede de Petri sempre pode alcançar seu estado inicial a partir de uma determinada marcação. Formalmente, a reversibilidade é definida como a seguir:

Definição 32 Uma rede de Petri $RP = (E_{rp}, M_0)$ é reversível se, para toda marcação $M \in MA(E_{rp}, M_0)$, M_0 for alcançável a partir de M , através de uma seqüência qualquer de disparos de transições s , isto é, $M[s] M_0$, $s \in L(RP)$.

Assim, a partir de uma marcação qualquer da rede de Petri, se ela atinge o estado inicial através de uma seqüência de disparos de transições s qualquer, ela é reversível.

Exemplo 33 A rede de Petri mostrada na Figura 0.23 é reversível, pois a partir de qualquer marcação M , ela sempre pode retornar à marcação inicial.

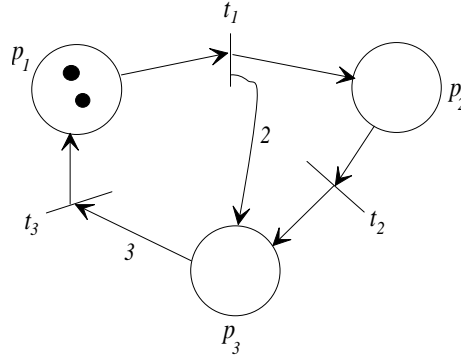


Figura 0.23: Rede de Petri reversível.

Em alguns casos, deseja-se que uma rede de Petri, a partir de uma marcação qualquer, sempre retorne a uma determinada marcação, não necessariamente a marcação inicial. Esta situação define o estado de passagem.

Definição 33 Uma marcação M' é um estado de passagem se para toda marcação $M \in MA(E_{rp}, M_0)$, M' é alcançável a partir de M .

O estado de passagem pode ser visto no grafo de alcançabilidade da rede de Petri.

Exemplo 34 A rede de Petri mostrada na Figura 0.24(a) tem como estado de passagem a marcação

$$M' = [1 \ 1 \ 0]^T,$$

pois a partir de qualquer marcação M , ela sempre pode retornar à marcação M' , através de uma seqüência de disparos s , o que pode ser visto no seu grafo de alcançabilidade apresentado na Figura 0.24(b). Esta rede também é reversível.

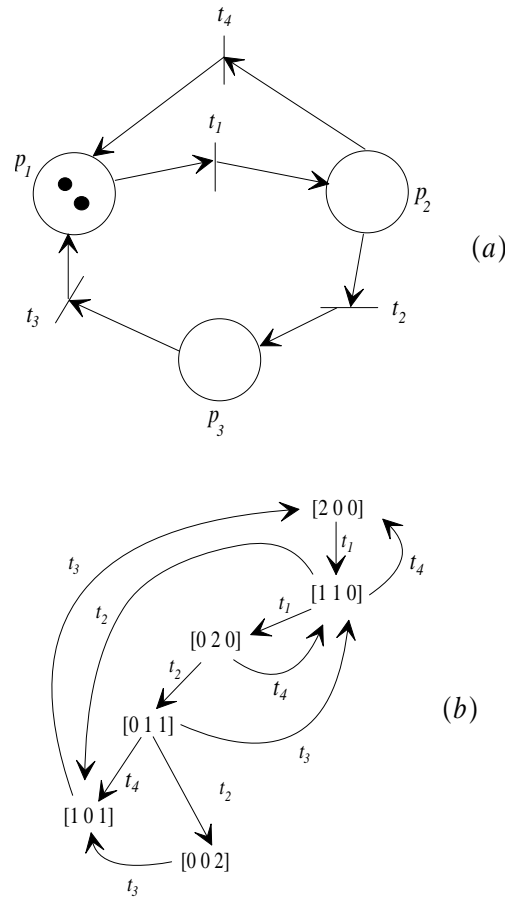


Figura 0.24: (a) Rede de Petri com estado de passagem $M' = [1\ 0\ 2]^T$ e (b) grafo de alcançabilidade.

Deve-se observar que toda rede de Petri reversível tem a marcação inicial como um estado de passagem.

Cobertura

Em uma rede de Petri, a propriedade de cobertura pode determinar a existência de transições mortas através da análise das suas marcações.

Definição 34 *Uma marcação M em uma rede de Petri $RP = (E_{rp}, M_0)$ é cobrível se existe uma marcação $M' \in MA(E_{rp}, M_0)$, tal que $M'(p) \geq M(p), \forall p \in P$.*

Assim, se M é a menor marcação necessária para habilitar uma determinada transição t , então t é morta se e somente se M não for cobrível.

Exemplo 35 *Na rede de Petri vista na Figura 0.25(a) pode-se ver que a marcação inicial*

$$M_0 = [2 \quad 0 \quad 0]^T$$

é sempre cobrível. Logo, todas as transições são vivas e, conseqüentemente, a rede é viva. No caso da rede de Petri da Figura 0.25(b), a marcação

$$M = [0 \quad 2 \quad 0]^T$$

não é cobrível por nenhuma marcação, determinando que t_2 é uma transição morta.

Persistência

Uma rede de Petri $RP = (E_{rp}, M_0)$ é dita ser persistente se a seguinte condição for satisfeita: dadas duas transições habilitadas quaisquer da rede, o disparo de uma não implica na desabilitação da outra.

Em uma rede persistente, uma transição habilitada permanece habilitada até disparar. Formalmente, sua definição é como segue:

Definição 35 *Uma rede de Petri $RP = (E_{rp}, M_0)$ é persistente se, para toda marcação $M \in MA(E_{rp}, M_0)$ e para todo par de transições distintas $t, t' \in T$, $M[t\rangle$ e $M[t'\rangle$ implicam $M[tt'\rangle$ e, por simetria, $M[t't\rangle$.*

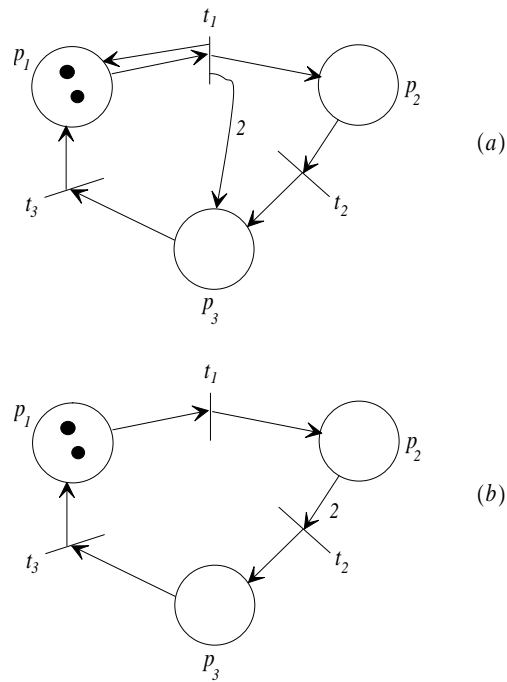


Figura 0.25: (a) Rede de Petri com marcação $M_0 = [2 \ 0 \ 0]^T$ cobrível e (b) rede de Petri com transição t_2 morta - $M = [0 \ 2 \ 0]^T$ não cobrível.

Desta definição, pode-se ver que para uma determinada marcação na rede de Petri, duas transições distintas podem disparar em seqüência, desde que ambas estejam habilitadas e, o disparo de uma não interfere na habilitação da outra.

Exemplo 36 A rede de Petri apresentada na Figura 0.26(a) é persistente, desde que para quaisquer duas transições habilitadas em uma determinada marcação, o disparo de uma não interfere na habilitação (e disparo) da outra. Contudo, a rede de Petri apresentada na Figura 0.26(b) é não persistente, pois para a marcação

$$M = [0 \ 1 \ 0]^T,$$

o disparo da transição t_1 inibe o disparo da transição t_2 e vice-versa.

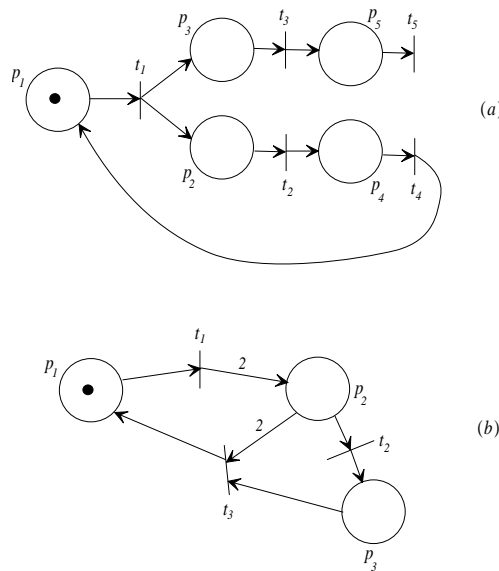


Figura 0.26: (a) Rede de Petri persistente e (b) rede de Petri não persistente - a transição t_1 disparando, interfere no disparo da transição t_2 , e vice-versa.

Uma condição suficiente, todavia não necessária para testar a persistência de uma rede de Petri é que nenhum par de transições tenha lugar de entrada comum, como visto no Exemplo 36.

Distância síncrona

A distância síncrona em uma rede de Petri é uma medida estreitamente relacionada com o grau de dependência mútua entre dois eventos. Assim, a distância síncrona

refere-se ao número máximo de vezes que uma, entre duas transições, dispara em uma seqüência s .

Definição 36 *Distância síncrona entre duas transições t_1 e t_2 em uma rede de Petri $RP = (E_{rp}, M_0)$ é definida como*

$$d_{12} = \max_s |\bar{s}(t_1) - \bar{s}(t_2)|$$

onde s é uma seqüência de disparos a partir de qualquer marcação $M \in MA(E_{rp}, M_0)$ e

$$\bar{s}(t_i)$$

é o número de vezes que a transição t_i , $i = 1, 2$, dispara em s .

Exemplo 37 *A rede de Petri vista na Figura 0.27 apresenta as seguintes distâncias síncronas:*

- $d_{12} = 1$ (sempre há uma diferença de um disparo entre as duas);
- $d_{34} = 1$ (igual a d_{12}) e
- $d_{13} = \infty$ (após o primeiro disparo de t_3 , t_1 não mais dispara, mas t_3 pode disparar infinitas vezes).

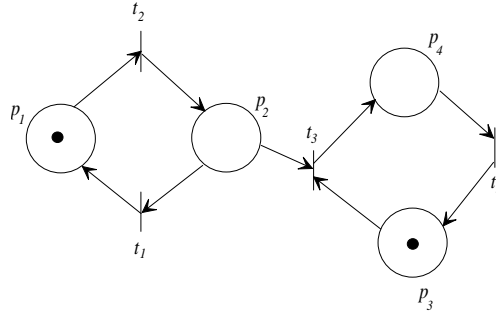


Figura 0.27: Rede de Petri para cálculo das distâncias síncronas entre suas transições.

Regularidade

Na teoria de linguagens formais [24, 25], o conceito de regularidade define a possibilidade de representação de uma dada linguagem por meio de um autômato finito [26, 9]. No caso das redes de Petri, tem-se então:

Definição 37 *Duas transições t_1 e t_2 estão em uma relação regular-limitada se o número máximo de vezes que uma pode disparar sem que a outra dispare, é limitado.*

Desta definição, vê-se que duas transições estão em uma relação *regular-limitada* se a distância síncrona entre elas é finita.

Definição 38 *Uma rede de Petri $RP = (E_{rp}, M_0)$ é uma rede regular-limitada se todos os pares de transições na rede estiverem em uma relação regular-limitada.*

Uma outra definição refere-se às seqüências de disparos de transições.

Definição 39 *Uma seqüência de disparos s é dita incondicionalmente (globalmente) regular se ela é finita ou se cada transição da rede aparecer infinitamente em s .*

Desta forma, uma rede de Petri é incondicionalmente regular de acordo com a seguinte definição:

Definição 40 *Uma rede de Petri $RP = (E_{rp}, M_0)$ é uma rede incondicionalmente regular se todas as seqüências de disparos forem incondicionalmente regulares.*

Com essas definições, conclui-se que toda rede de Petri *regular-limitada* é *incondicionalmente regular* e toda rede de Petri *incondicionalmente regular* é *regular-limitada*.

Exemplo 38 *A rede de Petri vista na Figura 0.28(a) é regular, pois sua distância síncrona é $d_{12} = 1$. Por outro lado, a rede de Petri vista na Figura 0.28(b) é não regular, pois o número de vezes que t_3 pode disparar sem que t_1 dispare é infinito ($d_{31} = \infty$).*

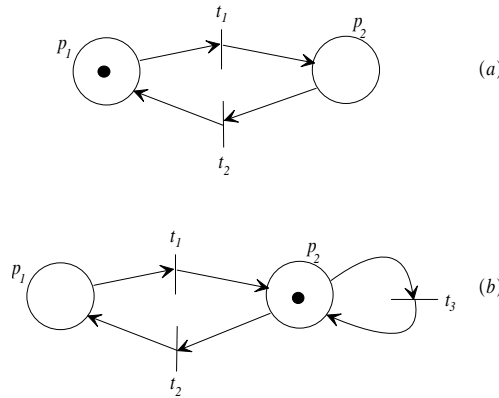


Figura 0.28: (a) Rede de Petri regular e (b) rede de Petri não regular.

Propriedades estruturais

As propriedades estruturais de uma rede de Petri são as características que se apresentam em relação à sua estrutura. Dentre as propriedades estruturais, aqui são apresentadas quatro: vivacidade estrutural, controlabilidade, limitação estrutural e repetibilidade. Estes conceitos representam as propriedades necessárias ao que se pretende neste livro.

Vivacidade estrutural

A vivacidade estrutural de uma rede de Petri é uma propriedade que garante que a rede pode apresentar uma evolução dinâmica inicial.

Definição 41 *Uma rede de Petri $RP = (E_{rp}, M_0)$ é estruturalmente viva se existe uma marcação inicial viva para a rede.*

Se uma dada rede de Petri tem uma marcação inicial M_0 onde não é possível disparar alguma transição através de qualquer sequência, esta rede de Petri não é estruturalmente viva.

Exemplo 39 *A rede de Petri vista na Figura 0.29(a) é estruturalmente viva, pois com a marcação inicial definida, qualquer transição pode disparar em alguma sequência. No caso da rede de Petri vista na Figura 0.29(b), com a marcação inicial definida, todas as transições são mortas. Logo, esta rede de Petri não é estruturalmente viva.*

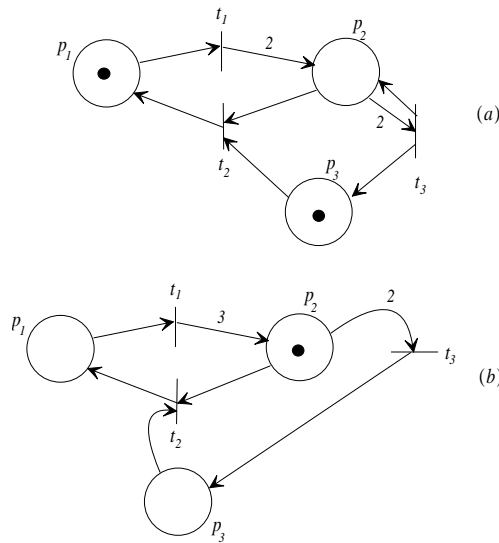


Figura 0.29: (a) Rede de Petri estruturalmente viva e (b) rede de Petri não estruturalmente viva.

Controlabilidade

Se em qualquer marcação de uma dada rede de Petri, é possível se atingir qualquer outra marcação por meio de uma sequência de disparos, esta rede de Petri é dita ser controlável. Formalmente, a propriedade de controlabilidade das redes de Petri é definida como:

Definição 42 Uma rede de Petri $RP = (E_{rp}, M_0)$ é completamente controlável se qualquer marcação é atingível a partir de qualquer marcação.

Exemplo 40 A rede de Petri vista na Figura 0.29(a) do Exemplo 39, é completamente controlável, pois de qualquer marcação da rede, é possível atingir qualquer outra marcação, a partir de uma sequência qualquer de disparos das transições.

Exemplo 41 Uma rede de Petri com apenas um lugar e uma transição fonte não é controlável, pois toda marcação atingida por meio do disparo de t , apenas aumenta o número de fichas no lugar p , e nunca é possível atingir uma marcação anterior.

Limitação estrutural

A limitação estrutural de uma rede de Petri garante que há uma limitação para qualquer marcação inicial.

Definição 43 Uma rede de Petri $RP = (E_{rp}, M_0)$ é estruturalmente limitada se ela é limitada para qualquer marcação inicial finita.

Exemplo 42 A estrutura de rede de Petri vista na Figura 0.30 é estruturalmente limitada, pois para qualquer marcação inicial M_0 finita que seja definida, sua limitação é $2n$, em que n é a soma do número de fichas de todos os lugares.

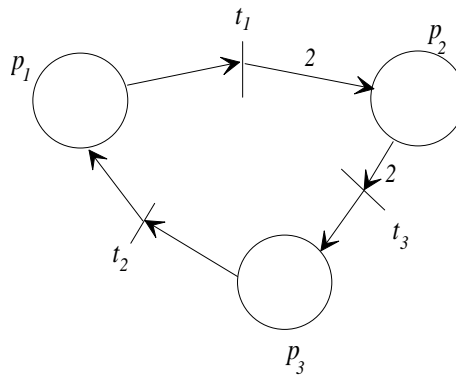


Figura 0.30: Rede de Petri estruturalmente limitada.

Repetibilidade

Dada uma marcação inicial em uma rede de Petri, se houver alguma seqüência s de disparos de transições onde uma transição t se repita infinitas vezes, essa rede de Petri é repetitiva.

Definição 44 Uma rede de Petri $RP = (E_{rp}, M_0)$ é repetitiva se dada sua marcação inicial existir uma seqüência de disparos $s \in T^*$, a partir de M_0 , tal que qualquer transição ocorra infinitamente em s .

Exemplo 43 Uma rede de Petri formada apenas por um lugar p e uma transição t , onde o lugar p é ao mesmo tempo entrada e saída de t , ou seja, um auto-laço, é repetitiva, pois satisfaz a Definição 44.

Definição 45 Uma rede de Petri $RP = (E_{rp}, M_0)$ é parcialmente repetitiva se existe uma marcação inicial M_0 e uma seqüência de disparos s , a partir de M_0 , tal que alguma transição ocorra infinitamente em s .

Exemplo 44 A rede de Petri vista na Figura 0.31 é parcialmente repetitiva, pois apenas t_2 pode ocorrer infinitamente na seqüência $s = t_1 t_2^* t_3$ a partir da marcação inicial.

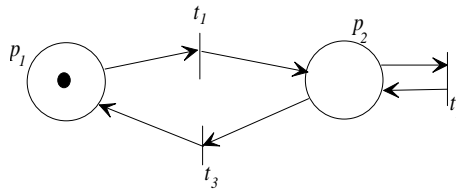


Figura 0.31: Rede de Petri parcialmente repetitiva.

Métodos de análise de redes de Petri

Dada uma rede de Petri, é necessário avaliar se suas características satisfazem os requerimentos exigidos. Em geral, para uma rede de Petri qualquer, alguns métodos são utilizados para obter informações à respeito de sua estrutura e de seu comportamento, permitindo determinar as propriedades da rede. Os métodos de análise de rede de Petri podem ser classificados nos três grupos a seguir:

1. Método da árvore de cobertura;
2. Abordagem por equação matricial;
3. Técnicas de redução ou decomposição.

Com estes três métodos é possível analisar todas as propriedades estudadas anteriormente, para uma rede de Petri qualquer.

Método da árvore de cobertura

Numa rede de Petri $RP = (E_{rp}, M_0)$, quando é feita uma seqüência de disparos de transições a partir da marcação inicial, encontra-se uma seqüência de marcações atingidas. A partir de qualquer uma dessas marcações atingidas, se houverem transições habilitadas, encontram-se novas marcações e assim por diante. Com isto, é possível mapear todas as marcações alcançadas na rede de Petri através de uma estrutura em forma de árvore. Esta estrutura de marcações alcançadas é denominada de árvore de cobertura.

Quando se usa o grafo de alcançabilidade para mapear as marcações em uma rede de Petri, simplesmente utiliza-se uma seta etiquetada com a transição que dispara, apontando para uma outra marcação, seja ela anterior, seja ela *nova* (posterior). Assim, se a rede de Petri é ilimitada (de capacidade infinita), o grafo de alcançabilidade tende a crescer infinitamente para poder representar todo o conjunto de marcações alcançáveis.

No caso da árvore de cobertura, utiliza-se de um símbolo especial, denotado por ω , para representar crescimentos de ramos infinitos em uma rede de Petri ilimitada, tornando-a limitada, o que não é possível no grafo de alcançabilidade. Assim, esta forma de análise permite avaliar mudanças de marcações seguindo uma determinada seqüência, além de ser útil na verificação do comportamento geral da rede, em que é possível avaliar se a mesma apresenta bloqueios ou outras situações não desejadas em busca de melhoras na sua estrutura.

O símbolo ω utilizado na construção da árvore de cobertura é definido formalmente como a seguir.

Definição 46 ω é o símbolo usado para representar um crescimento infinito em uma árvore de cobertura de uma rede de Petri $RP = (E_{rp}, M_0)$, e tem como propriedades:

$$\begin{aligned}\omega &> n, \forall n \in \mathbb{N} \\ \omega \pm n &= \omega, \forall n \in \mathbb{N} \\ \omega &\geq \omega.\end{aligned}$$

Com este símbolo, os ramos da árvore de cobertura que apresentam crescimento infinito devido ao aumento ilimitado de fichas em alguns lugares, são limitados a uma marcação apresentando ω no vetor de marcações, onde estão representados estes luga-

res. Esse símbolo indica que a última transição disparada se repetirá continuamente, levando a marcação do lugar para infinito.

Com esta definição, pode-se construir a árvore de cobertura para uma rede de Petri qualquer. A construção da árvore de cobertura, é feita utilizando o seguinte algoritmo:

Algoritmo 1 *Algoritmo da Árvore de cobertura*

- *Início*

Passo 1 *Rotule a marcação inicial M_0 de raiz e etiqüete-a com nova;*

Passo 2 *Enquanto houverem marcações nova, faça o seguinte:*

1. *Escolha uma nova marcação M ;*
2. *Se M for idêntica a outra marcação no caminho da raiz até M , etiqüete-a com antiga e vá para uma outra marcação;*
3. *Se nenhuma transição estiver habilitada em M , etiqüete-a como bloqueada;*
4. *Enquanto existirem transições habilitadas em M , para cada transição habilitada, faça o seguinte:*
 - i) *Obtenha a marcação M' que resulta do disparo da transição t em M ;*
 - ii) *Se no caminho da raiz até M' existir uma marcação M'' tal que*

$$M'(p) \geq M''(p)$$

para cada lugar p e

$$M' \neq M'',$$

então substitua $M'(p)$ por ω para cada p tal que

$$M'(p) > M''(p);$$

- iii) *Introduza M' como um nó, desenhe um arco com rótulo t , de M para M' e etiqüete M' com nova;*

- *Fim*

Exemplo 45 Considere a rede de Petri apresentada na Figura 0.32. Seguindo o algoritmo da árvore de cobertura, é encontrada a árvore apresentada na Figura 0.33. Observe que, na marcação inicial

$$M_0 = [1 \ 0 \ 0]^T,$$

se a transição t_1 disparar, a rede alcança uma marcação onde nenhuma outra transição pode disparar, isto é, ocorre um bloqueio na rede. Por outro lado, se a transição t_3 disparar continuamente, haverá um crescimento infinito no número de fichas no lugar p_2 . Esta situação está representada na árvore de cobertura pelo símbolo ω na posição do lugar p_2 . Nessa marcação, o disparo da transição t_3 novamente, seguindo as propriedades de ω , mantém a rede na mesma marcação, a qual está etiquetada como antiga. Também, nessa mesma marcação, a transição t_1 pode disparar infinitamente, levando a rede de Petri a uma marcação crescente no lugar p_2 , novamente representada por ω no vetor de marcações. Por fim, dessa última marcação, o disparo infinito de t_2 , leva a rede à mesma marcação, a qual é simbolizada pela etiqueta antiga.

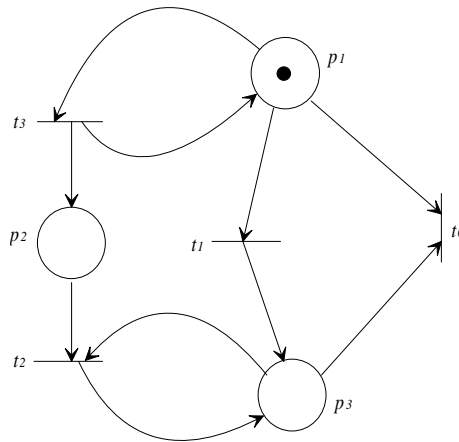


Figura 0.32: Rede de Petri utilizada para a construção da árvore de cobertura

Este é um dos métodos mais utilizados para análise de redes de Petri. Algumas das propriedades que podem ser analisadas por meio desta árvore são:

1. *Limitação*: Uma rede de Petri $RP = (E_{rp}, M_0)$ é limitada se $MA(E_{rp}, M_0)$ é finito e se e somente se ω não aparece em nenhuma marcação da árvore;

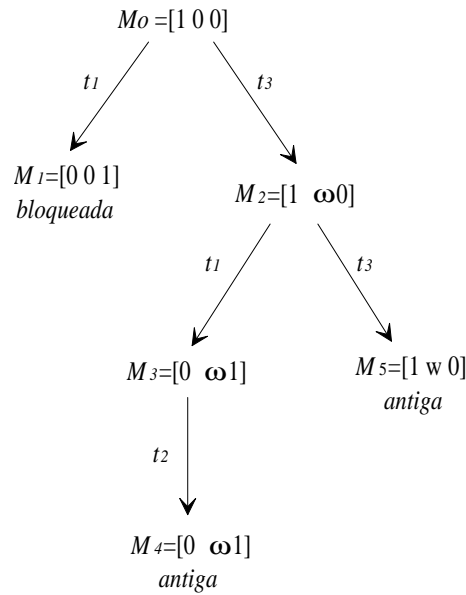


Figura 0.33: Árvore de cobertura da rede de Petri

2. *Segurança*: Uma rede de Petri $RP = (E_{rp}, M_0)$ é segura se e somente se apenas 0's e 1's aparecem nas marcações da árvore;
3. *Vivacidade*: Uma transição t é morta se e somente se ela não aparece como etiqueta de nenhum arco na árvore de cobertura;
4. *Alcançabilidade*: Se M é alcançável a partir de M_0 , então existe um nó (marcação na árvore) M' tal que $M \leq M'$.

Quando a rede de Petri $RP = (E_{rp}, M_0)$ é limitada, a árvore de cobertura é chamada de *árvore de alcançabilidade*, pois contém todas as possíveis marcações alcançáveis. Neste caso, os problemas de análise discutidos podem ser solucionados pela árvore de alcançabilidade.

Em geral, a árvore de cobertura somente não permite resolver os problemas de alcançabilidade e de vivacidade, devido à perda de informação causado pelo uso do símbolo ω .

A utilização do símbolo ω também permite compactar o grafo de alcançabilidade de uma rede de Petri.

Definição 47 O grafo de cobertura de uma rede de Petri $RP = (E_{rp}, M_0)$ é um grafo

orientado e etiquetado $G_c(V, E)$, onde V é o conjunto de todos os nós etiquetados distintos da árvore de cobertura e E é o conjunto dos arcos etiquetados com transições simples t_k . E , então, representa todos os possíveis disparos de transições simples, tais que $M_i [t_k] M_j$, onde M_i e M_j estão em V .

O grafo de cobertura tem uma estrutura simplificada para se estudar o comportamento de uma rede de Petri.

Exemplo 46 A rede de Petri vista na Figura 0.34(a) tem seu grafo de cobertura apresentado na Figura 0.34(b), onde pode ser visto que, a partir da marcação inicial

$$M_0 = [1 \ 0 \ 0]^T,$$

o disparo da transição t_1 muda a marcação da rede para

$$M = [1 \ 0 \ \omega]^T$$

devido à continuidade de seu disparo (auto-laço neste nó) que leva ao aumento no número de fichas no lugar p_3 , simbolizado por ω . O disparo de t_2 neste nó, implica na mudança para o terceiro nó, representado pela marcação

$$M = [0 \ 1 \ \omega]^T,$$

que tem ω na posição do lugar p_3 por causa da possibilidade do disparo contínuo da transição t_3 (auto-laço neste nó). Por fim, deste nó, pode ocorrer o disparo da transição t_4 , que retorna ao segundo nó.

Método da equação de estado

A passagem de uma marcação inicial M_0 de uma rede de Petri $RP = (E_{rp}, M_0)$ para uma outra marcação M_d , através de uma seqüência de disparos $s \in T^*$ pode ser descrita por uma equação matricial fundamental que representa a atividade da rede. Esta equação é análoga à equação de estado da teoria de sistemas lineares. Entretanto, no caso das rede de Petri aqui estudadas, esta equação apresenta limitações, as quais são devidas ao fato de que as soluções devem pertencer ao conjunto dos inteiros não negativos.

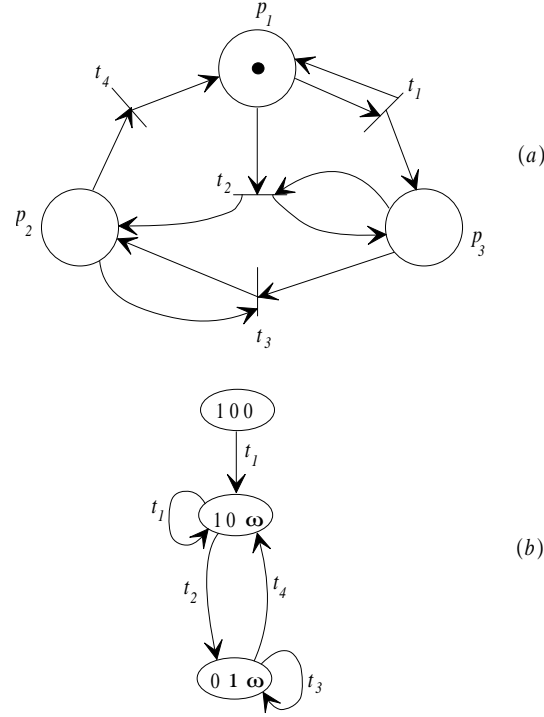


Figura 0.34: (a) Rede de Petri e (b) grafo de cobertura.

A Equação de estado

Considerando uma marcação M_k representada por um vetor coluna $m \times 1$, o j -ésimo termo de M_k denota o número de marcas no lugar j imediatamente após o k -ésimo disparo em alguma seqüência de disparos $s \in T^*$. Também, considerando um vetor de controle do k -ésimo disparo, denotado por ν_k , como sendo um vetor coluna $n \times 1$ formado por $(n - 1)$ zeros e um 1 na i -ésima linha, este 1 representa a transição t_i que dispara na k -ésima posição da seqüência s . Em conjunto com a matriz de incidência, escreve-se a equação de estado de uma rede de Petri como

$$M_k = M_{k-1} + A^T \nu_k, k = 1, 2, \dots \quad (0.6)$$

Com esta equação, pode-se determinar a marcação M_k que uma rede de Petri terá, a partir do disparo de uma transição habilitada em uma marcação M_{k-1} .

Exemplo 47 A rede de Petri do Exemplo 5 tem sua marcação inicial

$$M_0 = [\begin{matrix} 2 & 0 & 1 & 0 \end{matrix}]^T.$$

As transições habilitadas nessa marcação são t_1 e t_3 . O vetor de controle para t_1 para a próxima marcação M_1 é

$$\nu_1 = [1 \ 0 \ 0]^T.$$

Assim, a marcação M_1 , de acordo com a equação de estado da rede de Petri, dada pela equação (0.6) para $k = 1$, é

$$M_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

que pode ser comprovado pela regra de disparo das transições.

Condição necessária de alcançabilidade

Considerando que uma marcação M_d seja alcançável a partir da marcação inicial M_0 , através de uma seqüência de disparos de transições $s \in T^*$, em que s pode ser representada pela seqüência de vetores coluna

$$\{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_d\},$$

pode-se escrever sucessivamente as equações de estado:

$$\begin{aligned} M_1 &= M_0 + A^T \nu_1 \\ M_2 &= M_1 + A^T \nu_2 = M_0 + A^T (\nu_1 + \nu_2) \\ &\vdots \\ M_d &= M_{d-1} + A^T \nu_d = \dots = M_0 + A^T \sum_{k=1}^d \nu_k. \end{aligned} \quad (0.7)$$

Assim, a equação de estado fundamental é escrita como

$$M_d = M_0 + A^T x, \quad (0.8)$$

com

$$x = \sum_{k=1}^d \nu_k \quad (0.9)$$

sendo um vetor coluna $n \times 1$, representando os disparos das transições que formam a seqüência que leva de M_0 a M_d . O vetor x é formado, então, por inteiros não negativos

e é chamado de vetor contagem de disparos, ou vetor característico da seqüência de disparos. O i -ésimo termo do vetor x denota o número de vezes que a transição t_i deve disparar para transformar a marcação M_0 na marcação M_d .

Exemplo 48 Considere a rede de Petri da Figura 0.35 com marcação inicial

$$M_0 = [2 \quad 0 \quad 1 \quad 0]^T.$$

A marcação

$$M = [1 \quad 2 \quad 0 \quad 6]^T$$

é alcançada a partir de M_0 , como dada pela equação de estado

$$M = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix},$$

onde

$$x = [3 \quad 1 \quad 4]^T$$

representa a seqüência de disparos

$$t_3 t_1 t_2 t_3 t_1 t_3,$$

ou seja, três disparos de t_1 , um disparo de t_2 e quatro disparos de t_3 .

A equação fundamental também pode ser escrita da seguinte forma:

$$A^T x = M_d - M_0 \quad (0.10)$$

ou ainda, fazendo

$$\Delta M = M_d - M_0, \quad (0.11)$$

tem-se

$$A^T x = \Delta M. \quad (0.12)$$

Essa equação tem uma solução x se e somente se ΔM for ortogonal a cada solução y do sistema homogêneo associado

$$Ay = 0. \quad (0.13)$$

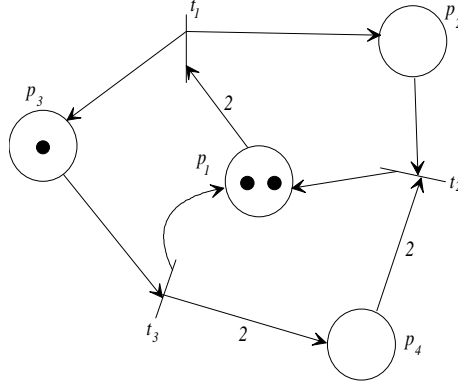


Figura 0.35: Rede de Petri

Considere r como sendo o posto da matriz A . Considere também a matriz de incidência A particionada da seguinte maneira:

$$A = \left[\begin{array}{c|c} \overleftarrow{m-r} & \overleftarrow{r} \\ \hline A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{array} \right] \quad \begin{array}{c} \updownarrow r \\ \updownarrow n-r \end{array} \quad (0.14)$$

onde A_{12} é uma matriz quadrada não singular, e seja a matriz B definida como

$$B = \left[\begin{array}{c|c} I_v & -A_{11}^T (A_{12}^T)^{-1} \end{array} \right] \quad (0.15)$$

com I_v sendo a matriz identidade de ordem

$$v = m - r. \quad (0.16)$$

Assim, as linhas de B dão um conjunto de

$$m - r \quad (0.17)$$

soluções linearmente independentes para a equação (0.13). Logo,

$$AB^T = 0.$$

Ou seja, o espaço vetorial gerado pelos vetores linha da matriz de incidência A é ortogonal ao espaço vetorial gerado pelas linhas de B . A condição de que ΔM é ortogonal a cada solução da equação (0.13) é equivalente à condição

$$B\Delta M = 0.$$

Disso decorre a seguinte condição necessária de alcançabilidade:

Teorema 1 Se M_d é alcançável a partir de M_0 , numa rede de Petri $RP = (E_{rp}, M_0)$, então

$$B\Delta M = 0,$$

em que

$$\Delta M = M_d - M_0$$

e B é dada pela equação (0.15).

Exemplo 49 Considere a rede de Petri da Figura 0.35, do Exemplo 48. Seu grafo de alcançabilidade está apresentado na Figura 0.36. A matriz de incidência A , que tem posto 2, particionada conforme a equação (0.14) é

$$A = \left[\begin{array}{cc|cc} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -2 \\ \hline 1 & 0 & -1 & 2 \end{array} \right].$$

Assim,

$$A_{11} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad e \quad A_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

e

$$B = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{2} \end{array} \right].$$

Então, as linhas de B dão soluções linearmente independentes para a equação (0.13), pois $AB^T = 0$.

Este método permite determinar se uma seqüência s é possível de ocorrer em uma rede de Petri, além de poder determinar se uma marcação específica M é alcançável ou encontrar uma seqüência de transições que levam de M_0 para uma marcação qualquer M .

Invariantes de transição

A partir do método da matriz de incidência e da equação de estado foi encontrada a equação (0.12). Nesta equação, se $\Delta M = 0$, não há uma mudança explícita na marcação da rede de Petri. Porém, existem seqüências de disparos de transições na rede que podem levar de uma marcação M , passando por outras marcações M_1, M_2 ,

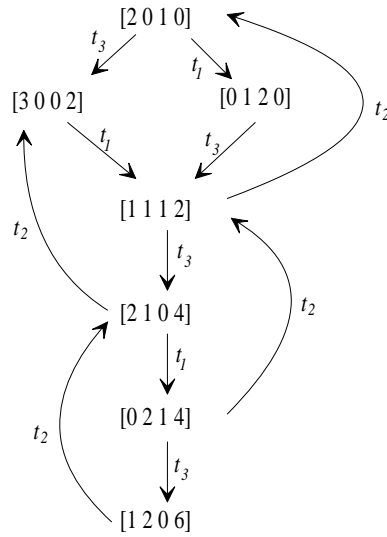


Figura 0.36: Grafo de alcançabilidade

..., para a mesma marcação M . Esta situação foi definida anteriormente como o estado de passagem. Assim, define-se que:

Definição 48 *Toda solução inteira da equação*

$$A^T x = 0 \quad (0.18)$$

é chamada de componente repetitiva estacionária da rede de Petri $RP = (E_{rp}, M_0)$.

Desta forma, a *componente repetitiva estacionária* de uma rede de Petri é encontrada resolvendo a equação (0.18). Sendo x o vetor característico de uma seqüência efetiva de disparos a partir de uma marcação alcançável $M \in MA(E_{rp}, M_0)$, denomina-se de invariante de transição, ou *T-invariante* o vetor x^T .

O vetor x^T representa, então, uma seqüência de disparos de transições que não muda a marcação da rede de Petri.

Exemplo 50 *Para a rede de Petri da Figura 0.35, do Exemplo 48,*

$$x = [1 \ 1 \ 1]^T$$

é uma solução para $A^T x = 0$. Isto significa que existe uma seqüência de disparos de transições representada pelo vetor

$$x = [1 \ 1 \ 1]^T,$$

ou seja, $t_1t_2t_3$ ou $t_2t_1t_3$, a marcação da rede não é modificada. Logo,

$$x = [1 \ 1 \ 1]^T$$

é um T -invariante.

Deve-se observar que, toda combinação linear de T -invariantes é um T -invariante.

Invariantes de lugar

Invariante de lugar é uma função linear da marcação cujo valor é constante. O invariante de lugar, também chamado de S -invariante só depende da marcação inicial.

Tomando a equação fundamental (0.8), e multiplicando cada um dos seus termos por um vetor f^T , obtém-se

$$f^T M_d = f^T M_0 + f^T A^T x.$$

Para que

$$f^T M_d = f^T M_0, \quad (0.19)$$

é preciso que

$$f^T A^T x = 0, \quad (0.20)$$

ou

$$Af = 0. \quad (0.21)$$

A equação (0.19) define que a função da marcação é independente da seqüência de transições.

Com a equação (0.21), define-se:

Definição 49 A componente conservativa de uma rede de Petri $RP = (E_{rp}, M_0)$ é uma solução da equação homogênea transposta

$$Ay = 0. \quad (0.22)$$

Assim, tem-se que *invariante de lugar*, ou S -invariante é a função

$$y^T M_d = y^T M_0 \quad (0.23)$$

tal que y seja solução inteira da equação (0.22).

Exemplo 51 Para a rede de Petri da Figura 0.35, do Exemplo 48,

$$y = [1 \quad 0 \quad 2 \quad \frac{1}{2}]^T$$

é uma solução para $Ay = 0$. Assim, y multiplicado por qualquer marcação alcançada pela rede de Petri, resulta em um número de igual valor. Logo,

$$y = [1 \quad 0 \quad 2 \quad \frac{1}{2}]^T$$

é um S -invariante.

Técnicas de redução

Além dos dois métodos apresentados anteriormente, há este terceiro método de análise o qual consiste em reduzir a rede de Petri a uma rede mais simples, de forma que sejam preservadas todas as propriedades que se deseja analisar em alguns lugares e algumas transições específicas.

As operações de redução preservam, então, as propriedades de vivacidade, segurança e limitação. Estas operações são apresentadas a seguir.

Fusão de lugares em série

Lugares em série em uma rede de Petri podem ser fundidos em apenas um lugar com todos os arcos de entrada e todos os arcos de saída dos lugares fundidos, eliminando os arcos da seqüência.

Lugares em série são seqüências de lugares ligados por transições, onde cada transição é saída do lugar antecedente na série e entrada do lugar posterior. O primeiro lugar da série que deve ser fundido com o posterior deve ter apenas um arco de saída para a transição da série. A marcação final de lugares fundidos em série é a soma das marcações dos lugares.

Exemplo 52 A seqüência de lugares apresentada na Figura 0.37(a) pode ser fundida em um único lugar com todos os arcos de entrada e todos os arcos de saída dos lugares fundidos, como visto na Figura 0.37(b). Observe que os arcos da seqüência são eliminados. Também, a marcação do lugar p que representa a fusão dos lugares p_1 , p_2 e p_3 é a soma das marcações desses lugares.

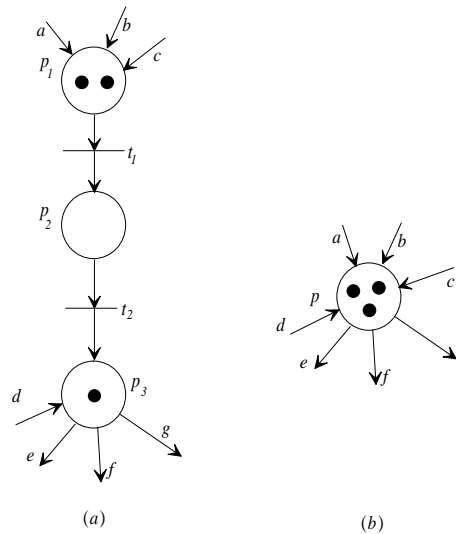


Figura 0.37: (a) Sequências de lugares em série podem ser fundidos em um único lugar (b).

Fusão de transições em série

Transições em série em uma rede de Petri podem ser fundidas em apenas uma transição com todos os arcos de entrada e todos os arcos de saída das transições fundidas, eliminando os arcos da sequência.

Transições em série são sequências de transições ligadas por lugares, onde cada lugar é saída da transição antecedente na série e entrada da transição posterior. Para fundir duas transições em série, a marcação do lugar p entre elas deve ser $M(p) = 0$.

Exemplo 53 A sequência de transições apresentada na Figura 0.38(a) pode ser fundida em uma única transição com todos os arcos de entrada e todos os arcos de saída das transições fundidas, como visto na Figura 0.38(b). Observe que os arcos da sequência são eliminados.

Fusão de lugares paralelos

Lugares em paralelo em uma rede de Petri podem ser fundidos em apenas um lugar, onde todos os arcos que são entradas e todos os arcos que são saídas desses lugares são fundidos em um único arco de entrada e um único arco de saída.

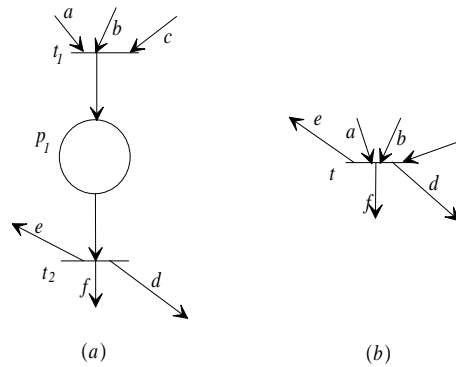


Figura 0.38: (a) Sequências de transições em série podem ser fundidas em uma única transição(b).

Lugares em paralelo são lugares que têm uma única transição de entrada comum a todos os lugares e, todos esses lugares têm uma transição que é saída comum. A marcação final de lugares fundidos em paralelo é a menor marcação entre todos os lugares, isto é,

$$M(p) = \min_{i=1}^n \{M(p_i)\}. \quad (0.24)$$

Exemplo 54 Os lugares em paralelo da Figura 0.39(a) podem ser fundidos em um único lugar com um único arco de entrada da transição de entrada e um único arco de saída para a transição de saída, como visto na Figura 0.39(b). Observe que todos os arcos dos lugares em paralelo são fundidos. Também, a marcação do lugar p que representa a fusão dos lugares p_1 , p_2 e p_3 é o número de fichas do lugar p_2 , que contém a menor marcação entre esses lugares, desde que a transição t_2 só está habilitada quando houver uma ficha nele (quando houver o disparo da transição t_1).

Fusão de transições paralelas

Transições em paralelo em uma rede de Petri podem ser fundidas em apenas uma transição onde todos os arcos que são entradas e todos os arcos que são saídas dessas transições são fundidos em um único arco de entrada e um único arco de saída.

Transições em paralelo são transições que têm um único lugar de entrada comum a todas as transições, e todas essas transições têm um lugar que é saída comum. As marcações dos lugares não são alteradas.

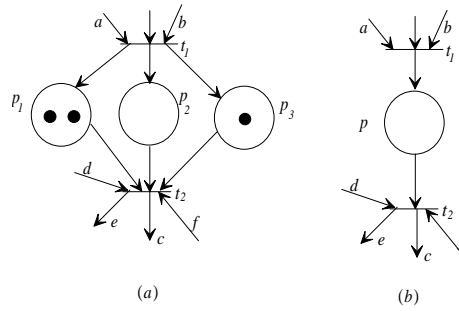


Figura 0.39: (a) Lugares em paralelo podem ser fundidos em um único lugar (b).

Exemplo 55 As transições em paralelo da Figura 0.40(a) podem ser fundidas em uma única transição com um único arco do lugar de entrada e um único arco para o lugar de saída, como visto na Figura 0.40(b). Observe que todos os arcos das transições em paralelo são fundidos.

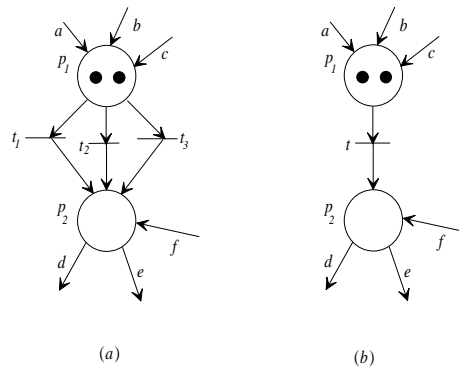


Figura 0.40: (a) Transições em paralelo podem ser fundidas em uma única transição (b).

Eliminação de lugares de auto-laços

Um lugar de um auto-laço pode ser simplesmente eliminado, desde que não interfere na dinâmica da rede de Petri. Da eliminação do lugar de auto-laço, apenas os arcos que fazem o auto-laço são excluídos da transição.

Exemplo 56 O lugar de auto-laço da Figura 0.41(a) pode ser eliminado, pois não interfere no funcionamento da rede de Petri. Sua eliminação resulta na transição

vista na Figura 0.41(b). Observe que todos os arcos da transição permanecem, sendo excluídos apenas os arcos do lugar de auto-laço.

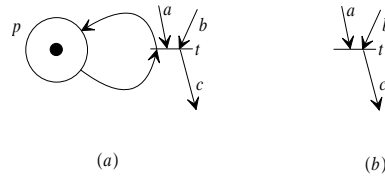


Figura 0.41: (a) Lugar de auto-laço e (b) resultado da sua eliminação.

Eliminação de transições de auto-laços

Uma transição de um auto-laço pode ser simplesmente eliminada, desde que, também, não interfere na dinâmica da rede de Petri. Da eliminação da transição de auto-laço, apenas os arcos que fazem o auto-laço são excluídos do lugar.

Exemplo 57 A transição de auto-laço da Figura 0.42(a) pode ser eliminada, pois não interfere no funcionamento da rede. Sua eliminação resulta no lugar visto na Figura 0.42(b). Observe que todos os arcos do lugar permanecem, sendo excluídos apenas os arcos da transição de auto-laço.

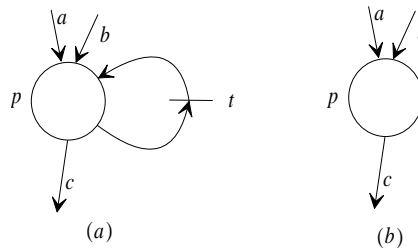


Figura 0.42: (a) Transição de auto-laço e (b) resultado da sua eliminação.

Exemplo de utilização das técnicas de redução

Nesta seção é apresentado um exemplo da utilização das técnicas de redução em uma rede de Petri.

Exemplo 58 A rede de Petri vista na Figura 0.43(a), pode ser reduzida para a rede da Figura 0.43(b), após o disparo de t_2 e mediante as fusões da transição t_1 com a transição t_2 e da transição t_3 com a transição t_4 . Após estas fusões, esta rede reduzida pode ser novamente reduzida para a rede vista na Figura 0.43(c), pelas eliminações da transição t_{12} e do lugar p_3 , ambos de auto-laços.

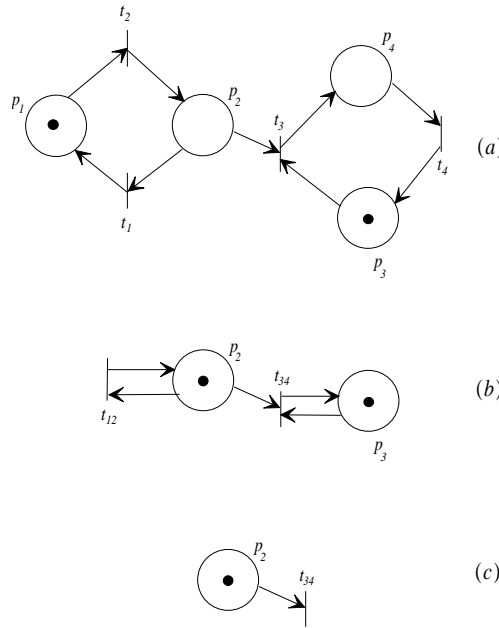


Figura 0.43: (a) Rede de Petri a ser reduzida. (b) resultado da fusão das transições t_1 com t_2 e t_3 com t_4 e (c) eliminação de lugar p_3 e transição t_{12} de auto-laços.

Propriedades dos sistemas e modelagem por redes de Petri

Para construir modelos de sistemas utilizando as redes de Petri, é necessário o conhecimento a respeito de algumas propriedades básicas dos sistemas e suas técnicas específicas de modelagem. Dentre essas propriedades, encontram-se as seqüências de ações em sistemas, as evoluções síncronas e assíncronas, a concorrência, o conflito, entre outras.

Noções básicas de modelagem

A metodologia de modelagem de sistemas necessita do conhecimento de todos os processos envolvidos em sua dinâmica. Dessa forma, uma das maneiras de modelar um sistema por uma rede de Petri é dividindo o sistema em subsistemas, tal que cada um desses subsistemas apresente características básicas. Após a construção do modelo de cada subsistema, é construído o sistema como um todo, através da união dos modelos dos subsistemas.

Para formalizar um modelo de um sistema através de uma rede de Petri, é necessário conhecer as propriedades básicas dos sistemas e seus modelos. Isso é visto a seguir.

Seqüência de ações em sistemas

Uma seqüência de ações é representada em uma rede de Petri através de uma seqüência de lugares e transições. Os lugares, neste caso, representam as fases seqüenciais de um processo e as transições representam as mudanças de um estado para outro no sistema. Assim, o término de uma fase de processamento, ou atividade do sistema, implica no início de uma nova fase.

Exemplo 59 *Considere um simples sistema com um braço robótico que pega peças em um local de armazenamento, o qual está sempre recebendo peças novas, leva a peça a uma esteira que gira, levando-a de uma extremidade à outra, e um outro braço robótico que pega a peça na esteira e leva-a a um outro local de armazenamento onde é consumida. Este sistema, como citado, é seqüencial, podendo ser representado pela rede de Petri apresentada na Figura 0.44.*

Evoluções síncronas e assíncronas

Processos síncronos são aqueles que evoluem em mesmos instantes de tempo. Assim, dois processos são síncronos se forem iniciados ou finalizados em um mesmo momento, ou seja, um depende do outro.

Em uma rede de Petri, um processo síncrono é representado por uma transição que, em seu disparo deposita fichas em vários lugares, ou que necessitam que vários lugares tenham o número de fichas suficientes para que, em seu disparo, sejam retiradas essas fichas.

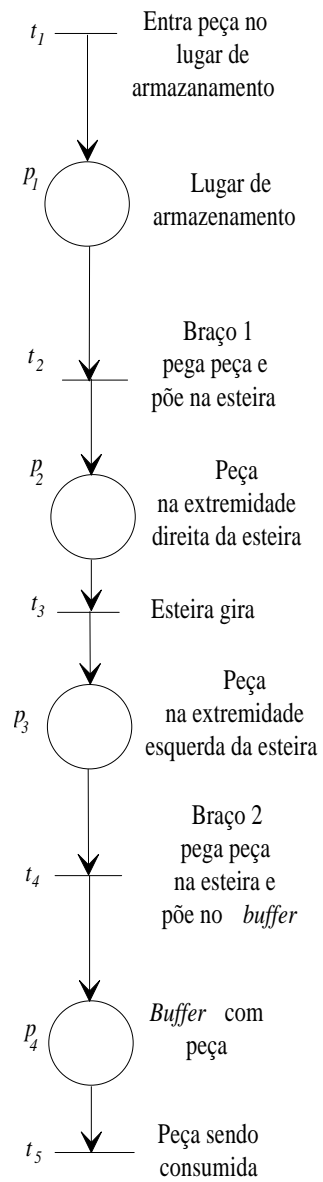


Figura 0.44: Rede de Petri modelando o sistema seqüencial

Exemplo 60 Na rede de Petri vista na Figura 0.45, a transição t_1 em seu disparo cria, ao mesmo tempo, uma ficha para o lugar p_1 e outra ficha para o lugar p_2 . No caso da transição t_2 , ela necessita de que cada lugar tenha uma marcação suficiente (definido pelos pesos dos arcos) para seu disparo. Seu disparo retira as fichas desses lugares, também, no mesmo instante de tempo. Assim, vê-se que ambas as transições t_1 e t_2 , geram ou consomem fichas sincronamente.

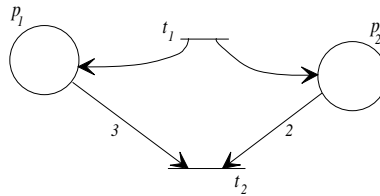


Figura 0.45: Rede de Petri com transições gerando e consumindo fichas sincronamente.

Processos assíncronos são os que evoluem independentemente. Dois processos são ditos assíncronos se a inicialização de um não depender do término do outro.

Em uma rede de Petri, os processos assíncronos são representados por transições que não têm lugares de entrada comuns. Assim, qualquer uma pode disparar sem que, necessariamente, a outra dispare.

Exemplo 61 Na rede de Petri vista na Figura 0.46, a transição t_1 em seu disparo coloca uma ficha no lugar p_1 . O disparo da transição t_2 coloca sincronamente uma ficha no lugar p_2 e outra no lugar p_3 . As transições t_3 e t_4 podem, então, disparar assincronamente, levando as fichas que estão no lugar p_2 e p_3 para os lugares p_4 e p_5 . Assim, vê-se que as transições t_1 , t_3 e t_4 , geram ou consomem fichas assincronamente (uma independe da outra para disparar).

Concorrência

Concorrência define processos independentes, os quais podem ocorrer assincronamente.

Definição 50 Em uma rede de Petri, duas transições são concorrentes se elas são causalmente independentes, isto é, uma pode disparar antes ou depois da outra.

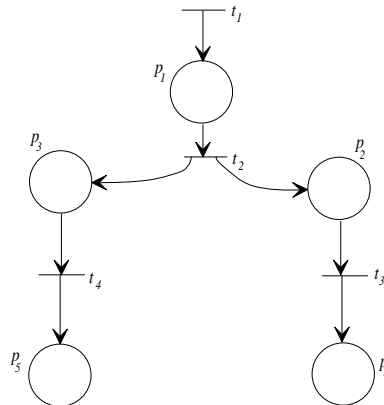


Figura 0.46: Rede de Petri com transições gerando e consumindo fichas assincronamente.

A concorrência em uma rede de Petri pode ser vista facilmente por duas seqüências.

Exemplo 62 Na rede de Petri vista na Figura 0.46, as transições t_3 e t_4 representam atividades paralelas que podem ocorrer concorrentemente. Assim, t_3 e t_4 são transições concorrentes.

Conflito

Conflito é uma estrutura formada por um lugar com mais de uma transição de saída, onde o disparo de uma das transições desabilita todas as outras. Conflitos podem ser utilizados para modelar sistemas onde um determinado recurso material precise ser utilizado por mais de uma linha de produção, sendo este recurso único.

Exemplo 63 Na rede de Petri vista na Figura 0.47, as transições t_1 e t_2 determinam um conflito, desde que o disparo de qualquer uma, desabilita a outra.

Confusão

Confusão é uma estrutura formada pela mistura de concorrência e conflito.

Exemplo 64 Na rede de Petri vista na Figura 0.48, as transições t_1 e t_3 são concorrentes, pois qualquer uma delas pode disparar sem interferir no disparo da outra. Contudo, as transições t_1 e t_2 e as transições t_2 e t_3 estão em conflito, desde que o

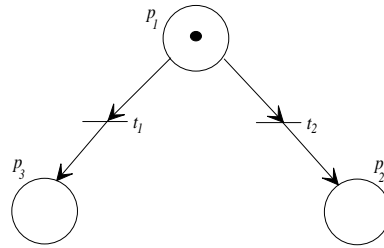


Figura 0.47: Rede de Petri com transições em conflito.

disparo de qualquer uma das transições concorrentes t_1 e t_3 , implica na desabilitação da transição t_2 .

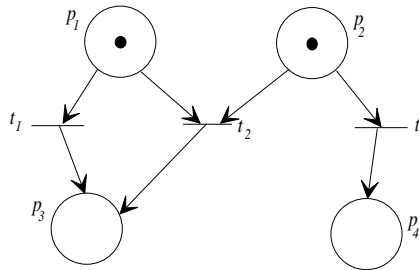


Figura 0.48: Rede de Petri com transições em confusão.

Caminhos alternativos

Um conflito pode determinar início de processos que têm caminhos alternativos. Assim, um lugar com mais de uma transição de saída, determina que um processo seguirá por um caminho, se uma transição disparar, ou por outro caminho, se outra disparar.

Exemplo 65 Na rede de Petri vista na Figura 0.49, se a transição t_2 disparar, determina que o caminho a ser seguido é a seqüência de transições $t_5t_7t_8$. Se a transição t_3 disparar, determina que o caminho a ser seguido é a seqüência de transições $t_4t_6t_8$. Assim, esta rede representa um processo com caminhos alternativos.

Estruturas de repetição

Estruturas de repetição determinam caminhos que podem ser repetidos através de uma seqüência de disparos de transições. Em muitos casos, modelos de sistemas apresentam

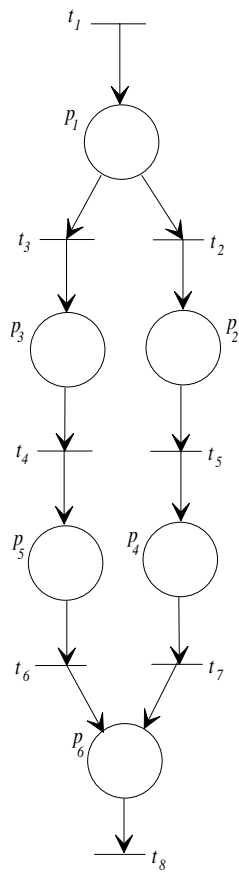


Figura 0.49: Rede de Petri com caminhos alternativos.

situações que necessitam de uma estrutura de repetição, representando possibilidades de retorno a um estado por motivos quaisquer, como testes ou quebra e conserto.

Exemplo 66 Na rede de Petri vista na Figura 0.50, se a transição t_2 disparar, o caminho a ser seguido é a seqüência de transições t_5t_7 . Se a transição t_3 disparar, o caminho a ser seguido é a seqüência de transições $t_4t_6t_8$, que ao longo desta seqüência, retorna a ficha para o lugar p_1 . Com a ficha neste lugar, novamente pode ocorrer o disparo de t_1 , ou o disparo de t_2 , que repete o processo. A seqüência $t_4t_6t_8$ é uma estrutura de repetição.

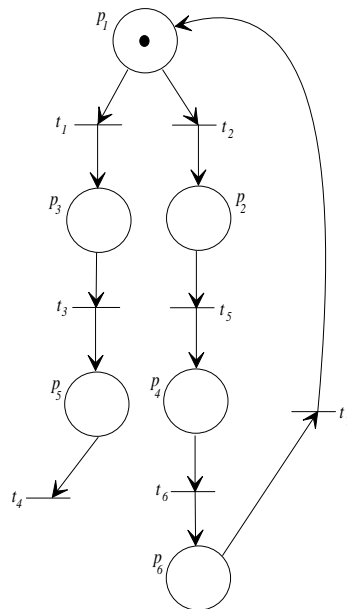


Figura 0.50: Rede de Petri com estrutura de repetição.

Recursos

Em muitos sistemas, existe a necessidade de utilização de um recurso para a realização de tarefas. Um recurso pode ser exemplificado pela disponibilidade de um determinado objeto material que é usado por uma máquina, e depois liberado ao término do processamento da máquina, podendo então ser utilizado por outra máquina para realizar uma outra tarefa.

Um recurso é representado em uma rede de Petri através de um lugar com uma ficha, com arcos de saída para transições que definem início de processamento utilizando este recurso (a ficha), e arcos de entrada vindos de outras transições posteriores às transições que definem o início do processamento, determinando a finalização da tarefa e a devolução do recurso (sua liberação).

Exemplo 67 Na rede de Petri vista na Figura 0.51, o lugar p_r com uma ficha representa um recurso que pode ser utilizado para a operação produzida e consumida na seqüência $t_1t_2t_3t_4$ ou para a operação produzida e consumida na seqüência $t_1t_5t_6t_7$. A transição t_1 indica a chegada de um item para ser processado. A transição t_2 implica no início do processamento por uma máquina utilizando o recurso e a transição t_5 no início do processamento de outra máquina utilizando o recurso. As transições t_3 e t_6 representam o término do processamento de cada máquina e a devolução (liberação) do recurso. Assim, sempre que o recurso não é mais necessário (finalização da operação), é devolvido ao lugar p_r , indicando que ele pode ser usado para outra operação. As transições t_4 e t_7 representam o consumo do item processado.

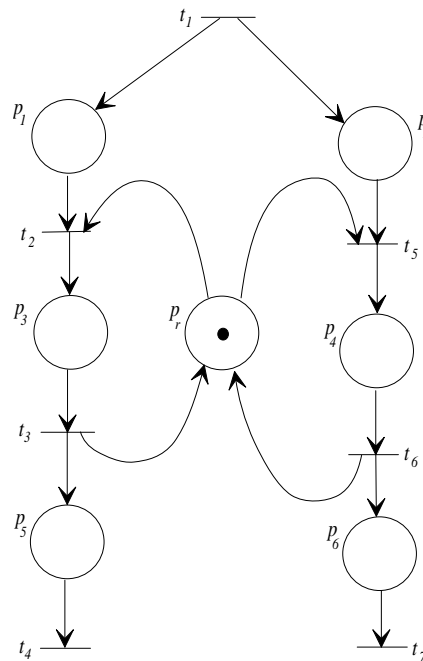


Figura 0.51: Rede de Petri com recurso.

Redes Particulares

Algumas redes permitem modelar alguns sistemas que apresentam propriedades específicas. São elas:

1. Máquinas de estado
2. Grafo marcado

Máquina de estado

Uma rede de Petri que tem apenas um lugar de entrada e um lugar de saída para cada uma de suas transições é denominada de máquina de estado. Formalmente, uma máquina de estado é definida como a seguir:

Definição 51 *Máquina de estado é uma rede de Petri em que cada transição tem somente um lugar de entrada e um lugar de saída.*

Este tipo de rede permite modelar sistemas que apresentam conflitos, contudo não permite modelar sincronização de atividades paralelas. Também, sistemas que apresentam recursos não podem ser modelados por máquinas de estado.

Exemplo 68 *A rede de Petri vista na Figura 0.52 é uma máquina de estado, pois todas as suas transições têm apenas um lugar de entrada e um lugar de saída.*

Grafo marcado

Uma rede de Petri que tem apenas uma transição de entrada e uma transição de saída para cada um de seus lugares é denominada de grafo marcado. Formalmente, um grafo marcado é definido como:

Definição 52 *Grafo marcado é uma rede de Petri em que cada lugar tem somente uma transição de entrada e uma transição de saída.*

Este tipo de rede permite modelar sistemas que apresentam sincronização de atividades paralelas, contudo não permite modelar conflitos. O grafo marcado é o dual da máquina de estado. Assim, sistemas que apresentam recursos podem ser modelados por grafos marcados.

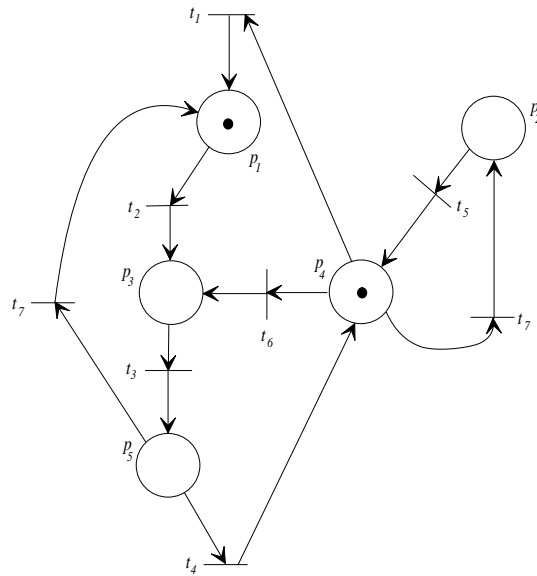


Figura 0.52: Máquina de estado.

Exemplo 69 A rede de Petri vista na Figura 0.52 é um grafo marcado, pois todos os seus lugares têm apenas uma transição de entrada e uma transição de saída.

Modelagem de sistemas por redes de Petri

Como visto nas seções anteriores, as redes de Petri permitem modelar as características básicas de sistemas. Sendo assim, tendo os conceitos anteriormente citados, necessita-se apenas definir, para um dado sistema, como determinar cada parte do mesmo para encontrar seu modelo por uma rede de Petri.

Deve-se observar que as redes de Petri aqui estudadas, sendo redes básicas, permitem apenas modelar sistemas de transições. Assim, não são considerados sistemas que apresentam características contínuas no tempo, apenas sistemas que mudam de estado quando ocorre algum evento físico que pode ser representado por uma transição. Assim, qualquer tipo de sistema que necessite de um estudo de comportamento puramente lógico, pode ser modelado pelas redes de Petri aqui apresentadas.

Para modelar um sistema por uma rede de Petri, considerando que nesse sistema deseja-se apenas estudar o comportamento lógico, e que ele apresenta mudanças de estados definidos por transições discretas, pode-se utilizar da mesma metodologia

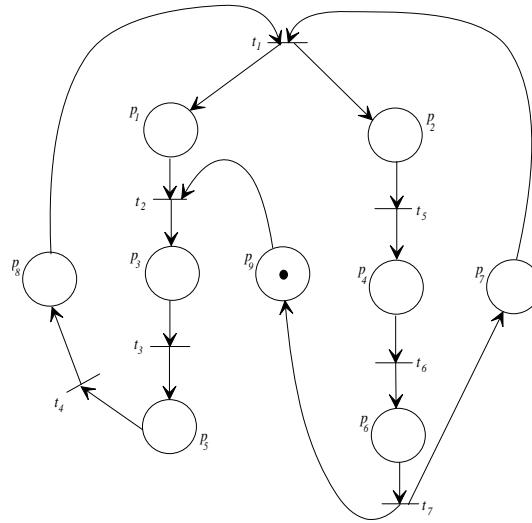


Figura 0.53: Grafo marcado.

apresentada para os sistemas a eventos discretos (SED), como visto em Desrochers e Al-Jaar [16], em DiCesare *et al* [14] e em Zhou e DiCesare [21].

Nesta metodologia de modelagem é definido que cada evento físico do sistema que provoca uma mudança de estado é representado por uma transição na rede de Petri. Os estados do sistema são representados pela marcação da rede e os lugares da rede de Petri são as partes que compõem o sistema. Isto é:

1. Um lugar pode ser interpretado como o estado de um recurso ou de uma atividade. Quando o lugar é interpretado como o estado de um recurso, o número inicial de fichas pode ser constante para representar que há uma quantidade fixa de recursos no sistema ou variável para representar a quantidade de tarefas realizadas no sistema.
2. Se um lugar é interpretado como o estado de um recurso, a presença de uma ou mais fichas nesse lugar indica que o recurso está disponível e a ausência de fichas indica que o recurso não é disponível. Por outro lado, se o lugar é interpretado como o estado de uma atividade, a presença da ficha indica que essa atividade está sendo realizada e a ausência da ficha indica que a atividade não está sendo realizada.
3. Uma transição pode ser interpretada tanto como o início quanto o término de

um processo ou de uma atividade.

Assim, para criar o modelo do sistema por uma rede de Petri de um determinado sistema, é necessário seguir os seguintes passos:

1. Identificar os recursos e atividades necessários ao funcionamento do sistema;
2. Criar uma lista ordenada de atividades de acordo com as relações de precedência definidas da descrição textual do funcionamento do SDED;
3. Para cada atividade da lista:
 - (a) Criar e etiquetar um lugar para representar a condição da atividade;
 - (b) Criar uma transição para representar o início da atividade com arcos direcionados para os lugares de saída;
 - (c) Criar uma transição para representar o término da atividade com arcos direcionados para os lugares de entrada. De modo geral, a transição de término de uma atividade será a mesma transição de início da próxima atividade na lista ordenada. Quando a rede for executada, uma ficha num lugar representa que a atividade está sendo executada e várias fichas indicarão sua execução na multiplicidade do número de fichas. O disparo de uma transição de inicialização representa o início do processo e o disparo de uma transição de finalização representa a complementação da atividade e pode também representar o início da próxima atividade;
4. Para cada atividade ordenada: se um determinado lugar não já tiver sido criado, crie-o e rotule o lugar para cada recurso que deve estar disponível para iniciar a atividade. Conecte todos os lugares de disponibilidade de recursos apropriados com arcos a cada transição de entrada para a inicialização da atividade. Crie arcos de saída para conectar às transições de finalização seguintes à atividade para algum lugar de recurso representando recursos que se tornem disponíveis (estão livres) na complementação da próxima atividade.

5. Especificar a marcação inicial para o sistema.

Seguindo estes passos, modela-se um sistema por uma rede de Petri.

Exemplos de modelagem por redes de Petri

A seguir são apresentados alguns exemplos que mostram a modelagem de sistemas por redes de Petri.

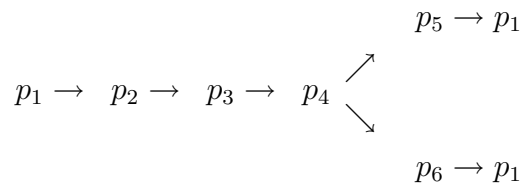
Exemplo 70 *Considere um sistema de um cofre com um alarme, como apresentado na Figura 0.54. Este cofre tem um código formado por quatro dígitos (0 ou 1). A seqüência para abrir o cofre é formada por dois dígitos quaisquer*

$$(00, 01, 10, 11),$$

seguidos por dois dígitos iguais

$$(00 \text{ ou } 11).$$

A partir da entrada de cada dígito, o cofre fica a espera do próximo dígito. Ao término da entrada dos quatro dígitos, o sistema avalia o código que, se estiver correto, o cofre abre. Caso contrário, o alarme dispara, voltando o cofre ao estado inicial, após o alarme desligar. Quando o cofre está aberto, o mesmo pode ser fechado, voltando ao estado inicial. Assim, as atividades que são consideradas neste sistema, são: cofre fechado (p_1), também considerado como esperando o primeiro dígito da seqüência do código; esperando segundo dígito da seqüência do código (p_2); esperando os dois últimos dígitos da seqüência do código (p_3); avaliando o código (p_4); alarme disparando (p_5) e cofre aberto (p_6). A seqüência das atividades é dada por



Dai, para construir a rede de Petri que modela este sistema, inicialmente criam-se os lugares (p_1 a p_6), como visto na Figura 0.55. Depois criam-se as transições que definem as mudanças de atividades (Figura 0.56), colocam-se os arcos de entrada e de saída, de acordo com as inicializações e término de cada atividade e, definindo a marcação inicial como

$$M_0 = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T,$$

isto é, considerando que o cofre esteja fechado inicialmente, constrói-se a rede de Petri apresentada na Figura 0.57, que é o modelo deste sistema. Observe que, quando o cofre

está fechado, há uma ficha no lugar p_1 , representando que o mesmo está esperando a entrada do primeiro dígito. Quando há a entrada deste primeiro dígito (representada pelo disparo da transição t_1), a ficha sai do lugar p_1 , e vai para o lugar p_2 , onde o cofre está esperando o segundo dígito da seqüência, e assim por diante. Também, deve-se observar que, este modelo é simples, desde que não é possível detectar qual o código que define a abertura do cofre. Há também, as restrições relativas ao tempo, desde que não se tem informação a respeito de quando o alarme deve parar, ou qual o tempo que o sistema deve esperar pela entrada de um novo dígito. O primeiro caso se resolve utilizando um maior refinamento nas definições das atividades. Por outro lado, o segundo caso só é resolvido com a introdução de tempo nas redes de Petri, o que não é o caso tratado neste livro. Para o problema colocado aqui, só será necessário a parte lógica das redes de Petri.

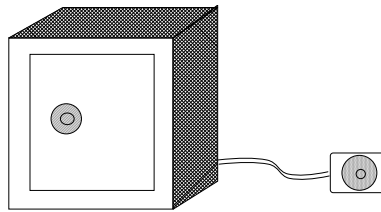


Figura 0.54: Cofre com alarme.

Exemplo 71 Na Figura está apresentado um simples sistema de manufatura consistindo de duas estações de processamento com máquinas, M_1 e M_2 , um robô compartilhado, R , para descarga e um buffer, B , para armazenamento temporário de peças intermediárias. Cada peça é processada primeiro em M_1 e depois em M_2 . As peças entram no sistema e na estação de processamento são automaticamente fixadas a uma bandeja e carregadas na máquina M_1 . Após o processamento, o robô R descarrega de M_1 a peça intermediária e a coloca no buffer B . Logo a seguir, as peças intermediárias são automaticamente carregadas em M_2 e processadas. Quando M_2 encerra o processamento de uma peça, R descarrega o produto final e libera a bandeja para a primeira estação de trabalho. Assume-se que peças de entrada estão sempre disponíveis para serem processadas e que o produto final é sempre removido. Seguindo a metodologia de construção do modelo do sistema, tem-se no primeiro passo que as atividades requeridas são: estações de processamento (fixação à bandeja, carga e processamento de

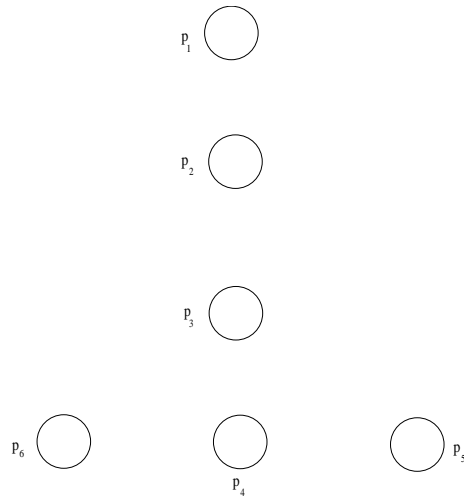


Figura 0.55: Primeiro passo na construção do modelo em rede de Petri para o sistema do cofre com alarme.

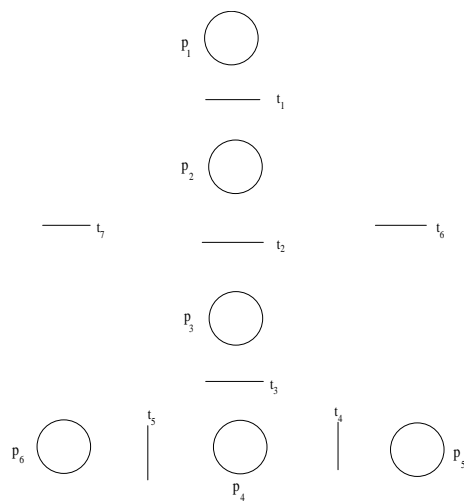


Figura 0.56: Segundo passo na construção do modelo em rede de Petri para o sistema do cofre com alarme.

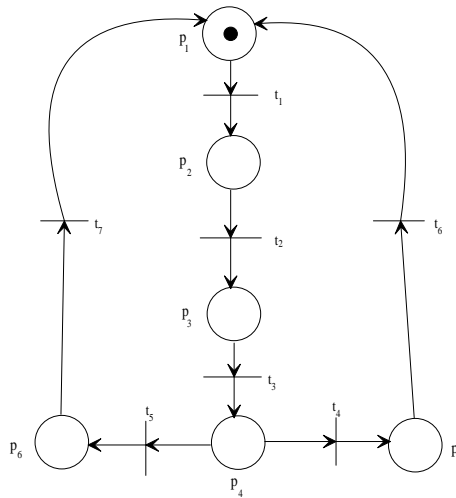


Figura 0.57: Modelo em rede de Petri para o sistema do cofre com alarme.

peças), armazenamento e descarga. Os recursos são M_1 , M_2 , R , B , fixadores e peças. No segundo passo, identifica-se a ordem das atividades como:

- M_1P : M_1 carrega, fixa e processa a peça;
- RU_1 : R descarrega uma peça intermediária no buffer;
- BS : B armazena uma peça intermediária;
- M_2P : M_2 carrega e processa uma peça intermediária;
- RU_2 : R descarrega o produto final de M_2 , libera a bandeja
e retorna primeira estação de trabalho.

Seguindo o terceiro passo, é criada a rede mostrada na Figura 0.59(a). No quarto passo, tem-se que a atividade M_1P requer uma bandeja (representada pelo lugar PA) e a máquina M_1 livre (representada pelo lugar M_1l). Continuando no quarto passo, criam-se os lugares BA (buffer livre), RA (representando o robô livre) e M_2l (representando a máquina M_2 livre). Os arcos são ligados às transições, como mostrado na Figura 0.59(b), satisfazendo os requerimentos do sistema. Por fim, coloca-se a marcação inicial: inicialmente, ambas as máquinas estão livres (uma ficha em M_1l e uma ficha em M_2l), há quatro bandejas disponíveis (quatro fichas no lugar PA) o robô está livre (uma ficha em RA) e há espaço livre no buffer para duas peças intermediárias (duas fichas no lugar BA). Assim, constrói-se a rede de Petri que modela o sistema de manufatura definido, como visto na Figura 0.60.

Exemplo 72 Considere o simples sistema bancário visto na Figura 0.61. Neste sistema, pessoas podem chegar a qualquer momento, e ficar esperando para serem atendidas por um dos três caixas disponíveis. Cada caixa só atende a uma pessoa por vez. Qualquer pessoa pode desistir de esperar e sair da fila. Quando uma pessoa é atendida por um caixa, deixa-o livre, saindo do banco. Assim, as atividades que são consideradas neste sistema, são: pessoas na fila (p_1), também considerada como pessoas esperando serem atendidas por um dos caixas; pessoa sendo atendida pelo caixa 1 (p_5); pessoa sendo atendida pelo caixa 2 (p_6); pessoa sendo atendida pelo caixa 3 (p_7) e pessoa saindo do banco (p_8). Os recursos são: caixa 1, caixa 2 e caixa 3 (p_2, p_3 e p_4). Assim, criam-se os lugares (p_1 a p_8), como visto na Figura 0.62. Depois criam-se as transições que definem as mudanças de atividades com utilização dos recursos (Figura 0.63), isto é, pessoa entrando na fila (t_1); pessoa saindo da fila (t_8); pessoa indo ser atendida pelo caixa 1 (t_2); pessoa indo ser atendida pelo caixa 2 (t_3); pessoa indo ser atendida pelo caixa 3 (t_4); pessoa saindo do atendimento do caixa 1 (t_5); pessoa saindo do atendimento do caixa 2 (t_6); pessoa saindo do atendimento do caixa 3 (t_7) e pessoa saindo do banco (t_9). Colocam-se os arcos de entrada e de saída, de acordo com as inicializações e terminos de cada atividade e, por fim, definindo que inicialmente não haja ninguém na fila e todos os caixas estão livres, tem-se a marcação inicial dada por

$$M_0 = [0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T.$$

Assim, constrói-se a rede de Petri apresentada na Figura 0.64, que é o modelo deste sistema.

Exemplo 73 Considere o seguinte sistema bibliotecário simplificado de uma universidade em que estudam dois alunos de graduação (g_1 e g_2) e dois alunos de pós-graduação

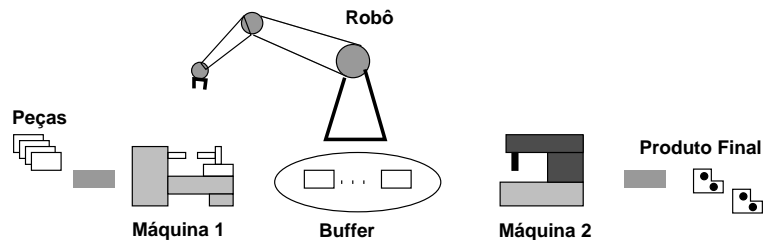


Figura 0.58: Simples sistema de manufatura com recursos compartilhados.

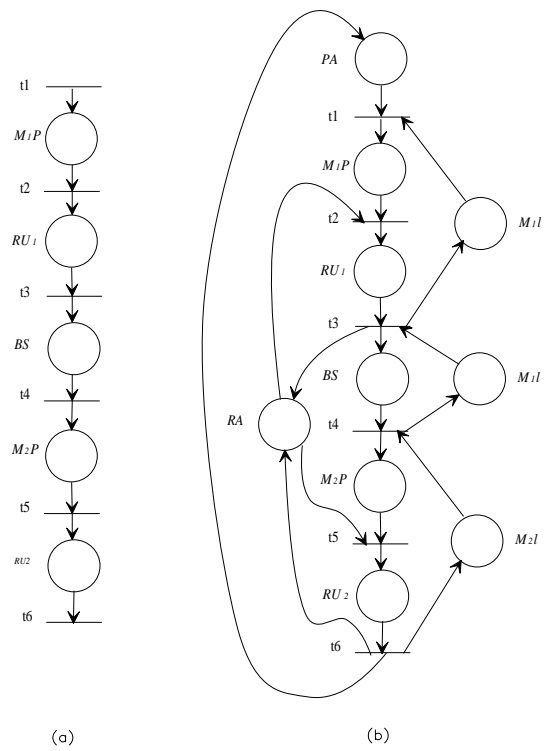


Figura 0.59: Criação da estrutura da rede de Petri que modela o sistema de manufatura com recursos compartilhados.

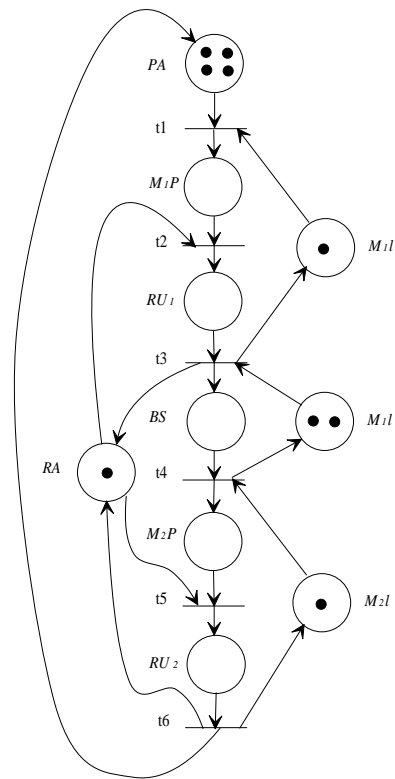


Figura 0.60: Rede de Petri que modela o sistema de manufatura com recursos compartilhados.

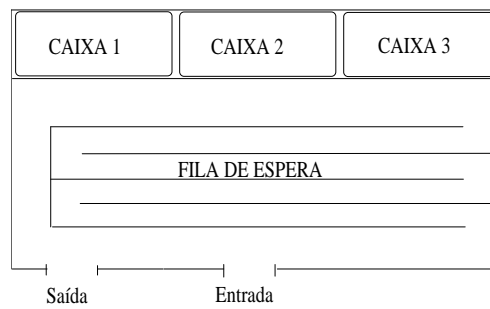


Figura 0.61: Simples sistema bancário.

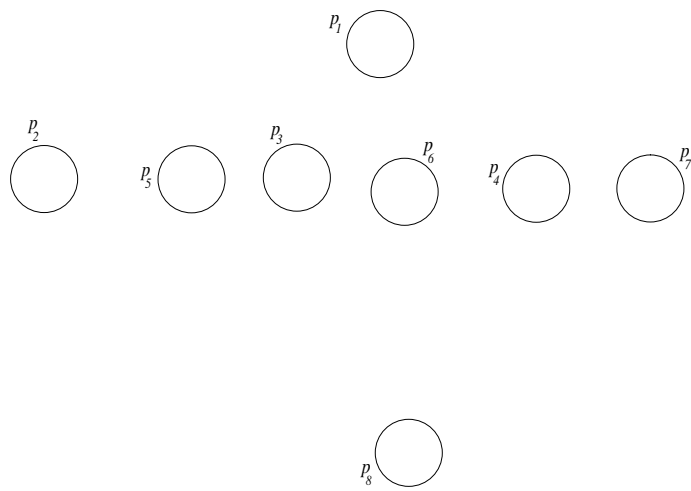


Figura 0.62: Primeiro passo na construção do modelo em rede de Petri para o sistema bancário.

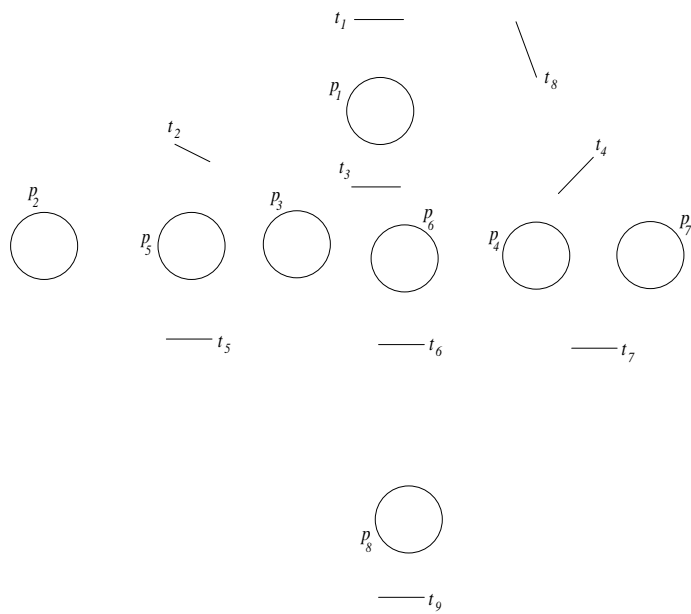


Figura 0.63: Segundo passo na construção do modelo em rede de Petri para o sistema bancário.

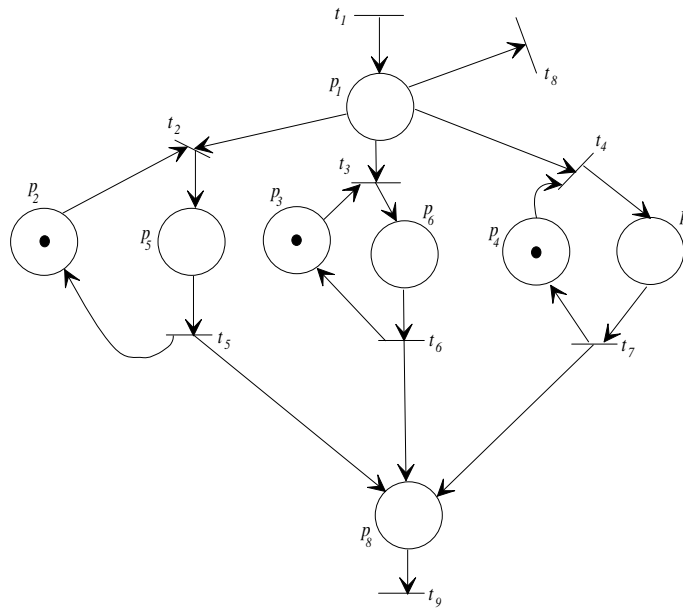


Figura 0.64: Modelo em rede de Petri para o sistema bancário.

(pg_1 e pg_2). Na biblioteca existem dois livros (l_1 e l_2) e dois periódicos (p_1 e p_2), em que os alunos de graduação são restritos a solicitar empréstimo apenas dos livros, não podendo retirar periódicos. Esse sistema está apresentado na Figura 0.65. Observe que para diferenciar os alunos (tanto os de graduação, como os alunos de pós-graduação) há um lugar específico com uma ficha (g_1 , g_2 , pg_1 e pg_2), que os representa considerando que não estão com nenhum livro ou periódico emprestado. Para cada aluno, um lugar específico indica que ele está com um livro emprestado (graduandos - $g_i l_i$ - e pós-graduandos - $pg_i l_i$, $i = 1, 2$) e um lugar indicando que o aluno está com um periódico (pós-graduando - $pg_i p_i$, $i = 1, 2$). Uma ficha num desses lugares representa que o aluno (vê-se claramente qual deles) está com um livro ou periódico (especificamente, qual livro ou periódico está emprestado), e a consequente falta de uma ficha no lugar respectivo - l_1 , l_2 , p_1 e p_2 - indica o livro ou periódico que está emprestado. A devolução de qualquer material coloca uma ficha novamente nos lugares respectivos.

Na construção do modelo de um sistema por uma rede de Petri, deve-se avaliar se o comportamento e a estrutura satisfazem o desejado. Assim, sempre deve-se testar algumas propriedades para garantir que o modelo não apresenta situações que impedem a avaliação correta do comportamento do sistema.

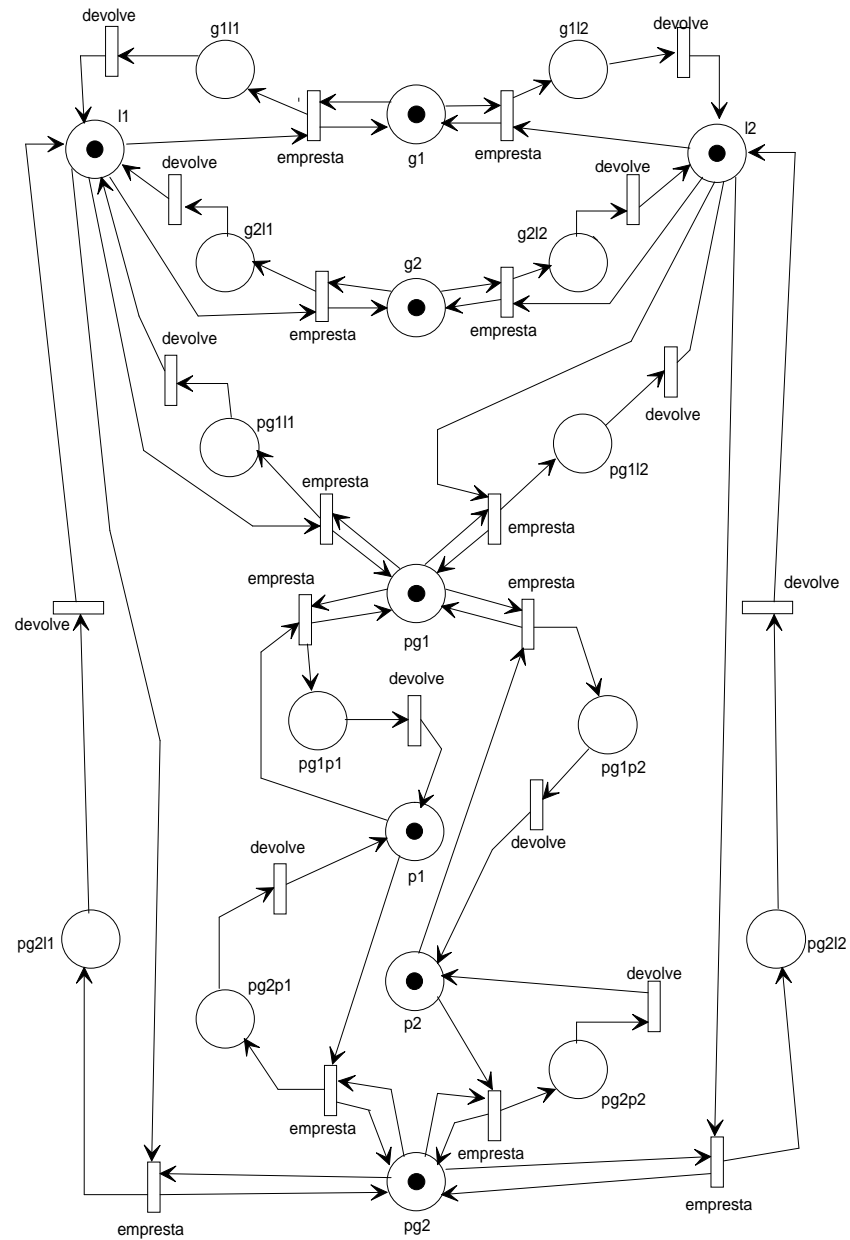


Figura 0.65: Modelo em rede de Petri do sistema bibliotecário simplificado.

Bibliografia

- [1] A.L. Furtado. *Teoria dos Grafos: Algoritmos*. Ciência de Computação. Livros Técnicos e Científicos Editora S. A., 1973.
- [2] P.J.G. Ramadge and W.M. Wonham. Supervision of discrete event processes. *Proceedings of 21st Conference on Decision and Control*, pages 1228–1229, 1982.
- [3] P.J.G. Ramadge and W.M. Wonham. The control of discrete event systems. *Proceedings of the IEEE*, 77(1):81–98, 1989.
- [4] W.M. Wonham. Sed notes. Course notes, 1999.
- [5] Y.C. Ho. Dynamics of discrete event systems. *Proceedings of the IEEE*, 77(1):3–6, 1989.
- [6] S. Balemi, P. Kozák, and R. Smedinga, editors. *Discrete Event Systems: Modeling and Control*. Birkhäuser, 1992.
- [7] J. Banks, J.S. Carson II, and B.L. Nelson. *Discrete-Event System Simulation*. Prentice Hall, 1996.
- [8] C.G. Cassandras and S. Lafortune. *Introduction to Discrete Event Systems*. Kluwer Academic Publishers, 1999.
- [9] J.E. Hopcroft and J.D. Ullman. *Introduction to Automata Theory, Languages and Computation*. Addison-Wesley, USA, 1979.
- [10] T. Murata. Petri nets: Properties, analysis and applications. *Proceedings of the IEEE*, 77(4):541–580, 1989.
- [11] J.L. Peterson. *Petri Net Theory and Modeling of Systems*. Prentice Hall, 1981.
- [12] W. Reisig. *Petri Nets: an Introduction*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1985.
- [13] W. Reisig. *A Primer in Petri Net Design*. Springer-Verlag, 1992.

- [14] F. DiCesare, G. Harhalakis, J.M. Proth, M. Silva, and F.B. Vernadat. *Practice of Petri Nets in Manufacturing*. Chapman and Hall, 1993.
- [15] J.M. Proth and X. Xie. *Petri Nets: A Tool for Design and Management of Manufacturing Systems*. John Wiley - Sons Ltd, 1996.
- [16] A.A. Desrochers and R.Y. Al-Jaar. *Applications of Petri Nets in Manufacturing Systems: Modeling, Control, and Performance Analysis*. IEEE Press, 1995.
- [17] A. Giua and F. DiCesare. Blocking and controllability of petri nets in supervisory control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39(4):818–823, 1994.
- [18] L.E. Holloway, B.H. Krogh, and A. Giua. A survey of petri net methods for controlled discrete event systems. *Discrete Event Systems: Theory and Applications*, pages 131–190, 1997.
- [19] L.E. Holloway and B.H. Krogh. Synthesis of feedback control logic for a class of controlled petri nets. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 35(5):514–523, 1990.
- [20] R. Kumar and L.E. Holloway. Supervisory control of deterministic petri nets with regular specification languages. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41(2):245–249, 1996.
- [21] M.C. Zhou and F. DiCesare. *Petri Net Synthesis for Discrete Event Control of Manufacturing Systems*. Kluwer Academic Publishers, 1993.
- [22] G.C. Barroso. *Uma Nova Abordagem para a Síntese de Supervisores de Sistemas a Eventos Discretos*. Tese de Doutorado. Universidade Federal da Paraíba, Campus II, Campina Grande, PB, Brasil, 1996.
- [23] E.M.M. Costa. *Contribuição ao Uso da Lógica Temporal na Especificação de Comportamentos de Sistemas a Eventos Discretos*. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal da Paraíba, Campus II, Campina Grande, PB, Brasil, Outubro 1997.
- [24] J.E. Hopcroft and J.D. Ullman. *Formal Languages and Their Relation to Automata*. Addison-Wesley Publishing Company, 1969.
- [25] A. Salomaa. *Formal Languages*. ACM Monograph Series. Academic Press, Inc. New York, 1973.
- [26] A. Gill. *Introduction to the Theory of Finite-State Machines*. McGraw-Hill Electronic Sciences Series. McGRAW-HILL Book Company, 1962.