

# Análise e Transmissão de Sinais

Edmar José do Nascimento  
(Princípios de Comunicações)

Universidade Federal do Vale do São Francisco

# Roteiro

- 1 Análise de Fourier
- 2 Sistemas Lineares
- 3 Filtros
- 4 Distorção
- 5 Energia, Potência e Autocorrelação

# Sinais

- Um sinal representa um conjunto de informações ou dados
- Sinais são funções do tempo
- Em comunicações, os sinais podem representar uma tensão ou uma corrente elétrica
- A medida da força de um sinal pode ser feita de duas maneiras:
  - Energia de um sinal
  - Potência de um sinal

# Energia e potência

- Seja  $g(t)$  um sinal qualquer
- A energia de  $g(t)$  representada por  $E_g$  é definida como:

$$E_g = \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt$$

- A potência de  $g(t)$  representada por  $P_g$  é definida como:

$$P_g = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |g(t)|^2 dt$$

- O valor RMS de  $g(t)$  é igual a  $\sqrt{P_g}$

# Potência de sinais periódicos

- Um sinal é periódico se para alguma constante positiva  $T_0$ ,

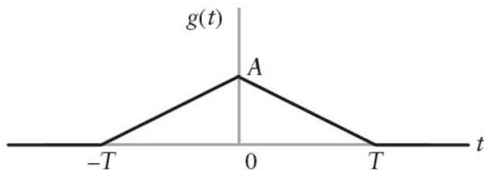
$$g(t) = g(t + T_0) \quad \forall t$$

- O menor valor de  $T_0$  é o período de  $g(t)$
- Quando  $g(t)$  é periódico, então  $P_g$  pode ser calculada a partir da expressão:

$$P_g = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |g(t)|^2 dt$$

# Exemplos

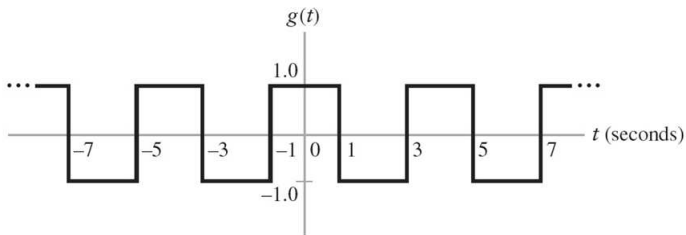
- Calcular a energia e a potência do sinal abaixo:



**FIGURE 2.41**  
Problem 2.23

# Exemplos

- Calcular a energia e a potência do sinal abaixo:



**FIGURE 2.48** Problem 2.45

# Análise de Fourier

- A análise de Fourier (séries e transformadas) é utilizada na análise de sinais
- As séries de Fourier são usadas para analisar sinais periódicos
- A transformada de Fourier pode ser utilizada tanto na análise de sinais aperiódicos quanto periódicos
- A representação de um sinal em séries de Fourier pode ser comparada com a representação de um vetor em componentes de uma base de um espaço vetorial
  - Nas séries de Fourier, um sinal é representado como a soma de componentes em uma base de funções ortogonais (senos, cossenos ou exponenciais)



# Série Trigonométrica

- Seja  $x(t)$  um sinal periódico com período  $T_0$
- $x(t)$  pode ser representado em séries de Fourier como:

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)$$

- Sendo,

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \cos n\omega_0 t dt$$

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \sin n\omega_0 t dt$$

# Série Trigonométrica Compacta

- Outras representações podem ser obtidas para a série de Fourier
- A série de Fourier pode ser escrita na forma compacta como:

$$x(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n)$$

- Sendo os coeficientes  $C_0$ ,  $C_n$  e  $\theta_n$  obtidos a partir de  $a_0$ ,  $a_n$  e  $b_n$  de acordo com as relações

$$C_0 = a_0$$

$$C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

$$\theta_n = \arctan\left(\frac{-b_n}{a_n}\right)$$

# Série Exponencial de Fourier

- A partir das relações de Euler, pode-se obter a série exponencial de Fourier, que é dada por:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t}$$
$$D_n = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

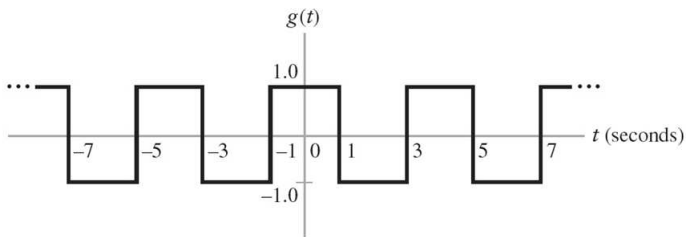
- Pode-se mostrar que:

$$D_n = \frac{a_n - jb_n}{2} = \frac{C_n}{2} e^{j\theta_n} \text{ e } D_{-n} = \frac{a_n + jb_n}{2} = \frac{C_n}{2} e^{-j\theta_n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

- Além disso,  $a_0 = C_0 = D_0$

# Exemplos

- Obter as representações em série de Fourier para o sinal abaixo:



**FIGURE 2.48** Problem 2.45

# Teorema de Parseval

- O teorema de Parseval permite calcular a potência de um sinal a partir do espectro de amplitude do sinal
- Segundo o teorema de Parseval, a potência de um sinal periódico é igual a soma das potências das componentes da série, ou seja:

$$P_x = C_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} C_n^2$$

$$P_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |D_n|^2 = D_0^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} |D_n|^2$$

- Este teorema é particularmente útil se avaliar o peso de cada harmônica em um sinal periódico qualquer

# Transformada de Fourier

- Para sinais aperiódicos, a representação em frequência pode se obtida a partir das séries de Fourier no limite  $T_0 \rightarrow \infty$
- Para um sinal  $g(t)$ , tem-se:
  - $G(\omega) = \mathcal{F}[g(t)]$  e  $g(t) = \mathcal{F}^{-1}[G(\omega)]$
  - $g(t) \leftrightarrow G(\omega)$

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$\omega = 2\pi f$$

$$G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f) e^{j2\pi f t} df$$

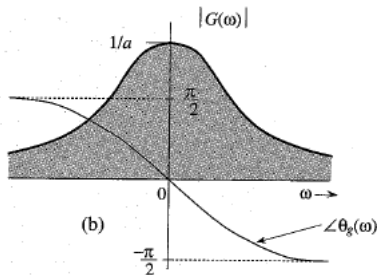
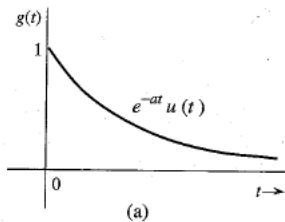
# Amplitude e Fase do Espectro

- $G(\omega)$  é em geral uma função complexa de  $\omega$
- $G(\omega) = |G(\omega)|e^{j\theta_g}$
- Quando  $g(t)$  é real, tem-se:

$$G(-\omega) = G^*(\omega) \implies \left\{ \begin{array}{l} |G(\omega)| = |G(-\omega)| \\ \theta_g(\omega) = -\theta_g(-\omega) \end{array} \right\}$$

# Exemplo

- Calcular a transformada de Fourier de  $g(t) = e^{-at}u(t)$ ,  $a > 0$
- $G(\omega) = \frac{1}{a+j\omega} = \frac{1}{\sqrt{a^2+\omega^2}} e^{-j\arctan(\omega/a)}$

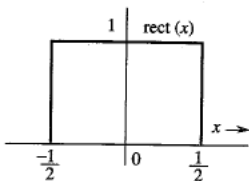




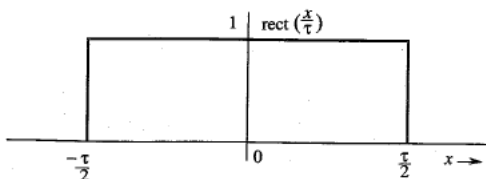
# Transformadas de algumas funções

- A **função retangular** (*Unit Gate*) é definida como:

$$\Pi\left(\frac{x}{\tau}\right) = \text{rect}\left(\frac{x}{\tau}\right) = \begin{cases} 0, & |x| > \frac{\tau}{2} \\ \frac{1}{2}, & |x| = \frac{\tau}{2} \\ 1, & |x| < \frac{\tau}{2} \end{cases}$$



(a)



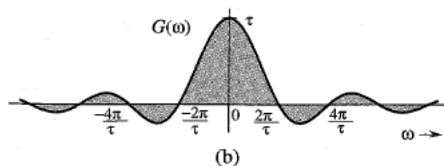
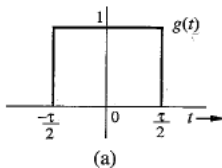
(b)

# Transformadas de algumas funções

$$g(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) \iff G(\omega) = \frac{\tau \sin \omega\tau/2}{\omega\tau/2} = \tau \text{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

- A função  $\text{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}$  possui as seguintes propriedades:
  - $\text{sinc}(x) = \text{sinc}(-x)$
  - $\text{sinc}(x) = 0 \implies \sin x = 0, x \neq 0 \implies x = \pm n\pi; n = \{1, 3, \dots\}$
  - $\text{sinc}(0) = 1$
  - $\text{sinc}(x)$  é uma função com período  $2\pi$  que decresce de acordo com  $1/x$

# Transformadas de algumas funções



- O espectro do pulso retangular se estende até infinito (largura de banda infinita)
- Uma estimativa grosseira:  $2\pi/\tau$  rad/s ou  $1/\tau$  Hz

# Transformadas de algumas funções

- Impulso no tempo

$$\delta(t) \iff 1$$

- Impulso em frequência

$$1 \iff 2\pi\delta(\omega)$$

- Impulso em frequência deslocado

$$e^{j\omega_0 t} \iff 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

$$e^{-j\omega_0 t} \iff 2\pi\delta(\omega + \omega_0)$$

# Transformadas de algumas funções

- Cosseno

$$\begin{aligned}\cos \omega_0 t &= \frac{1}{2}(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}) \\ \mathcal{F}[\cos \omega_0 t] &= \pi[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]\end{aligned}$$

- Seno

$$\begin{aligned}\sin \omega_0 t &= \frac{1}{2j}(e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}) \\ \mathcal{F}[\sin \omega_0 t] &= \pi j[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]\end{aligned}$$

# Propriedades da Transformada de Fourier

- Simetria

$$\begin{aligned}g(t) &\iff G(\omega) \\G(t) &\iff 2\pi g(-\omega)\end{aligned}$$

## Example

$$\begin{aligned}\operatorname{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) &\iff \tau \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \\ \tau \operatorname{sinc}\left(\frac{t\tau}{2}\right) &\iff 2\pi \operatorname{rect}\left(\frac{\omega}{\tau}\right)\end{aligned}$$

# Propriedades da Transformada de Fourier

- Scaling

$$g(t) \iff G(\omega)$$
$$g(at) \iff \frac{1}{|a|} G\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

- $a > 1$ , compressão no tempo resulta na expansão em frequência
- $a < 1$ , expansão no tempo resulta na compressão em frequência

# Propriedades da Transformada de Fourier

- Deslocamento no tempo

$$\begin{aligned}g(t) &\iff G(\omega) \\g(t - t_0) &\iff e^{-j\omega t_0} G(\omega)\end{aligned}$$

- Deslocamento em frequência

$$\begin{aligned}g(t) &\iff G(\omega) \\g(t)e^{j\omega_0 t} &\iff G(\omega - \omega_0)\end{aligned}$$

## Sinal Modulado

$$g(t) \cos \omega_0 t \iff \frac{1}{2} [G(\omega - \omega_0) + G(\omega + \omega_0)]$$



# Propriedades da Transformada de Fourier

- Convolução

$$g(t) * w(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)w(t - \tau)d\tau$$

- Convolução no tempo

$$\begin{aligned}g_1(t) &\iff G_1(\omega); & g_2(t) &\iff G_2(\omega) \\g_1(t) * g_2(t) &\iff G_1(\omega)G_2(\omega)\end{aligned}$$

- Convolução em frequência

$$\begin{aligned}g_1(t) &\iff G_1(\omega); & g_2(t) &\iff G_2(\omega) \\g_1(t)g_2(t) &\iff \frac{1}{2\pi}G_1(\omega) * G_2(\omega)\end{aligned}$$

# Propriedades da Transformada de Fourier

- Diferenciação no tempo

$$g(t) \iff G(\omega)$$
$$\frac{dg(t)}{dt} \iff j\omega G(\omega)$$

- Integração no tempo

$$g(t) \iff G(\omega)$$
$$\int_{-\infty}^t g(\tau) d\tau \iff \frac{G(\omega)}{j\omega} + \pi G(0)\delta(\omega)$$

# Sistemas Lineares

- Para um sistema LIT, a relação entre a entrada e a saída é dada por

$$y(t) = g(t) * h(t)$$

- No domínio da frequência, tem-se

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= G(\omega)H(\omega) \\ &= |Y(\omega)|e^{j\theta_y(\omega)} = |G(\omega)||H(\omega)|e^{j[\theta_g(\omega)+\theta_h(\omega)]} \end{aligned}$$

- Portanto,

$$\begin{aligned} |Y(\omega)| &= |G(\omega)||H(\omega)| \\ \theta_y(\omega) &= \theta_g(\omega) + \theta_h(\omega) \end{aligned}$$

# Transmissão sem Distorção

- Em uma transmissão sem distorção, a forma de onda de entrada deve ser preservada
  - Toleram-se atrasos e uma alteração uniforme na amplitude

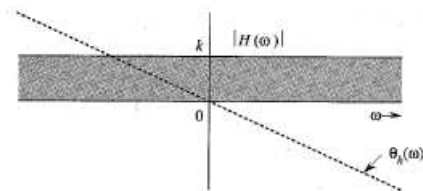
$$y(t) = kg(t - t_d)$$

- No domínio da frequência, tem-se

$$Y(\omega) = kG(\omega)e^{-j\omega t_d} \rightarrow H(\omega) = ke^{-j\omega t_d}$$

- Resposta em amplitude constante -  $|H(\omega)| = k$
- Resposta em fase linear -  $\theta_h(\omega) = -\omega t_d$

# Transmissão sem Distorção



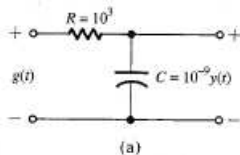
- O atraso pode ser representado pelo negativo da inclinação da resposta em fase

$$t_d(\omega) = -\frac{d\theta_h}{d\omega}$$

- $t_d(\omega)$  constante implica que todas as componentes do sinal são igualmente atrasadas por  $t_d$
- Para um sistema sem distorção,  $t_d(\omega)$  deve ser pelo menos constante na banda de interesse

# Exemplo

Para o circuito RC, determinar  $H(\omega)$ , esboçar  $|H(\omega)|$ ,  $\theta_h(\omega)$  e  $t_d(\omega)$ . Para que a transmissão seja sem distorção, qual o requisito da largura de banda de  $g(t)$  se a variação tolerada na resposta em amplitude é de 2% e de 5% no atraso? Qual é o atraso? Encontre  $y(t)$ .



# Exemplo

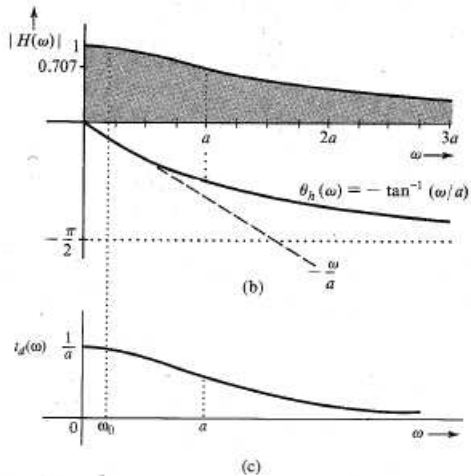
$$H(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC} = \frac{a}{a + j\omega}; \quad a = \frac{1}{RC} = 10^6$$

$$|H(\omega)| = \frac{a}{\sqrt{a^2 + \omega^2}} \simeq 1; \omega \ll a$$

$$\theta_h(\omega) = -\arctan \frac{\omega}{a} \simeq -\frac{\omega}{a}; \omega \ll a$$

$$t_d(\omega) = -\frac{d\theta_h}{d\omega} = \frac{a}{\omega^2 + a^2} \simeq \frac{1}{a} = 10^{-6}; \omega \ll a$$

# Exemplo





## Exemplo

- Como  $H(0) = 1$  e  $t_d(0) = 1/a$ , a região de transmissão sem distorção é calculada como

$$|H(\omega_0)| = \frac{a}{\sqrt{a^2 + \omega_0^2}} \geq 0,98 \rightarrow \omega_0 \leq 203.000$$

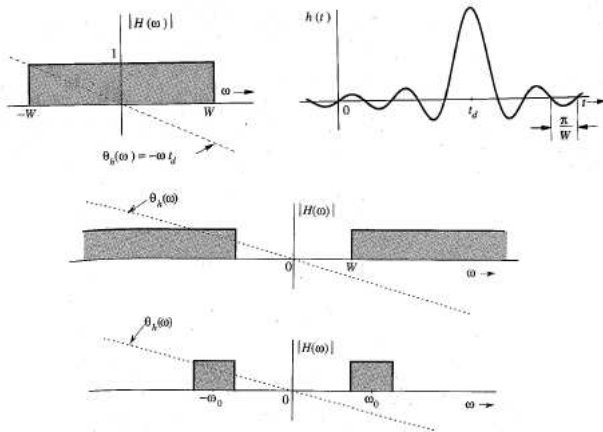
$$t_d(\omega_0) = \frac{a}{\omega_0^2 + a^2} \geq \frac{0,95}{a} \rightarrow \omega_0 \leq 229.400$$

- Assim, a banda de  $g(t)$  deve ser menor que 203.000 rad/s ou 32,31 kHz

# Filtros Ideais

- Em muitas situações práticas é necessário limitar o espectro de frequências de um sinal
  - Melhor aproveitamento do espectro
  - Componentes de alta frequência de pouca relevância na aplicação considerada
- Os filtros ideais permitem que a transmissão ocorra sem distorção em uma determinada banda e suprimem as frequências fora dessa banda
- Os principais tipos de filtros são:
  - Passa-baixas (*Low-pass*)
  - Passa-altas (*High-pass*)
  - Passa-faixas (*Band-pass*)
  - Rejeita-faixas

# Filtros Ideais



# Filtros Ideais

- Os filtros ideais não são fisicamente realizáveis

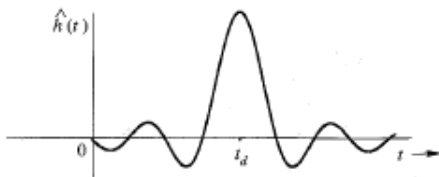
$$H(\omega) = \text{rect}\left(\frac{\omega}{2W}\right) e^{-j\omega t_d} \rightarrow h(t) = \frac{W}{\pi} \text{sinc}[W(t - t_d)]$$

- $h(t)$  é não causal e portanto não é fisicamente realizável
- Outra forma de verificar se um filtro é fisicamente realizável é verificar se ele atende o critério de Paley-Wiener

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\ln |H(\omega)||}{1 + \omega^2} d\omega < \infty$$

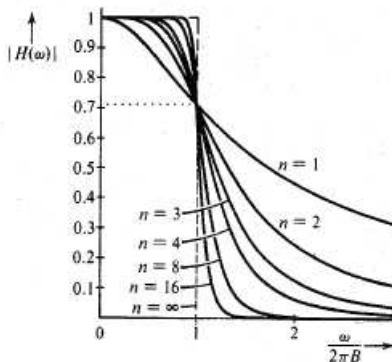
# Filtros Realizáveis

- Filtros fisicamente realizáveis podem ser obtidos truncando-se a parte negativa de  $h(t)$ , resultando em  $\hat{h}(t) = h(t)u(t)$
- Se  $t_d$  é grande,  $h(t)$  e  $\hat{h}(t)$  são bastante próximos
  - $\hat{H}(\omega)$  é uma boa aproximação

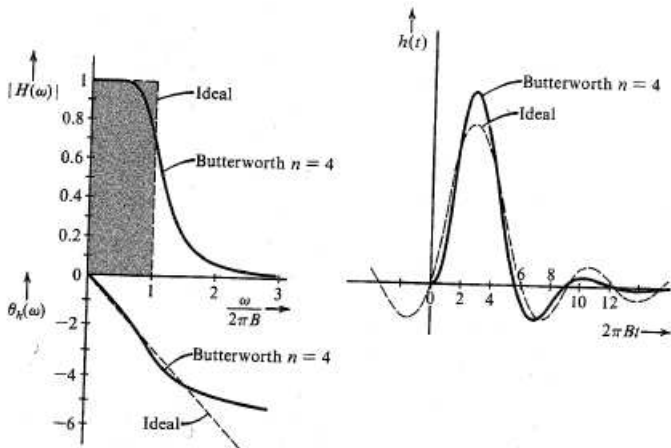


# Filtros Realizáveis

- Os filtros práticos não realizam cortes bruscos
- O espectro de amplitude do filtro de Butterworth se aproxima do filtro ideal quando  $n \rightarrow \infty$



# Filtros de Butterworth para $n = 4$



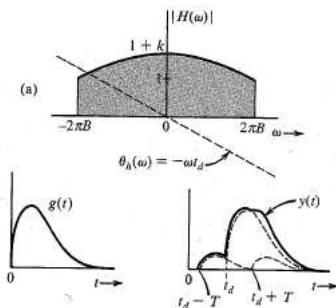
# Tipos de Distorção

- Os sinais quando são transmitidos através de canais estão frequentemente sujeitos à distorção
  - Características não ideais dos canais
- Os principais tipos de distorção são os seguintes:
  - Distorção linear
  - Distorção causada por não linearidades do canal
  - Distorção causada por efeitos de multipercurso
  - Desvanecimento (*Fading*)



# Distorção Linear

- Quando as características do canal não são ideais, as componentes de Fourier não são igualmente afetadas
  - Componentes que se cancelavam podem não mais se cancelar
  - O resultado é o espalhamento ou dispersão dos pulsos de informação



# Distorção Causada por Não Linearidades do Canal

- O modelo de canal linear é válido apenas para pequenos sinais
  - Para grandes amplitudes, as características não lineares não podem ser negligenciadas

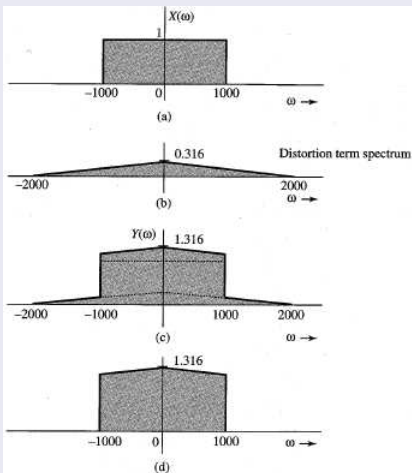
$$y = f(g) = a_0 + a_1g(t) + a_2g^2(t) + \cdots + a_kg^k(t) + \cdots$$

- Se  $g(t)$  tem largura de banda de  $B$  Hz, então  $g^k(t)$  tem largura de banda de  $kB$  Hz
  - Espalhamento ou dispersão espectral
  - Nocivo para sistemas multiplexados em frequência (FDM)

# Exemplo

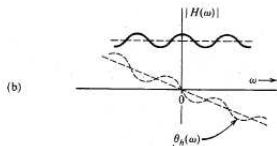
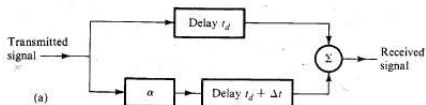
$$y(t) = x(t) + 0,001x^2(t)$$

$$x(t) = \frac{1000}{\pi} \text{sinc}(1000t)$$



# Distorção Causada por Efeitos de Multipercurso

- O sinal transmitido pode chegar no receptor através de dois ou mais caminhos
  - A atenuação e o atraso podem ser diferentes para cada caminho
  - A interferência entre os dois sinais dá origem ao **desvanecimento seletivo em frequência**



## Energia de um Sinal

- A energia de um sinal  $g(t)$  pode ser calculada no domínio do tempo a partir da seguinte expressão

$$E_g = \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt$$

- No domínio da frequência, de acordo com o teorema de Parseval, a energia de  $g(t)$  pode ser calculada como

$$E_g = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |G(\omega)|^2 d\omega$$

## Densidade Espectral de Energia

- A partir da expressão de Parseval verifica-se que a energia pode ser obtida através da área do gráfico de  $|G(\omega)|^2$
- Define-se então a **densidade espectral de energia** (DEE - ESD em inglês) como

$$\Psi_g(\omega) = |G(\omega)|^2$$

- Assim, tem-se que:

$$E_g = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_g(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_g(f) df$$

- Para um sistema LIT em que  $y(t) = h(t) * g(t)$ , então:

$$\Psi_y(\omega) = |H(\omega)|^2 \Psi_g(\omega)$$

# Largura de Banda Essencial

- O espectro da maioria dos sinais se estende até o infinito
- Entretanto, como a energia é em geral finita, o espectro de amplitude tende a zero quando  $\omega \rightarrow \infty$
- Pode-se então suprimir as componentes acima de  $B$  Hz ( $2\pi B$  rad/s) com pouco efeito no sinal original
- Segundo esse critério, a largura de banda  $B$  é chamada de **largura de banda essencial**
- O critério para estimar  $B$  depende da aplicação considerada
  - Faixa de frequência que contém 95% da energia do sinal

# Exemplo

## Problema

Estime a largura de banda essencial  $W$  em rad/s do sinal  $e^{-at}u(t)$ ,  $a > 0$ , sendo que essa banda deve conter 95% da energia do sinal.

## Solução

$$g(t) = e^{-at}u(t) \leftrightarrow G(\omega) = \frac{1}{j\omega + a}$$

$$E_g = \int_0^{\infty} e^{-2at} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\omega^2 + a^2} d\omega = \frac{1}{2a}$$

$$0,95 \frac{1}{2a} = \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W \frac{1}{\omega^2 + a^2} d\omega \rightarrow W = (12,706.a) \text{ rad/s}$$



# Exemplo

## Problema

Estime a largura de banda essencial  $W$  em rad/s do sinal  $e^{-at}u(t)$ ,  $a > 0$ , sendo que essa banda deve conter 95% da energia do sinal.

## Solução

$$g(t) = e^{-at}u(t) \leftrightarrow G(\omega) = \frac{1}{j\omega + a}$$

$$E_g = \int_0^{\infty} e^{-2at} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\omega^2 + a^2} d\omega = \frac{1}{2a}$$

$$0,95 \frac{1}{2a} = \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W \frac{1}{\omega^2 + a^2} d\omega \rightarrow W = (12,706.a) \text{ rad/s}$$

## Energia de Sinais Modulados

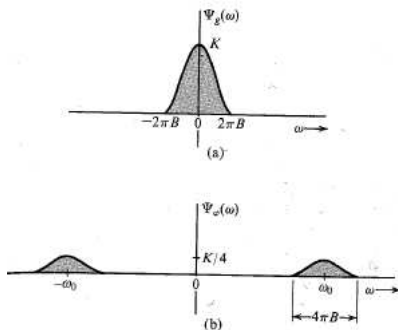
- Seja  $g(t)$  um sinal em banda básica limitado em banda a  $B$  Hz ( $2\pi B$  rad/s) com DEE igual a  $\Psi_g(\omega)$
- Seja  $\varphi(t) = g(t) \cos \omega_0 t$  um sinal modulado em amplitude, com  $\omega_0 \geq 2\pi B$ , tem-se que:

$$\begin{aligned}\Phi(\omega) &= \mathcal{F}\{\varphi(t)\} = \frac{1}{2}[\mathbf{G}(\omega + \omega_0) + \mathbf{G}(\omega - \omega_0)] \\ \Psi_\varphi(\omega) &= |\Phi(\omega)|^2 = \frac{1}{4}|\mathbf{G}(\omega + \omega_0) + \mathbf{G}(\omega - \omega_0)|^2 \\ &= \frac{1}{4} \left[ |\mathbf{G}(\omega + \omega_0)|^2 + |\mathbf{G}(\omega - \omega_0)|^2 \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[ \Psi_g(\omega + \omega_0) + \Psi_g(\omega - \omega_0) \right]\end{aligned}$$

# Energia de Sinais Modulados

- Assim, a energia do sinal modulado corresponde à metade da energia do sinal em banda básica, ou seja

$$E_{\varphi} = \frac{1}{2} E_g$$



# Autocorrelação

- A autocorrelação de um sinal real  $g(t)$  é definida como

$$\psi_g(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)g(t + \tau)dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)g(t - \tau)dt$$

- Mostra-se que a autocorrelação é uma função par
- Um resultado importante relaciona a autocorrelação e a DEE

$$\psi_g(\tau) \iff \Psi_g(\omega) = |G(\omega)|^2$$

# Exemplo

## Problema

Calcule a função de autocorrelação no tempo de  $g(t) = e^{-at}u(t)$ ,  $a > 0$  e obtenha a partir dela a DEE de  $g(t)$

## Solução

$$\begin{aligned}g(t) &= e^{-at}u(t); \quad g(t - \tau) = e^{-a(t-\tau)}u(t - \tau) \\ \psi_g(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t)g(t - \tau)dt = \frac{1}{2a}e^{-a\tau}, \quad \tau > 0 \\ \psi_g(\tau) &= \psi_g(-\tau) \rightarrow \psi_g(-\tau) = \frac{1}{2a}e^{a\tau}, \quad \tau < 0 \\ \psi_g(\tau) &= \frac{1}{2a}e^{-a|\tau|} \iff \Psi_g(\omega) = \frac{1}{\omega^2 + a^2}\end{aligned}$$

# Exemplo

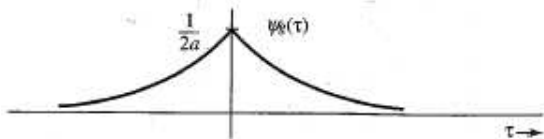
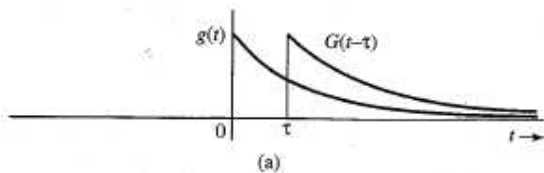
## Problema

Calcule a função de autocorrelação no tempo de  $g(t) = e^{-at}u(t)$ ,  $a > 0$  e obtenha a partir dela a DEE de  $g(t)$

## Solução

$$\begin{aligned}g(t) &= e^{-at}u(t); \quad g(t - \tau) = e^{-a(t-\tau)}u(t - \tau) \\ \psi_g(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t)g(t - \tau)dt = \frac{1}{2a}e^{-a\tau}, \quad \tau > 0 \\ \psi_g(\tau) &= \psi_g(-\tau) \rightarrow \psi_g(-\tau) = \frac{1}{2a}e^{a\tau}, \quad \tau < 0 \\ \psi_g(\tau) &= \frac{1}{2a}e^{-a|\tau|} \iff \Psi_g(\omega) = \frac{1}{\omega^2 + a^2}\end{aligned}$$

# Exemplo



## Potência de um Sinal

- A potência de um sinal  $g(t)$  é definida como

$$P_g = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g^2(t) dt$$

- A potência pode ser interpretada como sendo a energia média da versão truncada de  $g(t)$ , definida por

$$g_T(t) = \begin{cases} g(t), & |t| \leq T/2 \\ 0, & |t| > T/2 \end{cases}$$

- Tem-se então,

$$P_g = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E_{gT}}{T}$$



## Densidade Espectral de Potência

- Analogamente ao que foi feito para os sinais de energia, pode-se mostrar que para um sinal de potência  $g(t)$

$$P_g = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|G_T(\omega)|^2}{T} d\omega$$

- Define-se então a **Densidade Espectral de Potência** (DEP - PSD em inglês) de  $g(t)$  como sendo

$$S_g(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|G_T(\omega)|^2}{T}$$

- Logo, a potência pode ser expressada como

$$P_g = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_g(\omega) d\omega$$

# Autocorrelação de Sinais de Potência

- A autocorrelação no tempo para um sinal de potência real  $g(t)$  é definida como

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_g(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t)g(t + \tau) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t)g(t - \tau) dt\end{aligned}$$

- $\mathcal{R}_g(\tau)$  é uma função par

# Autocorrelação de Sinais de Potência

- Como

$$\mathcal{R}_g(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} g_T(t)g_T(t + \tau)dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\psi_{g_T}(\tau)}{T}$$

- Tem-se que

$$\mathcal{R}_g(\tau) \iff \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|G_T(\omega)|^2}{T} = S_g(\omega)$$

- O valor médio quadrático (RMS) de  $g(t)$  é dado por  $[g(t)]_{RMS} = \sqrt{P_g}$
- A relação entre a DEP da saída de um sistema LIT e a DEP da entrada é dada por

$$S_y(\omega) = |H(\omega)|^2 S_g(\omega)$$