Princípios de Comunicação

Lista de Exercícios N^o 3 - Semestre 2018.2

1. Sejam $x(t)$ e $y(t)$ dois processos estacionários no sentido amplo (ESA) independentes. Definindo-se $z(t) = x(t)y(t)$. Determine se $z(t)$ é ESA e mostre a seguinte relação entre as densidades espectrais de potência:

$$S_z(f) \quad = \quad S_x(f) * S_y(f)$$

2. Admita que os processos aleatórios $x(t)$ e $y(t)$ são individualmente e conjuntamente estacionários.
   (a) Determine a função de autocorrelação de $z(t) = x(t) + y(t)$.
   (b) Determine a função de autocorrelação de $z(t)$ quando $x(t)$ e $y(t)$ são descorrelacionados.
   (c) Determine a função de autocorrelação de $z(t)$ quando $x(t)$ e $y(t)$ são descorrelacionados e possuem média nula cada um.

3. Quando $x(t)$ é um processo real, gaussiano e estacionário com média nula e autocorrelação $R_X(\tau)$, a função de autocorrelação do processo $y(t) = x^2(t)$ é dada por $R_Y(\tau) = R_X^2(0) + 2R_X^2(\tau)$. Diante disso, calcule a densidade espectral de potência $S_Y(\omega)$ quando o processo $x(t)$ corresponde ao ruído branco passa-baixas (banda B Hertz) gaussiano.

4. Um processo estocástico $z(t)$ é definido da seguinte forma:

$$z(t) \quad = \quad x\cos(2\pi f_c t) - y\sin(2\pi f_c t),$$

em que x e y são variáveis aleatórias. Mostre que $z(t)$ é ESA se $E\{x\} = E\{y\} = E\{xy\} = 0$ e $E\{x^2\} = E\{y^2\} = \sigma^2$.

5. Um sinal $x(t)$ é transmitido através de um canal de comunicação cujo efeito consiste em adicionar ruído $n(t)$. O sinal recebido é da forma $y(t) = A[x(t) + n(t)]$. Sabe-se que $x(t)$ é um processo aleatório de média nula e função de autocorrelação:

$$R_x(t_1, t_2) \quad = \quad 2e^{-|t_1 - t_2|}.$$

O ruído $n(t)$ também é um processo aleatório de média nula, independente de $x(t)$ e possui função de autocorrelação:

$$R_n(t_1, t_2) \quad = \quad \frac{sinc[\pi(t_1 - t_2)]}{4}.$$

Determine o ganho A do amplificador de tal modo que o erro médio quadrático, $E[(y(t) - x(t))^2]$, cometido ao estimar $x(t)$ pela saída $y(t)$ do amplificador, seja mínimo.

6. Um processo $x(t)$ tem média $\eta(t)$ e autocorrelação $R_x(t_1, t_2)$. O processo $x(t)$ passa por um filtro linear cuja saída é dada por:

$$y(t) \quad = \quad x(t) - x(t - T),$$

sendo T uma constante.
   (a) Determine a média e a autocorrelação de $y(t)$. Se $x(t)$ é ESA, pode-se afirmar que $y(t)$ é ESA?
   (b) Prove que, se o processo $x(t)$ é ESA, a seguinte relação é válida:

$$S_y(f) \quad = \quad 4\sin^2(\pi f T) S_x(f).$$

7. A saída de um oscilador é descrita por um processo estocástico $x(t) = A\cos(2\pi f t - \theta)$, sendo que A é uma constante e f e θ são variáveis aleatórias independentes. A variável aleatória θ é definida por:

$$p_\theta(\Theta) \quad = \quad \begin{cases} 1/(2\pi) & , 0 \le \Theta \le 2\pi \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Determine a DEP de $x(t)$ em termos da fdp de f. O que acontece se f assume um valor constante?

8. Um processo de ruído tem a sua densidade espectral de potência dada por

$$S_n(f) \;=\; \begin{cases} 10^{-8}(1-\frac{|f|}{10^8}) & ,|f|<10^8 \\ 0 & ,|f|>10^8. \end{cases}$$

Este processo é passado por um filtro passa-faixas ideal com largura de banda de 2MHz centrado em 50MHz.

(a) Obtenha a potência do processo de saída.

(b) Escreva o processo de saída em termos das componentes em fase e em quadratura e obtenha a potência de cada componente. Admita que $f_c = 50MHz$.

(c) Obtenha a densidade espectral de potência das componentes em fase e em quadratura.

9. Um esquema de sinalização binária é usado em um canal AWGN com DEP do ruído branco igual a $\mathcal{N}/2$. Esse esquema usa os dois sinais equiprováveis $s_1(t)$ e $s_2(t)$ descritos abaixo e opera a uma taxa de R bits/s.

$$s_1(t) \;=\; \begin{cases} 2 & ,0 \le t \le T/2 \\ 1 & ,T/2 < t \le T \\ 0 & ,\text{caso contrário} \end{cases}$$

$$s_2(t) \;=\; \begin{cases} 1 & ,0 \le t \le T/2 \\ 2 & ,T/2 < t \le T \\ 0 & ,\text{caso contrário} \end{cases}$$

(a) Obtenha uma expressão para $E_b/\mathcal{N}$ para este sistema em função de $\mathcal{N}$ e de R.

(b) Qual é a probabilidade de erro este sistema (em função de $\mathcal{N}$ e de R)?

10. (10.2-1 Lathi) Na detecção coerente de PPM binária, um pulos $p_0(t)$ de meia largura é transmitido com diferentes atrasos para dígitos binários "0"e "1", no intervalo $0 \le t \le T_b$. Note que

$$p_0(t) = u(t) - u(t - T_b/2).$$

A transmissão PPM binária consiste simplesmente na transmissão de: $p_0(t)$ (se "0"for transmitido) e $p_0(t - T_b/2)$ (se "1"for transmitido). O ruído do canal é AWGN com nível de espectro $\mathcal{N}/2$.

(a) Determine a arquitetura do receptor ótimo para esse sistema binário. Esboce o gráfico da resposta do filtro no domínio do tempo.

(b) Se $P[0] = 0,4$ e $P[1] = 0,6$, determine o limiar ótimo e a resultante taxa de erro de bit.

11. (10.2-6 Lathi) Para a comunicação 4-ária, mensagens são escolhidas dentre quatro símbolos, $m_1 = 00$, $m_2 = 01$, $m_3 = 10$ e $m_4 = 11$, transmitidos por pulsos $-p(t)$, $+p(t)$, $-3p(t)$ e $+3p(t)$, respectivamente. Um filtro casado a $p(t)$ é usado no receptor. Denote a energia de $p(t)$ por E_p. O ruído de canal é AWGN com espectro $\mathcal{N}/2$.

(a) Seja r a saída do filtro casado em t_m. Esboce o gráfico de $p_r(r|m_i)$ (00,01,10 e 11) para os quatro símbolos de mensagens, supondo que sejam equiprováveis.

(b) Para minimizar a probabilidade de erro de detecção na parte (a), determine os limiares ótimos de decisão e a correspondente probabilidade de erro P_e em função da razão entre energia média de símbolo e ruído.