

Universidade Federal de Campina Grande
Departamento de Engenharia Elétrica
Princípios de Comunicações

Edmar Candeia Gurjão
ecandeia@dee.ufcg.edu.br

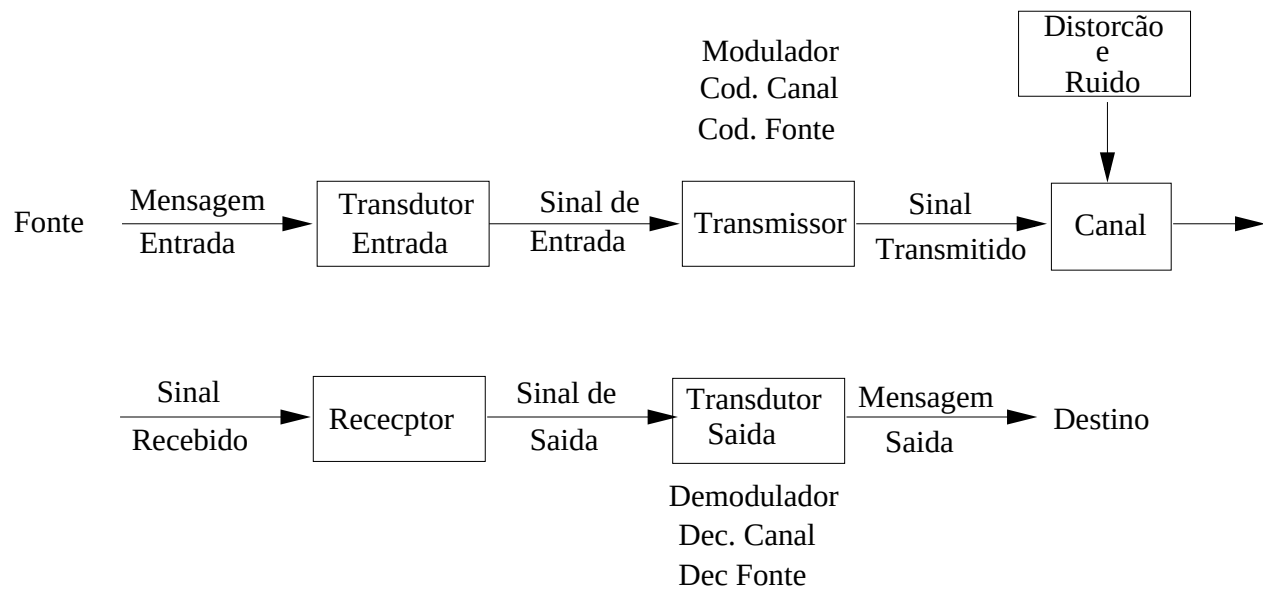
13 de outubro de 2008

- Objetivo: Apresentar os conceitos básicos da transmissão da informação.
- Ementa resumida: Correlação e densidade espectral de potência. Transmissão de sinais. Modulação em amplitude. Modulação em quadratura. Modulação em fase e frequência. Noções de ruído. **Digitalização de sinais. Modulações Digitais. Introdução à codificação.**
- Bibliografia: Modern Digital and Analog Communication Systems, B. P. Lathi.
- Informações: www.dee.ufcg.edu.br/ecandeia.
- Avaliações: 3 provas (21/10, 20/11 e 22/12) + Reposição (10/02/2009) + Final (18/02/2009).

Ferramentas Básicas

- Série de Fourier.
- Transformada de Fourier.
- Noções de Processos Estocásticos (média, variância).
- O estudo de sistemas de comunicação pode ser dividido em duas partes:
 1. como os sistemas funcionam $\rightarrow$ Técnicas de Fourier
 2. qual o desempenho deles na presença do ruído $\rightarrow$ Processos Estocásticos.

Sistema de Comunicações



Série de Fourier

- Sendo $g(t)$ um sinal periódico (período T_0) podemos escrever:

$$g(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t)$$

com

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} g(t) dt,$$

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} g(t) \cos n\omega_0 t dt$$

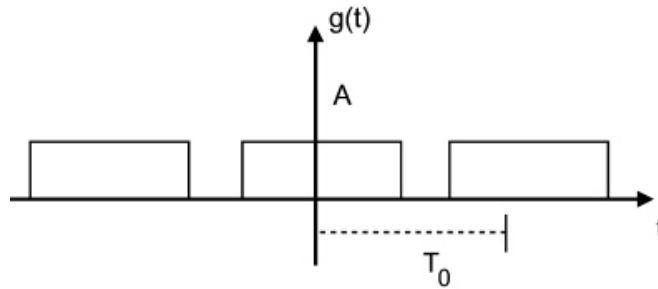
eg

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} g(t) \sin n\omega_0 t dt$$

- a_0 é o termo independente e fornece a média do sinal.
- ω_0 é a frequência fundamental e $n\omega_0$ são as harmônicas.

Série de Fourier

Exemplo: Trem de pulsos quadrados:



$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{T_0/4}^{T_0/4} dt = 1/2,$$

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_{T_0/4}^{T_0/4} \cos n\omega_0 dt = \frac{2}{n\pi} \sin \left(\frac{n\pi}{2} \right)$$

$$= \begin{cases} 0 & n \text{ par} \\ \frac{2}{\pi n} & n = 1, 5, 9, 13, \dots \\ -\frac{2}{\pi n} & n = 3, 7, 11, 15, \dots \end{cases}$$

e

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/4}^{T_0/4} \sin ntdt = 0$$

Finalmente

$$g(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left(\cos \omega_0 t - \frac{1}{2} \cos 3\omega_0 t + \frac{1}{5} \cos 5\omega_0 t \dots \right)$$

Transformada de Fourier

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (1)$$

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j\omega t} dt \quad (2)$$

Simbolicamente $G(\omega) = \mathcal{F}[g(t)]$ e $g(t) = \mathcal{F}^{-1}[G(\omega)]$ ou $g(t) \leftrightarrow G(\omega)$.

É um operador linear, isto é se $g_1(t) \leftrightarrow G_1(\omega)$ e $g_2(t) \leftrightarrow G_2(\omega)$ então

$$ag_1(t) + bg_2(t) \leftrightarrow aG_1(\omega) + bG_2(\omega)$$

Se $g(t)$ é uma função real de t

-

$$|G(-\omega)| = |G(\omega)| \quad \text{é par}$$

-

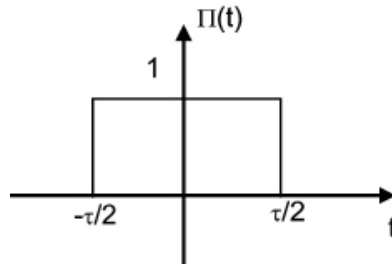
$$\theta_g(-\omega) = -\theta_g(\omega) \quad \text{é ímpar}$$

Transformada de Fourier

Exemplo 1 *Seja a função porta*

$$\Pi(t) = \begin{cases} 1 & |t| < 1/2 \\ 0 & |t| \geq 1/2 \end{cases}$$

Calcule a transformada de Fourier de $\Pi(t/\tau)$



Como

$$\Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) = \begin{cases} 1 & \left|\frac{t}{\tau}\right| < 1/2 \\ 0 & \left|\frac{t}{\tau}\right| \geq 1/2 \end{cases}$$

logo

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left[\Pi\left(\frac{t}{\tau}\right)\right] &= \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-j\omega t} dt = -\frac{1}{j\omega} [e^{-j\omega\tau/2} - e^{j\omega\tau/2}] \\ &= \frac{1}{j\omega} [e^{j\omega\tau/2} - e^{-j\omega\tau/2}] \\ &= \frac{2}{\omega} \sin(\omega\tau/2) \\ &= \tau \frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2} \end{aligned}$$

Fazendo

$$Sinc(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi x} \quad (3)$$

Tem-se:

$$\Pi(t/\tau) \leftrightarrow \tau Sinc(\omega\tau/2\pi).$$

A função $Sinc(x)$, tem um papel importante na Teoria de Comunicações e tem as seguintes características:

1. $Sinc(x)$ é uma função par de x .
2. $Sinc(x) = 0$ quando $\sin x = 0$, ou seja,
 $x = \pm\pi, \pm2\pi, \pm3\pi, \dots$
3. $Sinc(0) = 1$

Transformada de Fourier - Propriedades

Simetria ou Dualidade

Se

$$g(t) \leftrightarrow G(\omega)$$

então

$$G(t) \leftrightarrow 2\pi g(-\omega).$$

Ex.: Seja $g(t) = 1$, nesse caso $\delta(t) \leftrightarrow 1$ e
 $1 \leftrightarrow 2\pi\delta(-\omega) = 2\pi\delta(\omega)$.

Escalonamento

Se

$$g(t) \leftrightarrow G(\omega)$$

então para um valor a real e constante

$$g(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} G\left(\frac{\omega}{a}\right).$$

Compressão no domínio do tempo implica em
expansão no domínio da frequência e vice-versa.

Deslocamento no Tempo

Se

$$g(t) \leftrightarrow G(\omega)$$

então

$$g(t - t_0) \leftrightarrow G(\omega)e^{-j\omega t_0}.$$

Mostre que $g(t - t_0) + g(t + t_0) \leftrightarrow 2G(\omega) \cos \omega t_0$

Deslocamento na Frequência

Se

$$g(t) \leftrightarrow G(\omega)$$

então

$$g(t)e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow G(\omega - \omega_0).$$

$$g(t) \cos \omega_0 t = \frac{1}{2}[g(t)e^{j\omega_0 t} + g(t)e^{-j\omega_0 t}]$$

usando a propriedade acima, segue

$$g(t) \cos \omega_0 t \leftrightarrow \frac{1}{2}[G(\omega + \omega_0) + G(\omega - \omega_0)] \quad (4)$$

Diferenciação e Integração no Tempo

Se $g(t) \leftrightarrow G(\omega)$ então

$$\frac{dg(t)}{dt} \leftrightarrow j\omega G(\omega)$$

e

$$\int_{-\infty}^t g(x)dx \leftrightarrow \frac{G(\omega)}{j\omega} + \pi G(0)\delta(\omega) \quad (5)$$

Diferenciação em Frequência

Se $g(t) \leftrightarrow G(\omega)$ então

$$-jtg(t) \leftrightarrow \frac{d}{d\omega}G(\omega) \quad (6)$$

Teorema da Convolução

Teorema da convolução no tempo e na frequência, se

$$g_1(t) \leftrightarrow G_1(\omega) \text{ e } g_2(t) \leftrightarrow G_2(\omega)$$

então

$$g_1(t) * g_2(t) \leftrightarrow G_1(\omega)G_2(\omega) \text{ convolução no tempo } (7)$$

$$g_1(t)g_2(t) \leftrightarrow G_1(\omega) * G_2(\omega) \text{ convolução na frequência } (8)$$

Exemplo 2 *Convolução de uma função com um impulso*

$$g(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\delta(t-x)dx = g(t)$$

*ou de outra forma $g(t) \leftrightarrow G(\omega)$ e $\delta(t) \leftrightarrow 1$ donde $g(t) * \delta(t) = g(t)$.*

Transmissão sem Distorção Através de Sistemas Lineares

Uma transmissão é sem distorção se a entrada e a saída tem a mesma forma de onda:

$$r(t) = ks(t - t_d)$$

sendo t_d um atraso que não altera a forma de onda do sinal transmitido.

Pela propriedade do deslocamento

$$R(\omega) = kS(\omega)e^{-\omega t_d} = ke^{-j\omega t_d}S(\omega) = H(\omega)S(\omega)$$

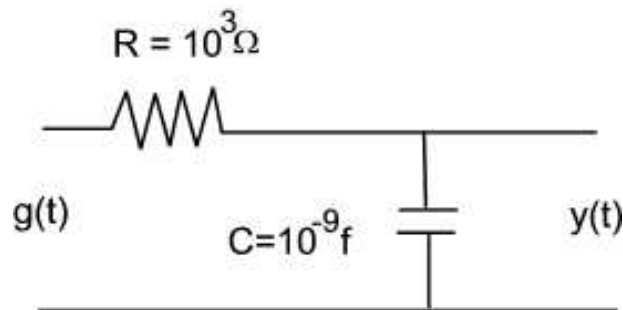
logo

$$H(\omega) = ke^{-j\omega t_d}.$$

- $|H(\omega)| = k$: todas as componentes de frequência devem sofrer a mesma atenuação ou amplificação.
- $\theta_H(\omega) = -\omega t_d$: a fase é proporcional a ω , de forma que todas as componentes de frequência sofram o mesmo atraso t_d
($\cos \omega(t - t_d) = \cos(\omega t - \omega t_d)$).

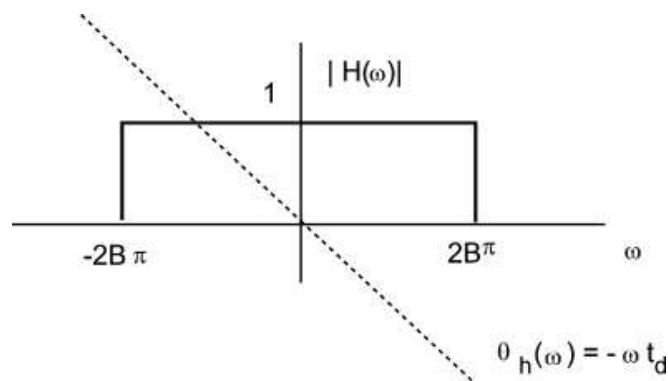
Transmissão sem Distorção Através de Sistemas Lineares

Exemplo 3 *Determinar a função de transferência $H(\omega)$ e desenhar $|H(\omega)|$ e $\theta_h(\omega)$ de um circuito RC mostrado na Figura 14. Para transmitir sem distorção, que restrição devemos impor na largura de faixa de $g(t)$? Qual é o atraso de transmissão? Ache $y(t)$ quando $g(t) = A \cos 100t$.*



Filtros Ideais

- Filtros são equipamentos que eliminam frequências de um sinal.
- Podem: passa-baixas (FPB), passa-altas (FPA), passa-faixa (FPF) ou rejeita-faixa (FRF).
- Módulo e a fase de um filtro passa-baixas ideal:



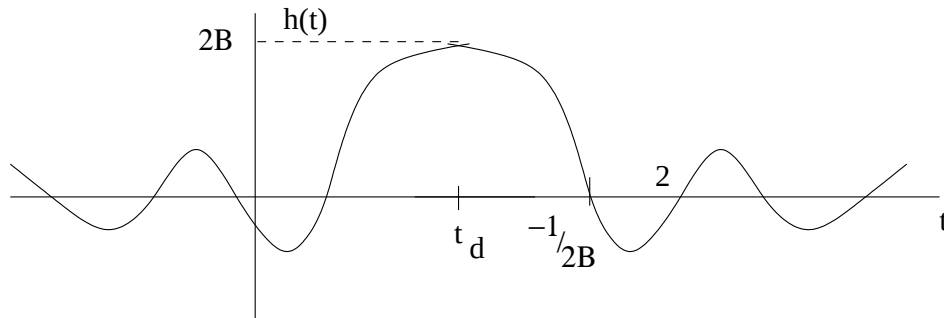
- As frequências abaixo $2\pi B$ passam sem distorção e todas as componentes acima de $2\pi B$ são suprimidas.
- A função $h(t)$ para o filtro passa baixas ideal (resposta a um impulso unitário), é dada por $h(t) = \mathcal{F}^{-1}[H(\omega)]$

$$H(\omega) = \Pi\left(\frac{\omega}{4\pi B}\right) e^{-j\omega t_d}$$

sendo

$$\Pi\left(\frac{\omega}{4\pi B}\right) = \begin{cases} 1 & |\omega| < 4\pi B/2 \\ 0 & |\omega| \geq 4\pi B/2 \end{cases}$$

logo $h(t) = 2B \text{Sinc}[2B(t - t_d)]$:

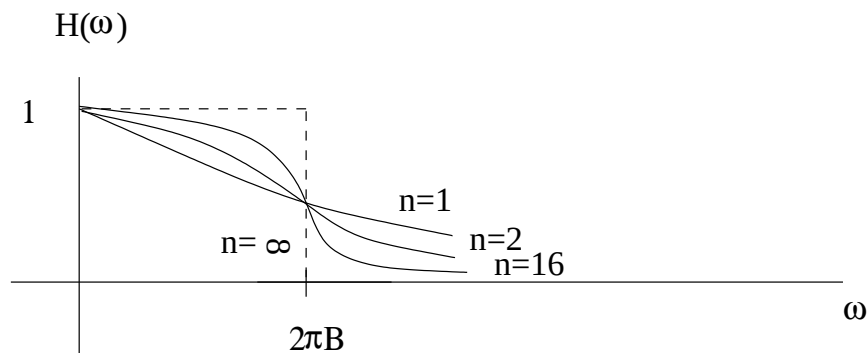


- $h(t)$ existe para $t < 0$: A resposta aparece antes da entrada ser aplicada.
- Concluí-se que um filtro ideal apesar de ser desejável não é fisicamente realizável.
- Pode-se fazer $\hat{h} = h(t)u(t)$ que é fisicamente realizável porque é causal. Tal filtro no entanto não é ideal e distorce o sinal limitado em BHz.
- Aumentarmos a atraso t_d (teoricamente se $t_d \rightarrow \infty$) teríamos um filtro ideal “realizável”. $\hat{h}(t)$ pode ser uma réplica aproximada de $h(t)$ exceto pelo atraso. O filtro resultante $\hat{H}(\omega)$ é uma aproximação de $H(\omega)$.

- Na prática temos uma variedade de filtros, por exemplo, os filtros Butterworth são descritos pelas funções de transferência

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{2\pi B}\right)^{2n}}}$$

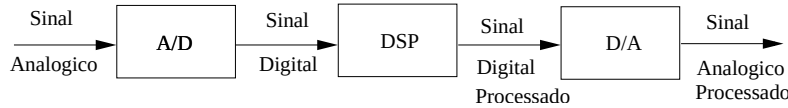
sendo n a ordem do filtro.



- $|H(\omega)|$ e a fase $\theta_h(\omega)$ são interdependentes: para um dado n pode ser que o módulo se aproxime do valor ideal, mas a fase se afaste do valor ideal.

Filtros Digitais

- Sinais analógicos também podem ser processados por meios digitais:



- Processadores Digitais de Sinais (DSP, do inglês, *Digital Signal Processor*).
- Vantagens do processamento digital são:
 - pode ser compartilhado;
 - em geral o custo é consideravelmente mais baixo;
 - a precisão dos filtros digitais é dependente apenas do tamanho da palavra processada, dos intervalos de quantização e da taxa de amostragem;
 - filtros de mais alta ordem são facilmente realizáveis;
 - podem ser facilmente modificados, alterando-se apenas o algoritmo.

Exemplo: Filtros Digitais de Reposta Finita

Produzem uma saída, $y[n]$, que é uma soma ponderada das entradas atuais e passadas, $x[n]$, ou seja:

$$y[n] = b_0x[n] + b_1x[n-1] + b_2x[n-2] + \dots + b_qx[n-q]$$

ou

$$y[n] = \sum_{i=0}^q b_i x[n-i]$$

sendo b_i , $i = 0, \dots, q$ os coeficientes que determinam o tipo do filtro.

Dado o comportamento esperado de um filtro em frequência, $H(\omega)$, pode-se calcular a transformada de Fourier inversa e assim determinar os coeficiente do filtro (b_i).

Exemplo considere um filtro passa-baixas dado por

$$H(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega \leq \omega_c \\ 0 & c.c. \end{cases} \quad (9)$$

pode-se calcular

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) e^{jn\omega} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{jn\omega} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{jn} e^{jn\omega} \right]_{-\omega_c}^{\omega_c} = \frac{\sin(n\omega_c)}{\pi n} \end{aligned} \quad (10)$$

Apesar da implementação do filtro ideal com o uso de todos os coeficientes ser impossível, pode-se truncar a quantidade de coeficientes utilizado e obter uma aproximação do filtro ideal.

Transmissão com Distorção Através de Sistemas Lineares

- Distorções podem ser causadas por características não ideais de magnitude, fase ou ambas.
- Seja o pulso $x(t)$ no intervalo de tempo (a, b) .
- Se $|H(\omega)|$ não é constante o espectro será perturbado e a soma de todas as componentes de frequência pode não ser zero fora do intervalo (a, b) .
- O mesmo raciocínio pode ser empregado para fase não ideal, $\theta_h(\omega) \neq -\omega t_d$. Esse espalhamento é chamado de dispersão.
- Altamente indesejável nos sistemas de multiplexação no tempo como o TDM (*Time Division Multiplexing*) pois provoca “*crosstalk*”.
- Nos sistemas de multiplexação em frequência como o FDM (*Frequency Division Multiplexing*), o sinal é distorcido mas não afeta os canais vizinhos.

Exemplo

Exemplo 4 *Considere a função de transferência de um canal dada por*

$$h(\omega) = \begin{cases} (1 + k \cos T\omega)e^{-j\omega t_d} & |\omega| < 2\pi B \\ 0 & |\omega| > 2\pi B \end{cases}$$

que está representada na Figura 1, e que um pulso $x(t)$ com largura de banda limitada a B Hz é aplicado a entrada desse canal, vamos analisar que sinal é obtido na saída.

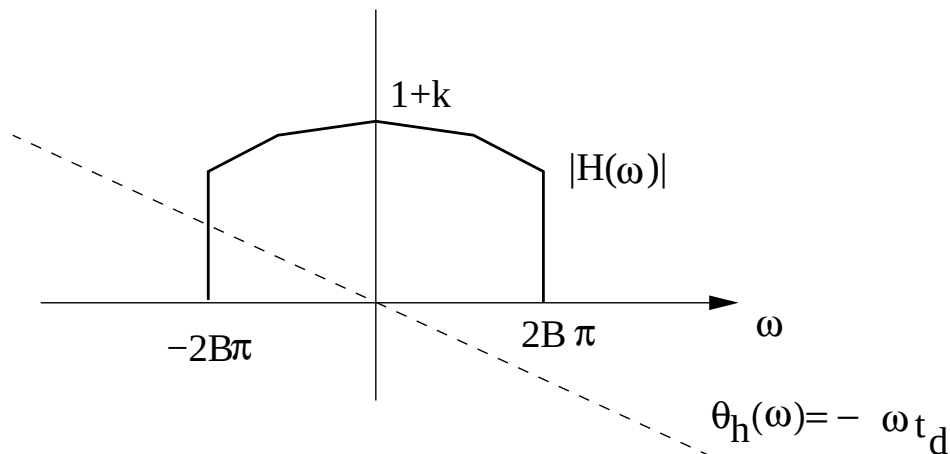


Figura 1:

Equalização

- Em tese pode-se eliminar a distorção linear no receptor pela aplicação de uma função de seja inversa a do canal.
- Esse processo é conhecido como equalização.
- Sendo $H_C(\omega)$ a resposta ao impulso do canal e $H_{eq}(\omega)$ a resposta ao impulso do equalizador se fizermos

$$H_C(\omega)H_{eq}(\omega) = Ke^{-j\omega t_d}$$

sendo K e t_d constantes tem-se o sinal recebido sem distorção.

- Um exemplo simples de equalizador são os filtros transversais

Equalização

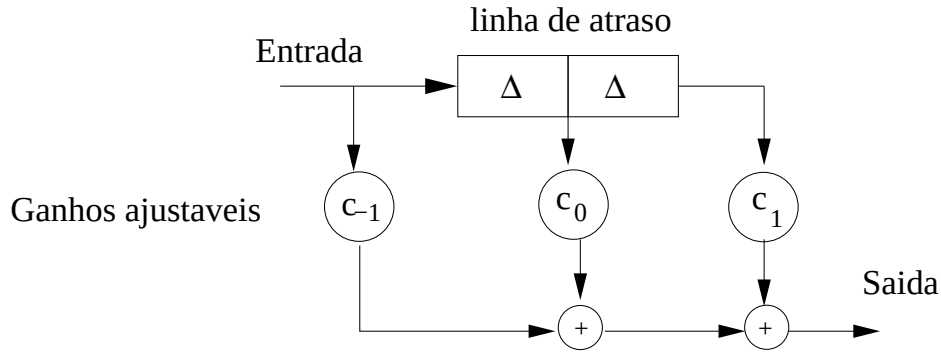


Figura 2:

O sinal de saída será dado por:

$$r(t) = c_{-1}x(t) + c_0x(t - \Delta) + c_1x(t - 2\Delta)$$

e

$$\begin{aligned} H_{eq}(\omega) &= c_{-1} + c_0e^{-j\omega\Delta} + c_1e^{-j\omega2\Delta} \\ &= (c_{-1}e^{j\omega\Delta} + c_0 + c_1e^{-j\omega\Delta})e^{-j\omega\Delta}. \end{aligned} \quad (11)$$

Que pode ser generalizada para um conjunto de $2M + 1$ atrasos por

$$H_{eq}(\omega) = \left(\sum_{m=-M}^{m=M} c_m e^{-j\omega m \Delta} \right) e^{-j\omega M \Delta}$$

a série de Fourier exponencial com período $1/\Delta$.

Exemplo 5 Sendo $x(t)$ a entrada de um sistema linear e $y(t) = k_1x(t - t_1) + k_2x(t - t_2)$ sua saída, obtenha a expressão do equalizador baseado em linhas de atraso para ser colocado na saída do sistema para que se obtenha uma transmissão sem distorção.

Sendo $y(t) = k_1x(t - t_1) + k_2x(t - t_2)$ então

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= k_1X(\omega)e^{-j\omega t_1} + k_2X(\omega)e^{-j\omega t_2} \\ &= (k_1e^{-j\omega t_1} + k_2e^{-j\omega t_2})X(\omega) \end{aligned}$$

de onde pode-se obter

$$H(\omega) = k_1e^{-j\omega t_1} + k_2e^{-j\omega t_2} = k_1e^{-j\omega t_1}(1 + ke^{-j\omega t_0})$$

sendo $k = k_2/k_1$ e $t_0 = t_2 - t_1$.

Para obter uma transmissão sem distorção deve-se ter

$$H_{eq}(\omega) = \frac{1}{1 + ke^{-j\omega t_0}}$$

que pode ser escrito como

$$H_{eq}(\omega) = 1 - ke^{-j\omega t_0} + k^2e^{-j\omega 2t_0}$$

considerando $k^2 \ll 1$ e truncando a soma tem-se

$$H_{eq}(\omega) \approx (e^{j\omega t_0} + k + k^2e^{-j\omega t_0})e^{-j\omega t_0}$$

de onde se obtém: $c_{-1} = 1$, $c_0 = k$, $c_1 = k^2$ e $\Delta = t_0$

Canais não lineares

- Seja $y(t) = f(x(t))$, sendo $f()$ uma função não linear. Usando a série de McLaurin:

$$r = a_0 + a_1x(t) + a_2x(t)^2 + \dots + a_kx(t)^k + \dots$$

lembrando que

$$x^k(t) \leftrightarrow \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{k-1} X(\omega) * X(\omega) \dots * X(\omega)$$

donde

$$Y(\omega) = 2\pi a_0 \delta(\omega) + \sum_k \frac{a_k}{(2\pi)^{k-1}} X(\omega) * X(\omega) \dots * X(\omega)$$

- $(k - 1)$ autoconvoluções vai aumentar a largura de faixa por um fator k .
- O sinal de saída terá componentes de frequência que não existiam no sinal original.

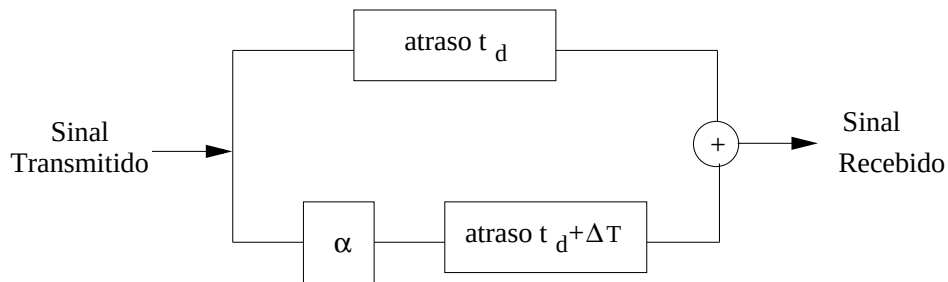
Exemplo 6 *Um sinal $m(t)\cos\omega_c(t)$ é transmitido através um canal com a seguinte característica*

$$y = a_1x(t) + a_2x^2(t) + a_3x^3(t)$$

sendo $x(t)$ a entrada e $y(t)$ a saída. Detemine o sinal recebido, desenhe o espectro e comente o resultado obtido.

Distorção causada pelo efeito do multipercurso

- Multipercurso: um sinal transmitido chega no receptor por diferentes percursos com atrasos diferentes.
- Sejam dois percursos, um com ganho 1 e atraso t_d e outro com ganho α e atraso $t_d + \Delta t$



As funções de transferência para cada caminho são respectivamente

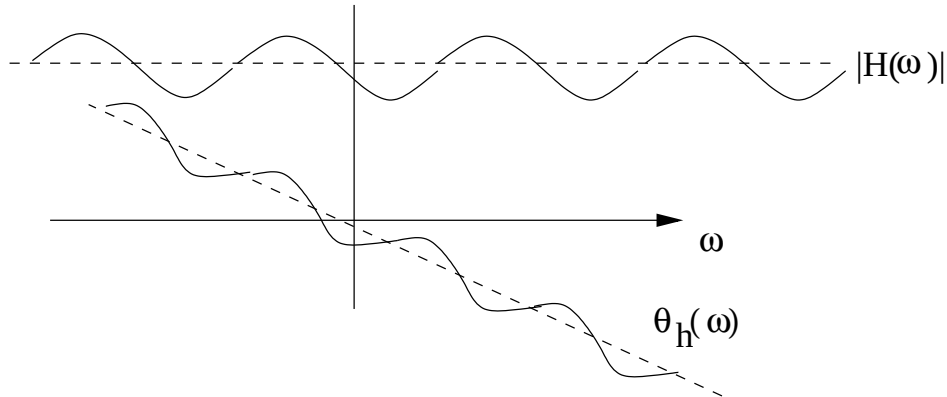
$$H_1(\omega) = e^{-j\omega t_d} \text{ e } H_2(\omega) = \alpha e^{-j\omega(t_d + \Delta t)},$$

donde se obtém

$$\begin{aligned} H(\omega) &= H_1(\omega) + H_2(\omega) \\ &= e^{-j\omega t_d} + \alpha e^{-j\omega(t_d + \Delta t)} \\ &= e^{-j\omega t_d} (1 + \alpha e^{-j\omega \Delta t}) \\ &= e^{-j\omega t_d} (1 + \alpha \cos \omega \Delta t - j \sin \omega \Delta t) \quad (12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|H(\omega)| &= \sqrt{(1 + \alpha \cos \omega \Delta t)^2 + \alpha^2 \sin^2 \omega \Delta t} \\
&= \sqrt{1 + 2\alpha \cos \omega \Delta t + \alpha^2 \cos^2 \omega \Delta t + \alpha^2 \sin^2 \omega \Delta t} \\
&= \sqrt{1 + \alpha^2 + 2\alpha \cos \omega \Delta t}
\end{aligned} \tag{13}$$

$$\theta_h(\omega) = -(\omega t_d + \tan^{-1} \frac{\alpha \sin \omega \Delta t}{1 + \alpha \cos \omega \Delta t}) \tag{14}$$



- Multipercurso pode ser combatido com equalizadores.
- A função de transferência do canal varia de forma aleatória, este fenômeno é conhecido como desvanecimento (em inglês *fading*).

Modulação

- Banda básica: faixa de frequências de um sinal que é produzida por uma fonte ou um transdutor. Exemplo: 20kHz para a voz (maior parte da energia está entre 0 e 3,4kHz).
- Sinal banda básica é mais difíceis de transmitir e não fazem uso eficiente do espectro de frequências disponível.
- Modulação: deslocamento das componentes de frequências de um sinal para outra faixa de frequências.
 - portadora: normalmente é uma onda senoidal com uma determinada frequência ω_c que tem alguma de suas características (amplitude, frequência, fase ou um combinação deles) de acordo com o sinal em banda básica.

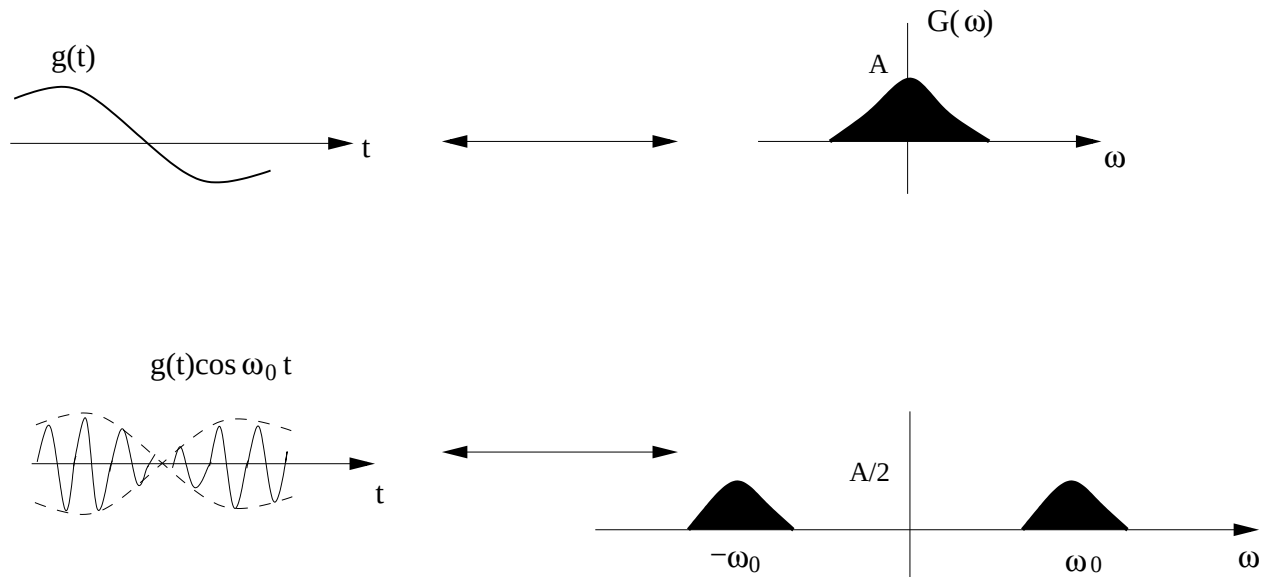
Modulação em Amplitude com Banda Lateral Dupla

- Sejam $s(t) = A_c \cos(\omega_c t + \theta_c)$ e $m(t)$ um sinal mensagem em banda básica.
- Fazendo ω_c e θ_c são constantes e A_c diretamente proporcional a $m(t)$ temos a modulação em amplitude.
- A portadora modulada será

$$m(t) \cos(\omega_c t) \quad (15)$$

- Pelas propriedades da transformada de Fourier:

$$\begin{aligned} \text{Se } m(t) &\leftrightarrow M(\omega) \\ m(t) \cos(\omega_c t) &\leftrightarrow \frac{1}{2}[M(\omega + \omega_c) + M(\omega - \omega_c)] \end{aligned}$$



Se $m(t)$ é limitado em BHz , o sinal modulado ocupa $2BHz$ e é composto de duas partes:

- Banda lateral superior (USB ou BLS) e
- Banda lateral inferior (LSB ou BLI),

Por esse motivo, esse esquema é dito ser uma Modulação em Amplitude com Banda Lateral Dupla e com Portadora Suprimida, DSB-SC (*double-sideband-supressed-carrier*).

Modulação em Amplitude com Banda Lateral Dupla

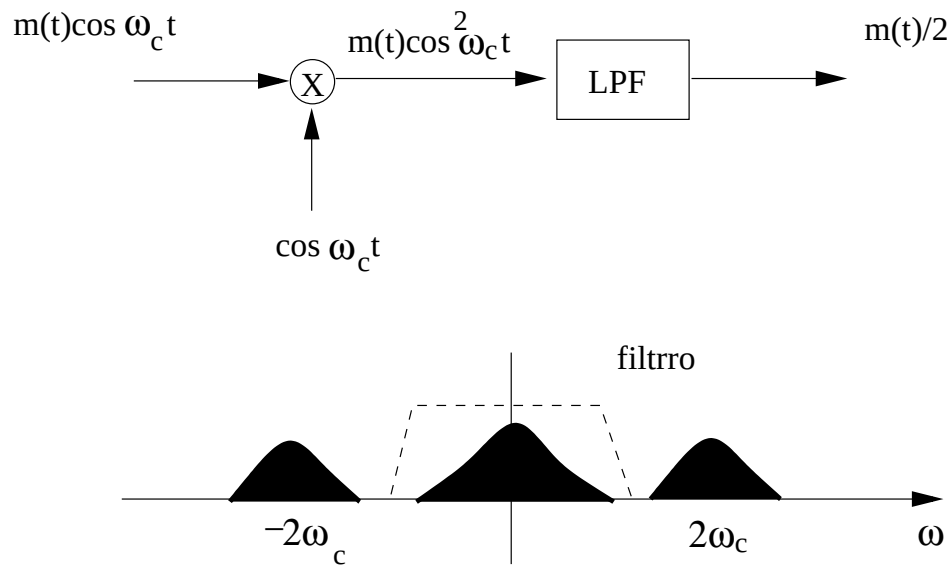
- Para recuperar o sinal $m(t)$ a partir do sinal modulado precisamos reconduzir o espectro de $m(t)$ para a sua posição original, esse processo é chamado de **demodulação** e é realizado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} m(t) \cos \omega_c t \cos \omega_c t &= m(t) \cos^2 \omega_c t \\ &= \frac{1}{2} [m(t) + m(t) \cos 2\omega_c t] \end{aligned}$$

- Em frequência

$$\frac{1}{2} M(\omega) + \frac{1}{4} [M(\omega - 2\omega_c) + M(\omega + 2\omega_c)]$$

- Em seguida utiliza-se um filtro passa-baixas, obtendo $\frac{1}{2} M(\omega)$



- Detecção síncrona ou detecção coerente: usa-se uma portadora local com a mesma frequência (fase) da que foi usada pelo transmissor para demodulação.
- No receptor é preciso gerar uma portadora em perfeito sincronismo com a que foi usada pelo transmissor.
- $\omega_c \geq 2\pi B$ para evitar a sobreposição de $M(\omega + \omega_c)$ e $M(\omega - \omega_c)$, pois se $\omega_c < 2\pi B$ a demodulação é impossível.
- Na prática $\frac{\omega_c}{2\pi B} \gg 1$.

Modulação AM com portadora

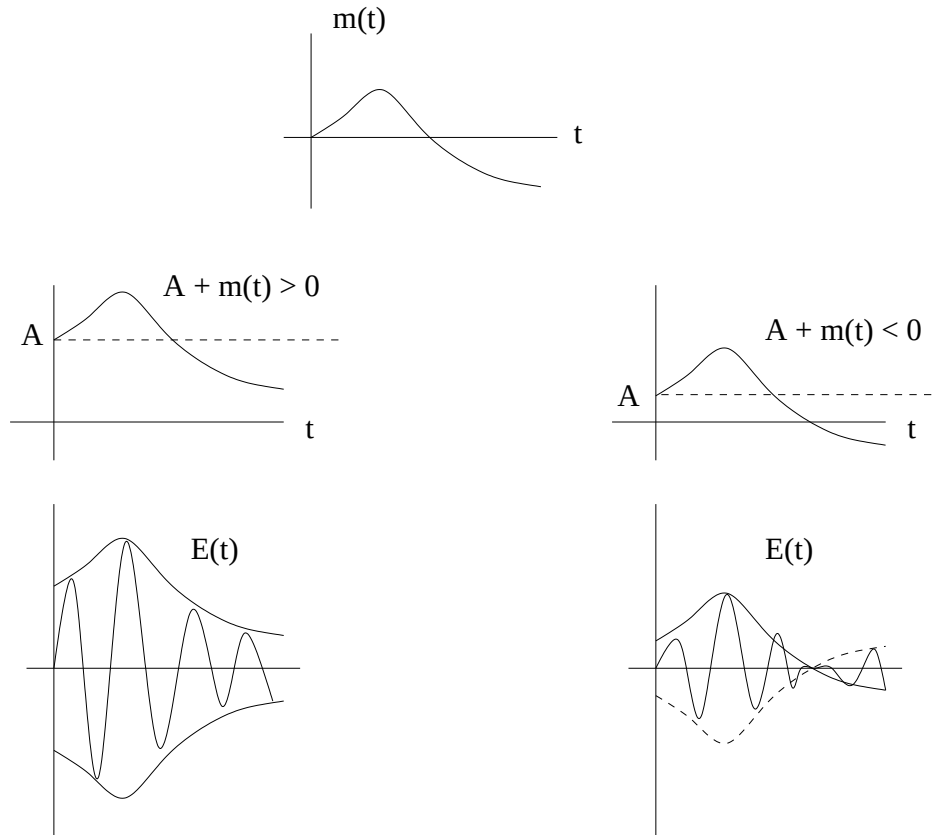
- Na demodulação de sinais AM-DSB-SC a portadora $\cos(\omega_c t + \phi)$ deve ser gerada no receptor.
- Isso se justifica em comunicações ponto-a-ponto: o custo de implementação do receptor pode ser mais alto do que em comunicações multiponto.
- Nesse último caso, os receptores devem ser simples e portanto deve-se procurar uma forma de evitar a geração da portadora localmente.
- Pode-se enviar a portadora junto com o sinal transmitido, nesse caso tem-se a modulação AM-DSB, cujo sinal a ser enviado é dado por

$$\begin{aligned}\psi_{AM}(t) &= A \cos \omega_c t + m(t) \cos \omega_c t \\ &= [A + m(t)] \cos \omega_c t.\end{aligned}$$

- O espectro de $\psi_{AM}(t)$ é:

$$\frac{1}{2}[M(\omega + \omega_c) + M(\omega - \omega_c)] + \pi A[\delta(\omega + \omega_c) + \delta(\omega - \omega_c)]$$

- Na Figura abaixo o sinal $E(t) = A + m(t)$ é chamado de envelope (ou envoltória) dos sinal $E(t) \cos \omega_c t$, podemos notar que se $A + m(t) > 0$ para todo t podemos recuperar $m(t)$ a partir de ϕ_{AM} pela detecção do sua envoltória.



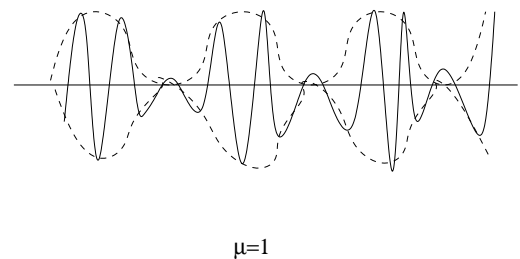
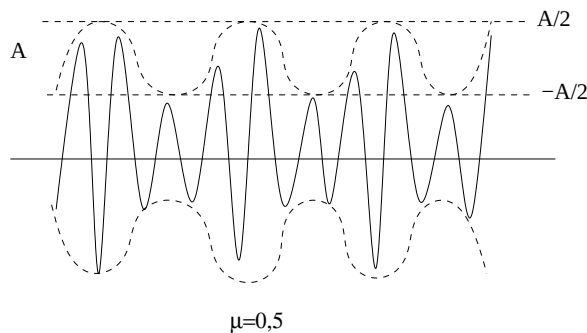
- A condição para detecção é então $A + m(t) > 0$ para todo t ou $A \geq -m(t)_{min}$.
- Define-se o índice de modulação como

$$\mu = \frac{-m(t)_{min}}{A}.$$

Donde tem-se as seguintes situações

- $\mu \leq 1$ - submodulação, é condição necessária para demodularmos por detecção de envoltória;
- $\mu > 1$ - sobremodulação, a detecção de envoltória não mais funciona e precisamos usar demodulação síncrona.

- **Exemplo 7** *Desenhe $s_{AM}(t)$ para índices de modulação $\mu = 0,5$ e $\mu = 1$ quando $m(t) = B \cos \omega_m t$.*



Potência da Portadora e da Banda Lateral

- Na modulação AM a portadora não transporta informação.
- A potência usada no envio dessa parte do sinal AM inútil, em termos de informação.
- Eficiência: relação entre a potência utilizada para transportar a mensagem (útil em termos de envio de informações) e a potência total:

$$s_{AM}(t) = A \cos \omega_c t + m(t) \cos \omega_c t$$

a potência da portadora ($A \cos \omega_c t$) será dada por

$$P_c = \frac{A^2}{2}$$

e a potência das bandas laterais ($m(t) \cos \omega_c t$) será

$$P_{BL} = \frac{1}{2} \overline{m^2(t)}.$$

sendo $\overline{m^2(t)}$ o valor médio quadrático de $m(t)$,

logo a potência total do sinal AM é dada por

$$P_t = P_c + P_{BL} = \frac{1}{2} \left[A^2 + \overline{m^2(t)} \right].$$

e a eficiência será

$$\eta = \frac{P_{BL}}{P_t} \times 100\% = \frac{\overline{m^2(t)}}{A^2 + \overline{m^2(t)}} \times 100\%.$$

- Quando $m(t) = B \cos \omega_m(t)$ (modulação em tom) e fazendo $b = \mu A$, tem-se

$$m(t) = \mu A \cos \omega_m(t) \quad e \quad \overline{m^2(t)} = \frac{\mu^2 A^2}{2} = \frac{(\mu A)^2}{2}$$

logo

$$\eta = \frac{(\mu A)^2/2}{A^2 + (\mu A)^2/2} \times 100\% = \frac{\mu^2}{2 + \mu^2} \times 100\%.$$

- Na modulação em tom, η_{MAX} ocorre quando $\mu = 1$, e nesse caso tem-se

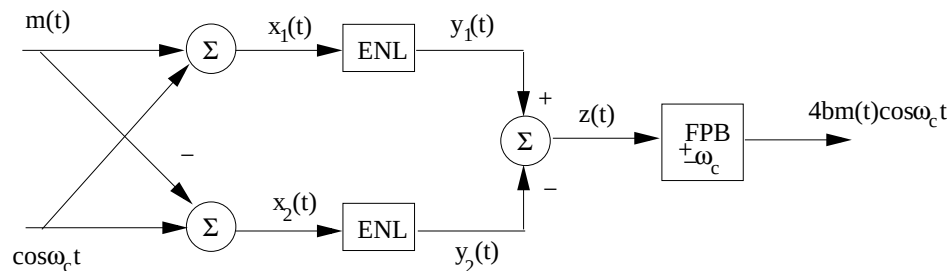
$$\eta_{MAX} = \frac{1}{3} \times 100\% \approx 33\%$$

Isto significa que nas melhores condições, quando ainda é possível usar demodulação coerente, apenas 1/3 da potência é usada para transportar informação.

- Sinais de voz: apenas 25%.

Geração de Sinais AM

- Forma direta: multiplicar $m(t)$ por $\cos \omega_c t$.
- Essa operação deve ser feita por multiplicadores analógicos que por sua vez devem ser mantidos na região linear, o que nem sempre é possível ou só pode ser reduzido a um custo muito alto.
- Pode-se usar moduladores não lineares, que podem ser obtidos usando componentes não lineares como diodos e transistores.
- Ex.: Na figura abaixo tem-se um esquema de modulação AM que usa dois elementos não lineares (ENL).



Tem-se que

$$y(t) = ax(t) + bx^2(t)$$

sendo $x(t)$ e $y(t)$ a entrada e saída respectivamente do elemento não linear. A saída $z(t)$ será dada por

$$z(t) = y_1(t) - y_2(t) = [ax_1(t) + bx_1^2(t)] - [ax_2(t) + bx_2^2(t)]$$

substituindo $x_1(t) = \cos \omega_c(t) + m(t)$ e $x_2(t) = \cos \omega_c t - m(t)$ tem-se

$$z(t) = 2am(t) + 4bm(t) \cos \omega_c t$$

o espectro de $m(t)$ é centrado na origem e o de $m(t) \cos \omega_c t$ é centrado em $\pm \omega_c$, logo quando $z(t)$ passa por um filtro passa-faixas centrado em ω_c obtém-se o sinal AM-DSB-SC $4bm(t) \cos \omega_c t$.

Nos moduladores chaveados faz-se a multiplicação de $m(t)$ por um sinal periódico qualquer que tenha frequência fundamental ω_c .

Um sinal periódico com frequência fundamental ω_c tem série trigonométrica de Fourier dada por

$$\phi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos(n\omega_c t + \theta_n)$$

e portanto tem-se

$$m(t)\phi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n m(t) \cos(n\omega_c t + \theta_n)$$

O espectro de frequências da $m(t)\phi(t)$ é o espectro $M(\omega)$ deslocado em $\pm\omega_c, \pm2\omega_c, \dots, \pm n\omega_c$. Se esse sinal é passado por um filtro passa-faixas de largura $2BHz$ centrado em ω_c então obtém-se o sinal DSB-SC $c_1 m(t) \cos(\omega_c t)$.

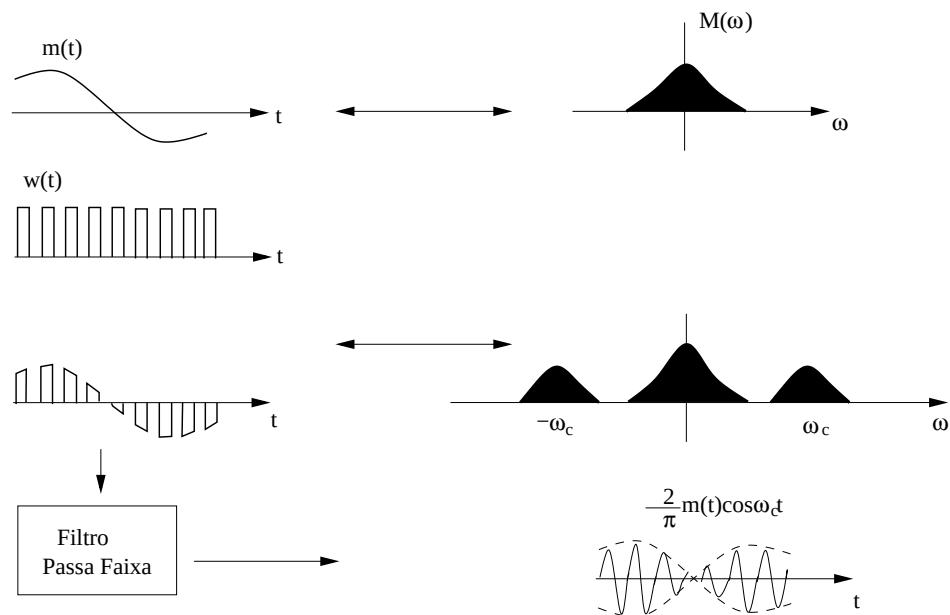
Como exemplo, seja um trem de pulsos quadrados

$$w(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left(\cos \omega_c t - \frac{1}{3} \cos 3\omega_c t + \frac{1}{5} \cos 5\omega_c t - \dots \right)$$

multiplicando $m(t)$ por $w(t)$ tem-se

$$m(t)w(t) = \frac{m(t)}{2} + \frac{2}{\pi} \left(m(t) \cos \omega_c t - \frac{m(t)}{3} \cos 3\omega_c t + \frac{m(t)}{5} \cos 5\omega_c t - \dots \right)$$

que consiste em um número infinito de sinais modulados nas frequências $\omega_c, 3\omega_c, 5\omega_c, \dots$. Mais uma vez, usando um filtro passa faixas centrado em ω_c recupera-se o sinal DSB-SC $\frac{2}{\pi} m(t) \cos \omega_c t$.

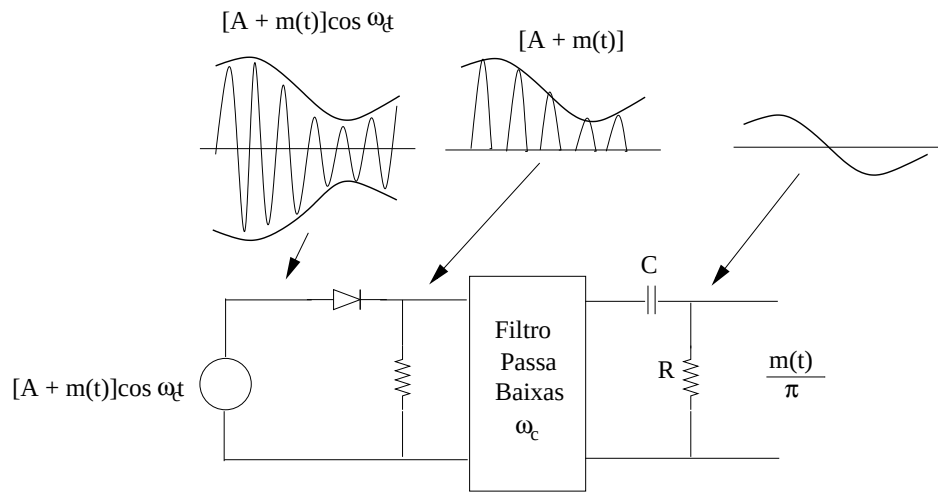


Uma particularidade interessante desse tipo de modulador é que a operação $m(t)w(t)$ consiste em chavear $m(t)$ segundo o sinal $w(t)$ depois passar o resultado por um filtro passa-faixas

Demodulação de Sinais AM-DSB

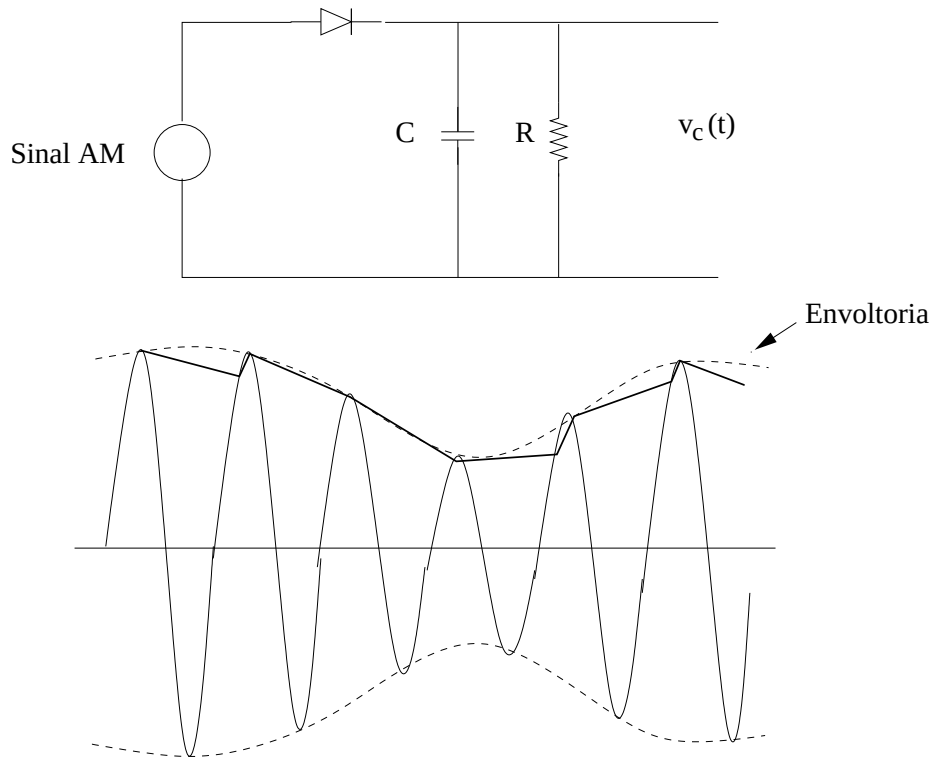
Aplicando um sinal AM-DSB a um circuito com um diodo e um resistor, a parte negativa do sinal AM é suprimida e a saída no resistor será uma versão de meia onda retificada do sinal AM, que consiste essencialmente em multiplicar o sinal de entrada por $w(t)$, ou seja

$$\begin{aligned}v_R &= \{[a + m(t)] \cos \omega_c t\} w(t) \\&= \{[a + m(t)] \cos \omega_c t\} \left[\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} (\cos \omega_c t \right. \\&\quad \left. - \frac{1}{3} \cos 3\omega_c t + \frac{1}{5} \cos 5\omega_c t - \dots) \right] \\&= \frac{1}{\pi} [A + m(t)] + \textit{termos em frequencias altas}\end{aligned}\tag{16}$$

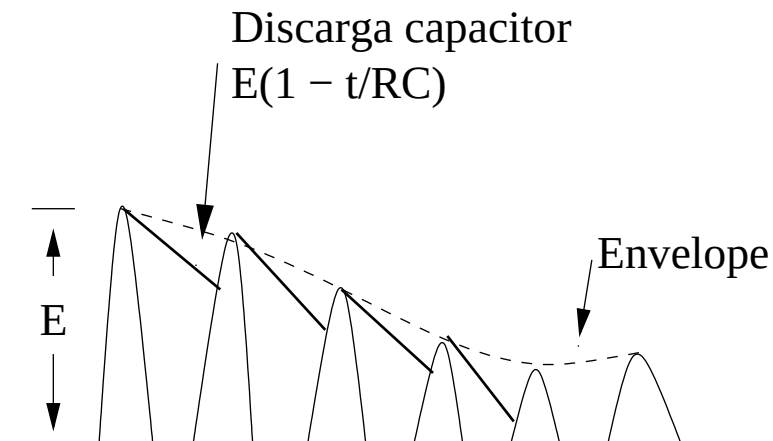


Quando v_R é aplicado a um filtro passa-baixas com frequência de corte em BHz , a saída será $[A + m(t)]/\pi$. O termo DC A/π pode ser removido por um capacitor produzindo o sinal $m(t)/\pi$.

Detector de Envoltória: A saída do detector segue o envelope do sinal modulado. No ciclo positivo do sinal AM o diodo conduz e carrega o capacitor com o valor mínimo do sinal de entrada, no ciclo negativo o diodo para de conduzir e o capacitor descarrega através do resistor R , o processo se repete e a saída $v_c(t)$ acompanhará o envelope da entrada a menos de uma ondulação.



Como RC é a constante de tempo que reje o decaimento do sinal durante o ciclo de entrada negativo, quanto maior esse valor menor será o decaimento.



Qual o valor ideal para a constante de tempo RC ?

$$v_c = Ee^{-t/RC}, \text{ aproximado por } v_c = E \left(1 - \frac{t}{RC} \right)$$

e o decaimento de descarga será $-E/RC$. Para que o capacitor siga $E(t)$, o valor da queda determinado por RC deve ser muito maior que o decaimento do envelope $E(t)$, ou seja

$$\left| \frac{dv_c}{dt} \right| = \frac{E}{RC} \geq \left| \frac{dE}{dt} \right| \quad (17)$$

No caso da modulação em tom ($m(t) \cos \omega_m t$) tem-se

$$E(t) = A[1 + \mu \cos \omega_m t], \quad \frac{dE}{dt} = -\mu A \omega_m \sin \omega_m t, \quad e$$

$$\frac{A(1 + \mu \cos \omega_m t)}{RC} \geq \mu A \omega_m \sin \omega_m t, \quad \text{ou}$$

$$RC \leq \frac{1 + \mu \cos \omega_m t}{\mu \omega_m \sin \omega_m t}$$

O pior caso ocorre quando o lado direito da equação acima se torna o mínimo, e isto é atingido quando $\cos \omega_m t = -\mu$ e neste caso obtém-se

$$RC \leq \frac{1}{\omega_m} \left(\frac{\sqrt{1 - \mu^2}}{\mu} \right) \quad (18)$$

Banda Lateral Única

- Sinais AM-DSB transmitem tanto a Banda Lateral Inferior (BLI) quanto a Banda Lateral Superior (BLS).
- Cada uma dessas bandas contém a informação completa sobre a mensagem.
- Pode-se recuperar o sinal original usando somente uma dessas bandas.
- Nesse caso tem-se a modulação (SSB, do inglês *Single Side Band*)
- Os sinais SSB podem ser demodulados coerentemente

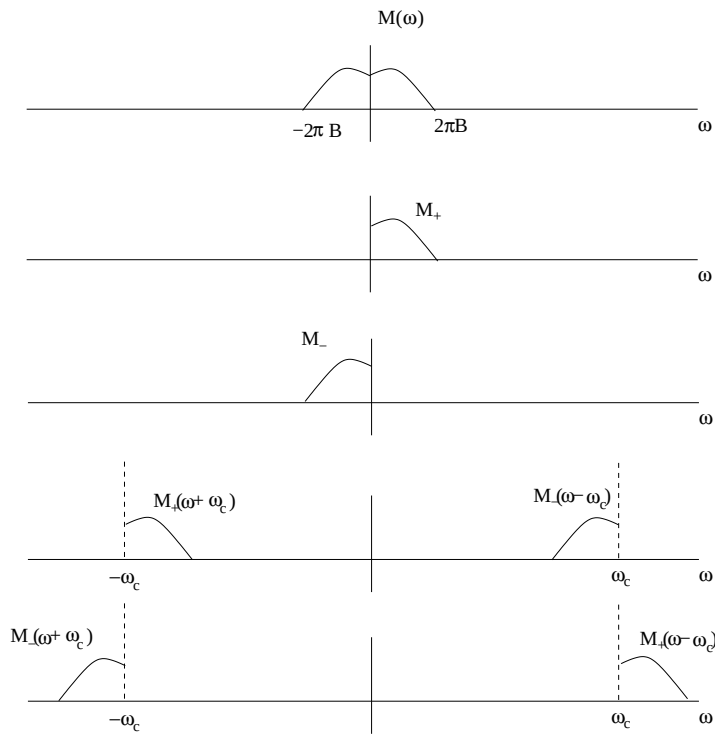
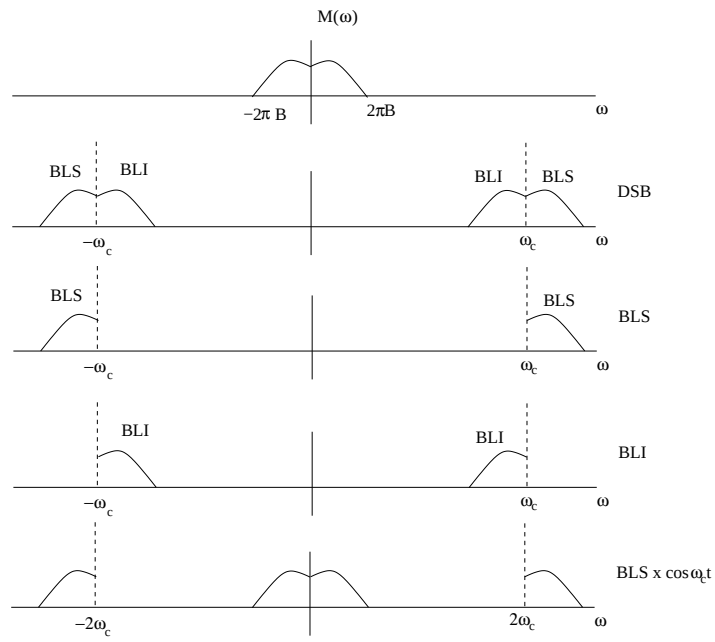


Figura 3: Pré-envoltória de um sinal.

Observe e Figura 3, então $M_+(\omega) = M(\omega)u(\omega)$ e $M_-(\omega) = M(\omega)u(-\omega)$ sendo $u(t)$ a função degrau:

$$m_+(t) \leftrightarrow M_+(\omega)$$

e

$$m_-(t) \leftrightarrow M_-(\omega)$$

e $m_+(t)$ é definida como a pré-envoltória de $m(t)$.

Os módulos $|M_+(\omega)|$ e $|M_-(\omega)|$ não são funções pares, logo $m_+(t)$ e $m_-(t)$ são funções complexas.

Como $M_+(\omega)$ e $M_-(\omega)$ são conjugadas, então $m_+(t)$ e $m_-(t)$ também o são, e como $m(t) = m_+(t) + m_-(t)$ temos:

$$m_+(t) = \frac{1}{2}[m(t) + jm_h(t)]$$

e

$$m_-(t) = \frac{1}{2}[m(t) - jm_h(t)] \quad (19)$$

precisamos determinar $m_h(t)$. Como temos que

$$M_+(\omega) = M(\omega)u(\omega) = \frac{1}{2}M(\omega)[1 + \text{sgn}(\omega)]$$

$$M_+(\omega) = \frac{1}{2}M(\omega) + \frac{1}{2}M(\omega)\text{sgn}(\omega)$$

assim,

$$\begin{aligned}m(t) &\leftrightarrow M(\omega) \\ m_+(\omega) &\leftrightarrow M_+(\omega)\end{aligned}$$

e

$$m_+(t) = \frac{1}{2}m(t) + j\frac{1}{2}m_h(t) \leftrightarrow \frac{1}{2}M(\omega) + \frac{1}{2}M(\omega)\text{sgn}(\omega)$$

em consequência

$$\frac{1}{2}jm_h(t) \leftrightarrow \frac{1}{2}M(\omega)\text{sgn}(\omega)$$

ou

$$jm_h(t) \leftrightarrow M(\omega)\text{sgn}(\omega)$$

e multiplicando por $-j$ tem-se

$$m_h(t) \leftrightarrow -jM(\omega)\text{sgn}(\omega) = M_h(\omega) \quad (20)$$

temos que

$$\frac{j}{\pi t} \leftrightarrow \text{sgn}(\omega)$$

e lembrando que

$$g_1(t) * g_2(t) \leftrightarrow G_1(\omega)G_2(\omega),$$

então

$$\begin{aligned}m_h(t) &= -jm(t) * \frac{1}{\pi t} = m(t) * \frac{1}{\pi t} \\&= \int_{-\infty}^{\infty} m(\alpha) \frac{1}{\pi(t - \alpha)} d\alpha \\m_h(t) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{m(\alpha)}{t - \alpha} d\alpha\end{aligned}\tag{21}$$

$m_h(t)$ é chamada de **Transformada de Hilbert** de $m(t)$.

Temos que $M_h(\omega) = -j \operatorname{sgn}(\omega) M(\omega) = H(\omega) M(\omega)$, ou seja se passarmos $m(t)$ por um sistema com função de transferência $H(\omega) = -j \operatorname{sgn}(\omega)$ obtemos na saída $m_h(t)$.

$$H(\omega) = -j \operatorname{sgn}(\omega) \begin{cases} -j = e^{-j\pi/2} & \omega > 0 \\ j = e^{j\pi/2} & \omega < 0 \end{cases}\tag{22}$$

Segue que $|H(\omega)| = 1$ e

$$\Theta_h(\omega) = \begin{cases} -\pi/2 & \omega > 0 \\ \pi/2 & \omega < 0 \end{cases}\tag{23}$$

Se atrasarmos todas as componentes de $m(t)$ por $\pi/2$

obtemos $m_h(t)$.

Podemos agora expressar um sinal SSB como

$$\Phi_{BLS}(\omega) = M_+(\omega - \omega_c) + M_-(\omega + \omega_c)$$

que no domínio do tempo torna-se

$$\begin{aligned}\phi_{BLS}(t) &= m_+(t)e^{j\omega_c t} + m_-(t)e^{-j\omega_c t} \\ &= \frac{1}{2}[m(t) + jm_h(t)]e^{j\omega t} \\ &\quad + \frac{1}{2}[m(t) - jm_h(t)]e^{j\omega_c t} \\ &= m(t)\frac{1}{2}(e^{j\omega_c t} + e^{-j\omega_c t}) \\ &\quad + m_h(t)\frac{j}{2}(e^{j\omega_c t} - e^{-j\omega_c t}) \quad (24)\end{aligned}$$

$$= m(t)\cos\omega_c t - m_h(t)\sin\omega_c t \quad (25)$$

Seguindo o mesmo procedimento acima obtém-se

ϕ_{BLI} como

$$\phi_{BLI}(t) = m(t)\cos\omega_c t + m_h(t)\sin\omega_c t. \quad (26)$$

Exemplo 8 *Seja $m(t)\cos\omega_m t$ (modulação em tom), determine o sinal $\phi_{BLS}(t)$.*

Geração de Sinais SSB

Dois métodos geralmente são usados:

1. filtros “afiados” pra eliminar a banda lateral indesejada, ou
2. deslocamento em frequência para obter o mesmo resultado.

O primeiro caso é o método mais comum, nele o sinal DSB-SC passa por um filtro “afiado” de modo a suprimir a banda lateral indesejada.

Para obter o sinal BLS, o filtro deve cortar todas as componentes abaixo de ω_c e deixar passar as que estão acima.

O problema é que tal filtro é irrealizável, portanto deve haver alguma separação entre a faixa de passagem do sinal e onde deve ser cortado, como está ilustrado na Figura 4.

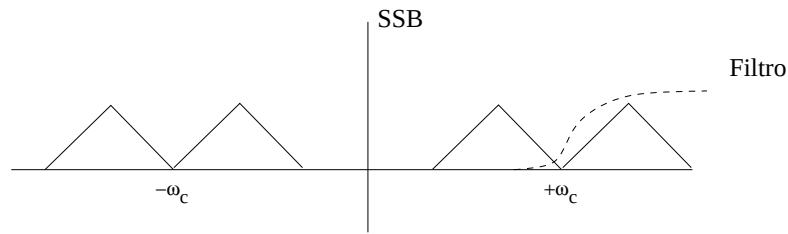


Figura 4: Filtragem para obter sinais SSB.

Para que se obtenha um corte considerado bom, a banda lateral indesejada deve ser atenuada em até 40 dB.

Porém se a frequência da portadora é muito alta (p.ex. 10MHz) um intervalo de 660Hz é muito pequeno e pode constituir num problema. A solução é realizar a modulação em mais de um passo, da seguinte forma:

1. Gerar um sinal DSB-SC com portadora de baixa frequência de modo que seja a filtragem seja fácil, como esté representado na Figura 5.
2. O sinal resultante é então modulado para uma frequência alta ω_{c_2} e então novamente filtrado, pois o intervalo agora é $2\omega - c$, conforme está ilustrado na Figura 6.

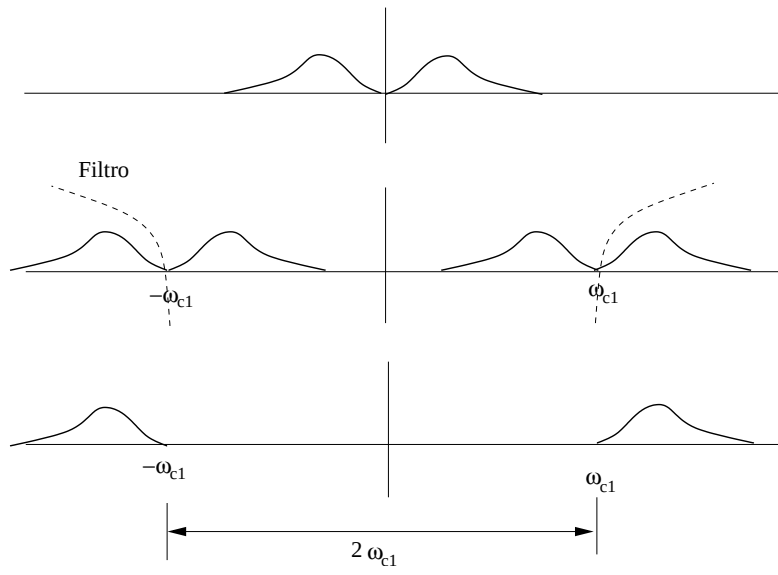


Figura 5: Primeiro passo para gerar o sinal SSB.

Se a portadora f_c for muito alta o processo acima pode ser repetido.

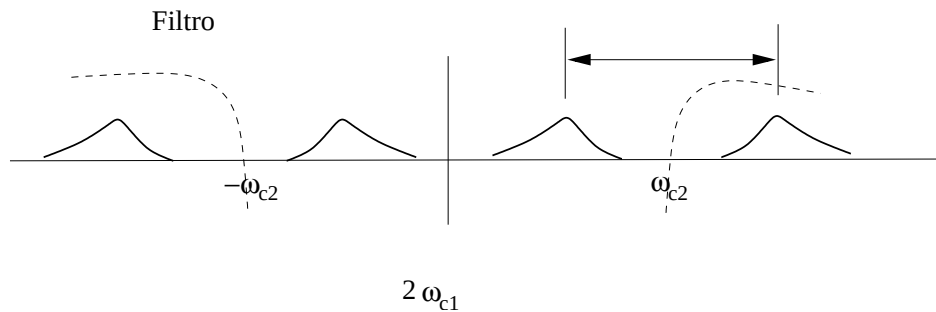


Figura 6: Segundo passo para gerar o sinal SSB.

Deslocamento de Fase

A equação

$$\phi_{SSB}(t) = m(t) \cos \omega_c t \mp m_h(t) \sin \omega_c t$$

é a base para esse método. Esquemáticamente representado na Figura 7.

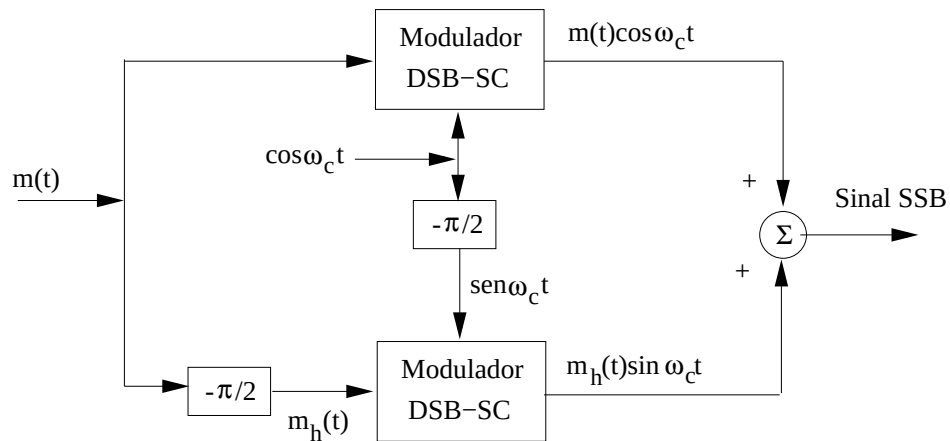


Figura 7:

Os blocos $-\pi/2$ deslocam a fase de $\pi/2$, ou seja, realizam a transformada de Hilbert do sinal de entrada. Vale salientar que deslocadores de fase ideais não são realizáveis e, na prática, são muito difíceis de implementar.

Demodulação de Sinais SSB-SC

Os sinais SSB-SC podem ser coerentemente detectados, vejamos

$$\phi_{SSB}(t) = m(t) \cos \omega_c t \mp m_h(t) \sin \omega_c t$$

multiplicando por $\cos \omega_c t$ temos

$$\begin{aligned} \phi_{SSB}(t) \cos \omega_c t &= \frac{1}{2} m(t) [1 + \cos(2\omega_c t)] \\ &\mp \frac{1}{2} m_h(t) \sin 2\omega_c t \\ &= \frac{1}{2} m(t) + \frac{1}{2} [m(t) \cos 2\omega_c t \\ &\mp m_h(t) \sin 2\omega_c t] \end{aligned} \quad (27)$$

o segundo termo da soma acima é suprimido pelo filtro passa baixas, sobrando apenas a mensagem $m(t)$. Portanto, o demodulador é idêntico ao que já vimos para os sinais DSB-SC.

Sinais SSB com portadora

Tal sinal pode ser expresso como:

$$\begin{aligned} \phi(t) &= A \cos \omega_c t + \phi_{SSB}(t) \\ \phi(t) &= A \cos \omega_c t + [m(t) \cos \omega_c t \pm m_h(t) \sin \omega_c t] \end{aligned}$$

Este sinal pode ser recuperado por detecção de

envoltória, desde que $A \gg |m(t)|$, vejamos:

$$\begin{aligned}\phi(t) &= [A + m(t)] \cos \omega_c t + m_h(t) \sin \omega_c t \\ &= E(t) \cos \omega_c(t + \theta)\end{aligned}\quad (28)$$

sendo

$$\begin{aligned}E(t) &= \{[A + m(t)]^2 + m_h^2(t)\}^{1/2} \\ &= [A^2 + 2Am(t) + m^2(t) + m_h^2(t)]^{1/2} \\ &= \{A^2[1 + \frac{2m(t)}{A} + \frac{m^2(t)}{A^2} + \frac{m_h^2(t)}{A^2}]\}^{1/2} \\ &= A[1 + \frac{2m(t)}{A} + \frac{m^2(t)}{A^2} + \frac{m_h^2(t)}{A^2}]^{1/2}\end{aligned}\quad (29)$$

Se $A \gg |m(t)|$ em geral $A \gg |m_h(t)|$, assim os termos

$$\frac{m^2(t)}{A} \text{ e } \frac{m_h^2(t)}{A^2}$$

são ignorados e

$$E(t) = A \left[1 + \frac{2m(t)}{A} \right]^{1/2}$$

temos que $(1 + x)^n \approx 1 + nx$ quando $|x| \ll 1$ e como $A \gg m(t)$ tem-se que $m(t)/A \ll 1$ donde

$$E(t) \approx A \left[1 + \frac{1}{2} \frac{2m(t)}{A} \right] = A + m(t)$$

A condição para detecção por envoltória de sinais AM é que $A \geq -m_{min}(t)$, para sinais SSB com portadora é que $A \gg m(t)$ e isto implica dizer que em termos de potência os sinais SSB com portadora são menos eficientes que os sinais AM.

Modulação em Amplitude em Quadratura (QAM)

O sinais DSB tem largura de faixa duas vezes maiores que sinais SSB. Isto pode ser superado se em vez de enviarmos um sinal DSB, enviarmos dois sinais DSB com a mesma frequência mas usando portadoras em quadratura de fase.

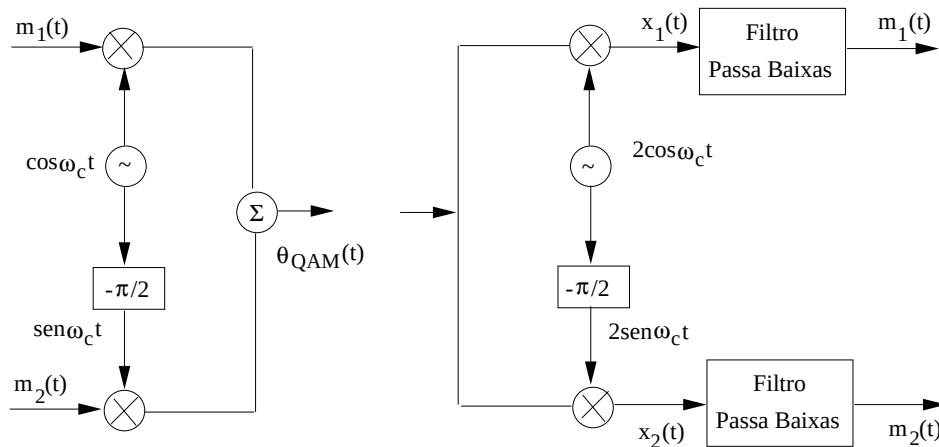


Figura 8: Multiplexação em quadratura de amplitude.

Ambos os sinais modulados ocupam a mesma faixa e

os dois sinais podem ser separados no receptor por detecção síncrona, usando portadoras locais em quadratura.

Vejamos:

$$\begin{aligned}x_1(t) &= x(t)2 \cos \omega_c t \\&= [m_1(t) \cos \omega_c t + m_2(t) \sin \omega_c(t)]2 \cos \omega_c t \\&= m_1(t) + m_1(t) \cos 2\omega_c t + m_2(t) \cos \omega_c t(30)\end{aligned}$$

o segundo termo após a igualdade na equação acima é eliminado pelo filtro passa baixas.

De forma similar podemos analisar o outro canal.

Este esquema é chamado de **modulação em amplitude em quadratura** QAM (do inglês em Quadrature Amplitude Modulation) ou multiplexação em quadratura.

QAM tem problemas, erro de fase entre as portadora no demodulador causa a perda do sinal e também interferência entre os dois canais. Da mesma forma se as frequências são diferentes.

Já SSB em dois canais adjacentes, um erro de fase nas portadoras causa distorção em cada canal mas não interferência.

Multiplexação em quadratura é usada em televisão em cores para multiplexar os sinais de crominância. QAM é usado também em transmissão digital. Vamos ver uma aplicação sobre linhas telefônicas.

Sabemos que para transmitir pulsos em banda básica a uma taxa de 2400bits/s precisamos um mínimo de 1200Hz de banda. Na prática a largura de banda necessária é definida (usando o primeiro critério de Nyquist) como

$$(1 + r)1200 \quad \text{sendo } 0 \leq r \leq 1$$

o parâmetro r é chamado de “roll-off” e determina a porcentagem a mais de banda usada além da banda mínima necessária.

No nosso exemplo usaremos 12,5% de “roll-off” ou $r = 0,125$ e assim $(1 + 0,125)1200 = 1350\text{Hz}$ de largura de banda para o sinal em banda básica.

Modulação dobra a largura de banda para 2700Hz, ou seja, precisamos dessa largura de banda para transmitir 2400bps de dados.

Uso de QAM dobra a taxa com a mesma largura de banda. Ao invés de transmitirmos um sinal $m(t)$ PSK podemos enviar dois sinais $m_1(t)$ e $m_2(t)$ PSK em

quadratura de fase. Por esta razão este método também é chamado de PSK em quadratura ou QPSK.

Podemos aumentar ainda mais a taxa de transmissão usando QAM M -ário. Um caso prático com $M = 16$ usa 16 pulsos com o formato dado por

$$\begin{aligned} p_i &= a_i p(t) \cos \omega_c t + b_i p(t) \sin \omega_c t \\ &= r_i p(t) \cos(\omega_c t + \theta_i) \quad i = 1, 2, \dots, 16 \end{aligned} \quad (31)$$

sendo $p(t)$ o formato do pulso. Os valores de r_i e θ_i (a_i e b_i) são escolhidos como está representado na Figura 9.

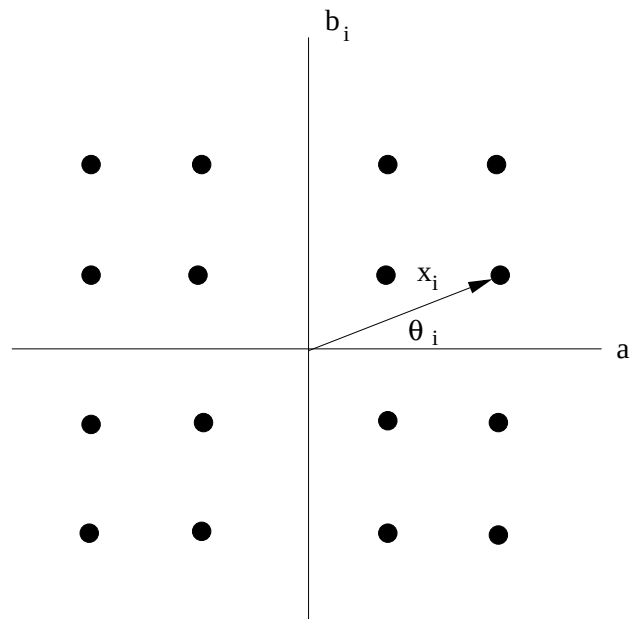


Figura 9: Constelação de Sinais 16 QAM.

Como temos 16 sinais $\Rightarrow \log_2 16 = 4$ dígitos binários e cada pulso p_i transmite 4 bits, logo podemos transmitir a uma taxa de $4 \times 2400 = 9600\text{bps}$.

Os sinais $m_1(t) = a_i p(t)$ e $m_2(t) = b_i p(t)$ são os sinais que entram no modulador (QAM). As saídas do demodulador serão $a_i p(t)$ e $b_i p(t)$, e desse modo, dado o par (a_i, b_i) sabemos qual combinação dos 4 bits foi transmitida.

Na transmissão pela linha telefônica, precisamos em cada ponto terminal um modulador e um demodulador para transmitir e receber os dados. O transmissor e o receptor (**modulador** e **demodulador**) está geralmente num único equipamento chamado de modem.

Banda Lateral Vestigial (VSB)

Como já foi visto se um sinal não tem nível DC nulo é extremamente difícil gerar sinais SSB. Um sistema VSB (do inglês *Vestigial Side Band*) é um compromisso entre os sistemas DSB-SC e SSB. Sinais DSB-SC são mais fáceis de gerar que SSB, mas ocupam duas vezes mais faixa de frequência.

Sinais VSB são relativamente fáceis de gerar e ocupam

uma faixa 25% maior, tipicamente, que sinais SSB.

No VSB, ao invés de rejeitarmos completamente uma das bandas laterais, um corte gradual é realizado em uma das bandas como está ilustrado na Figura 10.

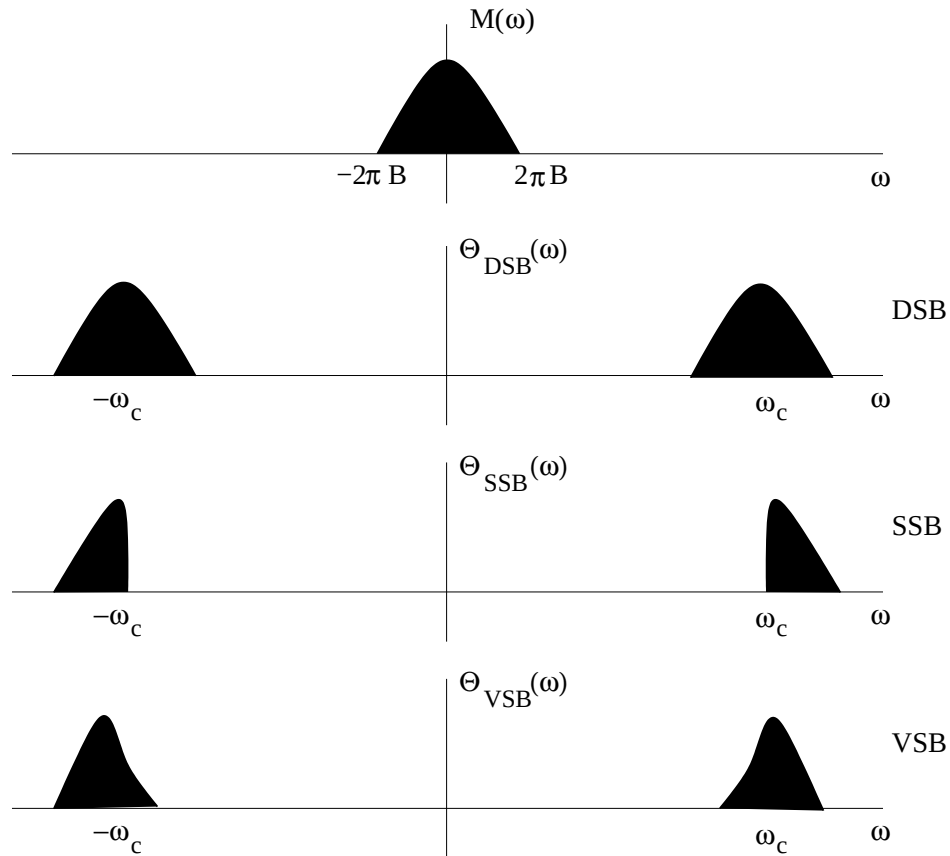


Figura 10: Espectro de sinais DSB, SSB e VSB.

O sinal banda básica pode ser recuperado por detecção síncrona em conjunto com um filtro equalizador $H_0(\omega)$. Se usarmos uma portadora podemos usar detectores de envoltória para recuperar

o sinal enviado.

Na Figura 11 estão representados o transmissor e o receptor VSB e na Figura 12 estão representadas as características dos filtros $H_i(\omega)$.

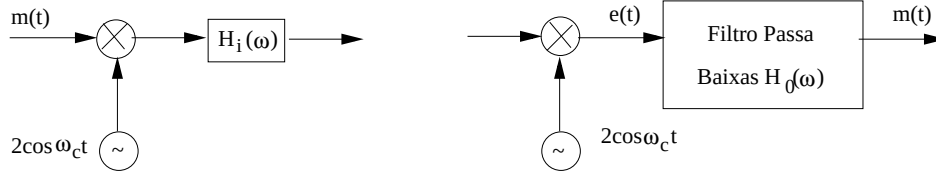


Figura 11: Transmissor e Receptor VSB.

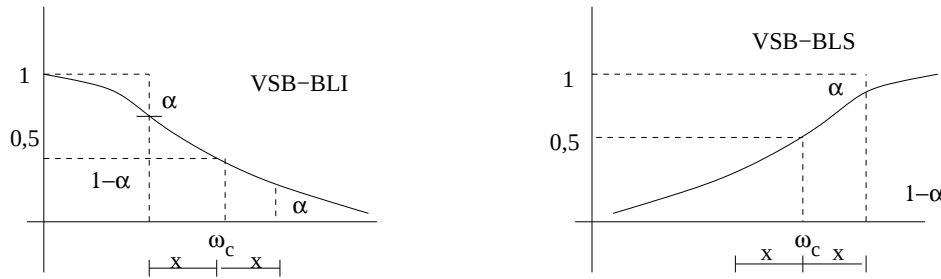


Figura 12: Característica dos filtros $H_i(\omega)$ para VSB.

A partir do sinal DSB temos

$$\phi_{DSB}(\omega) = [M(\omega + \omega_c) + M(\omega - \omega_c)]H_i(\omega)$$

sendo $H_i(\omega)$ um filtro facilmente realizável, cuja característica está representado na Figura 12.

Desejamos que $m(t)$ seja recuperado usando demodulação síncrona e como

$$e(t) = 2\phi_{VSB}(t) \cos \omega_c t \Leftrightarrow \Phi_{VSB}(\omega + \omega_c) + \Phi_{VSB}(\omega - \omega_c)$$

passando pelo filtro equalizador $H_0(\omega)$ tem-se

$$M(\omega) = [\Phi_{VSB}(\omega + \omega_c) + \Phi_{VSB}(\omega - \omega_c)]H_0(\omega)$$

substituindo Φ_{VSB} , obtemos:

$$\begin{aligned} M(\omega) &= \{[M(\omega + 2\omega_c) + M(\omega)]h_i(\omega + \omega_c) \\ &+ [M(\omega) + M(\omega - 2\omega_c)]H_i(\omega - \omega_c)\}H_0(\omega) \end{aligned} \quad (32)$$

$H_0(\omega)$ é um filtro passa-baixas de modo que as componentes em $\pm 2\omega_c$ são eliminadas e então tem-se

$$M(\omega) = M(\omega)[H_i(\omega + \omega_c) + H_i(\omega - \omega_c)]H_0(\omega)$$

donde

$$H_0(\omega) = \frac{1}{H_i(\omega + \omega_c) + H_i(\omega - \omega_c)} \quad |\omega| \leq 2\pi B$$

Observe que $H_i(\omega)$ é um filtro passa-faixa centrado em ω_c , de modo que $H_i(\omega \pm \omega_c)$ contém componentes em frequências baixas.

Exemplo 9 *A frequência da portadora de um certo*

sinál VSB é $f_c = 20\text{KHz}$ o sinal em banda básica tem largura de faixa de 6KHz . O filtro $H_i(\omega)$ corta gradualmente até 2KHz a banda lateral inferior, como está representado na Figura ???. Determine $H_0(\omega)$ para uma recepção sem distorção

Detecção por Envoltória de Sinais VSB+C

Podemos provar que os sinais VSB+C podem demodulados por envoltória de forma similar como foi feito para sinais SSB+C.

Vimos que SSB+C necessita de uma portadora muito maior que os sinais DSB+C (AM). Como os sinais VSB está numa classe entre esse dois sinais, a portadora não é tão grande como no caso do SSB+C mas é maior que no caso de AM.

Uso do VSB em Sinais de Televisão (Por Difusão)

O sinal de TV ocupa uma largura defaixa de $4,5\text{MHz}$ em banda básica. Usando a modulação DSB, a largura de faixa necessária para transmitir esse sinal seria de 9MHz . Pode-se então pensar em usar SSB para transmitir esses sinais e assim usar uma faixa de $4,5\text{Mhz}$, entretanto os sinais de TV tem potências

altas nas baixas frequências, o que tornaria quase impossível suprimir uma das bandas laterais com filtros.

Além dos fatos já citados, como o sistema de TV é por difusão é interessante termos receptores mais simples, usando detecção de envoltória. Mais uma vez pode-se cogitar o uso de (SSB+C) porém com esta escolha muita potência seria usada na portadora.

O uso de VSB+C é um compromisso entre os sistemas DSB+C e SSB+C. O espectro resultante do sinal é de 6MHz.

Linearidade de Modulação em Amplitude

Todos os tipos de modulação em amplitude satisfazem o princípio de superposição (excluindo a portadora), ou seja, se $m_1(t)$ e $m_2(t)$ são sinais modulantes que produzem os sinais modulados $\phi_1(t)$ e $\phi_2(t)$ então

$$k_1 m_1(t) + k_2 m_2(t)$$

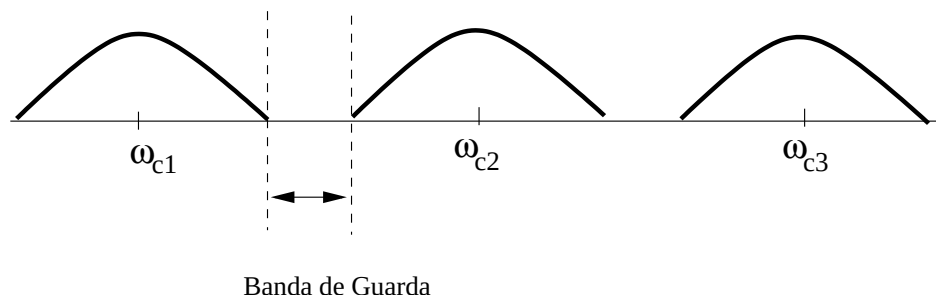
produz

$$k_1 \phi_1(t) + k_2 \phi_2(t)$$

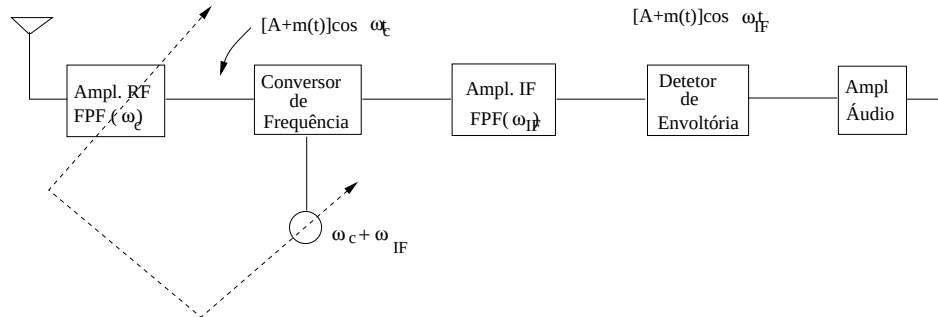
Isto é interessante pois qualquer sinal (real) pode ser expresso como uma soma de senóides.

Multiplexação por Divisão em Frequências (FDM)

Vários sinais compartilham a faixa de passagem do canal e as várias portadoras são separadas adequadamente para evitar sobreposição de espectros. Estas portadoras são chamadas de subportadoras. Um exemplo de FDM com três subportadoras está representado na Figura ??.



Receptor AM Superheterodino



- Consiste de uma seção de RF em conversor de frequência, um amplificador de IF, um detector de envoltória e um amplificador de áudio.
- A seção de RF é um filtro sintonizável e um amplificador que sintoniza na estação desejada.
- O conversor de frequências converte ω_c para uma frequência IF de 455KHz. Para conseguir isto, o oscilador local é exatamente 455KHz acima da portadora

$$F_{01} = f_c + 455KHz = f_c + f_{IF}$$

Toda seletividade é realizada praticamente na seção de RF, que também amplifica o sinal pra o detector

de envoltória. A principal função da seção de RF é a supressão da frequência imagem. Por exemplo, se $f_c = 1000\text{KHz}$ e $f_{10} = 1455\text{KHz}$ mas $f' = 1455\text{KHz}$ e $f_{10} = 1910\text{KHz}$ também é captada em 455KHz pois $|f' - f_{10}| = 455\text{KHz}$ a estação imagem da estação de 1000KHz.

Estações a $910\text{KHz} = 2f_{IF}$ são estações imagem e aparecem simultaneamente na saída de IF.

A seção de RF fornece uma baixa seletividade para estações adjacentes mas alta seletividade para estações separadas por 910KHz.

O receptor que estamos analisando converte a frequência da portadora para uma frequência IF usando um oscilador local de frequência f_{LO} maior que a da portadora (conversão para cima) e por isso o receptor é chamado de super-heterodino.

Este princípio foi introduzido por E. H. Armstrong e é usado em receptores AM, FM e em televisores. A razão para se usar a conversão para cima e não para baixo é que é mais fácil projetar os osciladores.

A faixa de frequências do AM comercial é de 550 a 1600KHz. A conversão para cima de 1005 a 2055kHz

razão de 2,045 e para baixo de 95 a 1145Khz razão de 12,05. Canais de 10KHz de largura de faixa e as mensagens na faixa de 4 a 4KHz. Cada canal é separado por uma banda de guarda de 30KHz.