

Análise de Sinais no Tempo Contínuo: A Série de Fourier

Edmar J Nascimento

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Elétrica

www.univasf.edu.br/~edmar.nascimento

May 2, 2021

Introdução

- A análise de Fourier (séries e transformadas) é utilizada na análise de sinais
- As séries de Fourier são usadas para analisar sinais periódicos
- A transformada de Fourier pode ser utilizada tanto na análise de sinais aperiódicos quanto periódicos
- A representação de um sinal em séries de Fourier pode ser comparada com a representação de um vetor em componentes de uma base de um espaço vetorial
 - Nas séries de Fourier, um sinal é representado como a soma de componentes em uma base de funções ortogonais (senos, cossenos ou exponenciais)

Introdução

- Seja $x(t)$ um sinal periódico com período T_0 , ou seja, $x(t) = x(t + T_0)$, $\forall t$
- O menor valor de T_0 é chamado de período fundamental de $x(t)$
- Verifica-se para um determinado período fundamental T_0 que:

$$\int_a^{a+T_0} x(t)dt = \int_b^{b+T_0} x(t)dt = \int_{T_0} x(t)dt$$

- Define-se ainda:
 - $f_0 = 1/T_0$ - frequência fundamental em Hertz
 - $\omega_0 = 2\pi/T_0 = 2\pi f_0$ - frequência fundamental em radianos por segundo

Introdução

- Senóides com frequências múltiplas da frequência fundamental são chamadas de harmônicas
 - $\cos(\omega_0 t) = \cos(2\pi f_0 t)$ - primeira harmônica
 - $\cos(2\omega_0 t) = \cos(4\pi f_0 t)$ - segunda harmônica
 - $\cos(n\omega_0 t) = \cos(2\pi n f_0 t)$ - n-ésima harmônica
- As séries de Fourier possuem três representações equivalentes:
 - Série trigonométrica em $\sin(n\omega_0 t)$ e $\cos(n\omega_0 t)$
 - Série trigonométrica compacta em $\cos(n\omega_0 t + \theta_n)$
 - Série exponencial em $e^{jn\omega_0 t}$
- Para as duas últimas representações pode-se definir o espectro de um sinal periódico

Série Trigonométrica

- Fourier mostrou que um sinal periódico $x(t)$ com período T_0 pode ser escrito como

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)$$

- Ou seja, um sinal periódico $x(t)$ pode ser representado como a soma de um termo constante (componente DC) e de infinitas harmônicas
- Para determinar a série trigonométrica de Fourier de um sinal $x(t)$ é necessário determinar os coeficientes a_0 , a_n e b_n

Série Trigonométrica

- Para determinar os coeficientes a_0 , a_n e b_n , verifica-se que:

$$\begin{aligned}\int_{T_0} \cos n\omega_0 t \cos m\omega_0 t dt &= \frac{1}{2} \left[\int_{T_0} \cos(n+m)\omega_0 t dt \right. \\ &\quad \left. + \int_{T_0} \cos(n-m)\omega_0 t dt \right] \\ &= \begin{cases} 0, & n \neq m \\ T_0/2, & n = m \neq 0 \end{cases}\end{aligned}$$

Série Trigonométrica

- De modo similar, tem-se que:

$$\begin{aligned}\int_{T_0} \sin n\omega_0 t \sin m\omega_0 t dt &= \frac{1}{2} \left[\int_{T_0} \cos(n-m)\omega_0 t dt \right. \\ &\quad \left. - \int_{T_0} \cos(n+m)\omega_0 t dt \right] \\ &= \begin{cases} 0, & n \neq m \\ T_0/2, & n = m \neq 0 \end{cases}\end{aligned}$$

Série Trigonométrica

- Finalmente:

$$\begin{aligned}\int_{T_0} \sin n\omega_0 t \cos m\omega_0 t dt &= \frac{1}{2} \left[\int_{T_0} \sin(n-m)\omega_0 t dt \right. \\ &\quad \left. + \int_{T_0} \sin(n+m)\omega_0 t dt \right] \\ &= 0, \quad \forall m, n\end{aligned}$$

- A partir dessas três expressões, verifica-se que os termos $\cos(n\omega_0 t)$ e $\sin(n\omega_0 t)$ são ortogonais para diferentes valores de $n \neq 0$

Série Trigonométrica

- Para se obter a_0 , integra-se em um período a expressão:

$$\begin{aligned}x(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t) \\ \int_{T_0} x(t) dt &= \int_{T_0} a_0 dt + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \int_{T_0} \cos(n\omega_0 t) dt \right. \\ &\quad \left. + b_n \int_{T_0} \sin(n\omega_0 t) dt \right] = a_0 T_0\end{aligned}$$

- Logo,

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) dt$$

Série Trigonométrica

- Para se obter a_n (a componente de $\cos(n\omega_0 t)$), faz-se o seguinte:

$$\begin{aligned} \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \cos n\omega_0 t dt &= \frac{2}{T_0} \int_{T_0} a_0 \cos n\omega_0 t dt + \\ &\frac{2}{T_0} \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \int_{T_0} \cos(k\omega_0 t) \cos(n\omega_0 t) dt \right. \\ &\left. + b_k \int_{T_0} \sin(k\omega_0 t) \cos(n\omega_0 t) dt \right] = a_n \end{aligned}$$

- Logo,

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \cos n\omega_0 t dt$$

Série Trigonométrica

- Para se obter b_n (a componente de $\sin(n\omega_0 t)$), faz-se o seguinte:

$$\begin{aligned} \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \sin n\omega_0 t dt &= \frac{2}{T_0} \int_{T_0} a_0 \sin n\omega_0 t dt + \\ &\frac{2}{T_0} \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \int_{T_0} \cos(k\omega_0 t) \sin(n\omega_0 t) dt \right. \\ &\left. + b_k \int_{T_0} \sin(k\omega_0 t) \sin(n\omega_0 t) dt \right] = b_n \end{aligned}$$

- Logo,

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \sin n\omega_0 t dt$$

Série Trigonométrica

- Assim, a série trigonométrica de Fourier é dada por:

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)$$

- Sendo,

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \cos n\omega_0 t dt$$

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \sin n\omega_0 t dt$$

Simetrias

- Se $x(t)$ é um sinal par, então:

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) dt = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) dt = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0/2} x(t) dt$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \cos n\omega_0 t dt = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \cos n\omega_0 t dt \\ &= \frac{4}{T_0} \int_0^{T_0/2} x(t) \cos n\omega_0 t dt \end{aligned}$$

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \sin n\omega_0 t dt = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \sin n\omega_0 t dt = 0$$

Simetrias

- Se $x(t)$ é um sinal ímpar, então:

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) dt = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) dt = 0$$

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \cos n\omega_0 t dt = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \cos n\omega_0 t dt = 0$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \sin n\omega_0 t dt = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \sin n\omega_0 t dt \\ &= \frac{4}{T_0} \int_0^{T_0/2} x(t) \sin n\omega_0 t dt \end{aligned}$$

Série Trigonométrica Compacta

- Sabe-se que:

$$\begin{aligned}C \cos(\omega_0 t + \theta) &= C \cos \theta \cos \omega_0 t - C \sin \theta \sin \omega_0 t \\&= a \cos \omega_0 t + b \sin \omega_0 t, \\a &= C \cos \theta, \quad b = -C \sin \theta \\C &= \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \theta = \arctan\left(\frac{-b}{a}\right)\end{aligned}$$

- Logo, a série de Fourier pode ser escrita na forma compacta como:

$$x(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n)$$

Série Trigonométrica Compacta

- Os coeficientes C_0 , C_n e θ_n são obtidos a partir de a_0 , a_n e b_n de acordo com as relações

$$C_0 = a_0$$

$$C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

$$\theta_n = \arctan\left(\frac{-b_n}{a_n}\right)$$

Série Trigonométrica Compacta

- Alguns casos especiais podem ser enfatizados:
- $b_n = 0$
 - Neste caso, tem-se que:

$$\begin{aligned}x(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) \\ &= C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n)\end{aligned}$$

- Em que

$$C_0 = a_0, \quad C_n = |a_n| \quad \text{e} \quad \theta_n = \begin{cases} 0, & a_n > 0 \\ -\pi, & a_n < 0 \end{cases}$$

Série Trigonométrica Compacta

- $a_n = 0$
 - Neste caso, tem-se que:

$$\begin{aligned}x(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega_0 t) \\&= C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n)\end{aligned}$$

- Em que

$$C_0 = a_0, \quad C_n = |b_n| \quad \text{e} \quad \theta_n = \begin{cases} -\pi/2, & b_n > 0 \\ \pi/2, & b_n < 0 \end{cases}$$

Espectro da Série Compacta

- A partir da série compacta é possível obter o espectro da expansão em séries de Fourier
- O espectro consiste nos gráficos discretos de:
 - C_n versus $\omega = n\omega_0$ - espectro de amplitude
 - θ_n versus $\omega = n\omega_0$ - espectro de fase
- O espectro permite verificar a contribuição de cada harmônica para o sinal periódico $x(t)$
- Enquanto $x(t)$ é uma representação no domínio do tempo, o espectro é o seu equivalente no domínio da frequência

Série Exponencial de Fourier

- A partir da fórmula de Euler, sabe-se que:

$$\cos n\omega_0 t = \frac{e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}}{2}, \quad \sin n\omega_0 t = \frac{e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t}}{2j}$$

- Assim, $x(t)$ pode ser representado como:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t}$$

- Essa expressão é a série exponencial de Fourier

Série Exponencial de Fourier

- D_n é calculado da seguinte maneira

$$\begin{aligned}x(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t} \longrightarrow x(t)e^{-jm\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{j(n-m)\omega_0 t} \\ \int_{T_0} x(t)e^{-jm\omega_0 t} dt &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n \int_{T_0} e^{j(n-m)\omega_0 t} dt\end{aligned}$$

- Mas,

$$\int_{T_0} e^{j(n-m)\omega_0 t} dt = \begin{cases} T_0, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases}$$

Série Exponencial de Fourier

- Assim, a série exponencial é dada por:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t}$$
$$D_n = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

- A relação entre a série exponencial é obtida expandindo-se $x(t)$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{-1} D_n e^{jn\omega_0 t} + D_0 + \sum_{n=1}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t}$$
$$= D_0 + \sum_{n=1}^{\infty} D_{-n} e^{-jn\omega_0 t} + \sum_{n=1}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t}$$

Série Exponencial de Fourier

- Logo,

$$x(t) = D_0 + \sum_{n=1}^{\infty} D_{-n} e^{-jn\omega_0 t} + D_n e^{jn\omega_0 t}$$

- Mas,

$$\begin{aligned} D_n &= \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \\ &= \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) \cos n\omega_0 t dt - \frac{j}{T_0} \int_{T_0} x(t) \sin n\omega_0 t dt \\ &= \frac{a_n - jb_n}{2} \end{aligned}$$

Série Exponencial de Fourier

- De modo análogo,

$$\begin{aligned}D_{-n} &= \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{jn\omega_0 t} dt \\&= \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) \cos n\omega_0 t dt + \frac{j}{T_0} \int_{T_0} x(t) \sin n\omega_0 t dt \\&= \frac{a_n + jb_n}{2}\end{aligned}$$

- Assim, tem-se que:

$$\begin{aligned}D_n &= \frac{a_n - jb_n}{2} = \frac{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{2} e^{j \arctan(-b_n/a_n)} = \frac{C_n}{2} e^{j\theta_n} \\D_{-n} &= \frac{a_n + jb_n}{2} = \frac{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{2} e^{j \arctan(b_n/a_n)} = \frac{C_n}{2} e^{-j\theta_n}\end{aligned}$$

Série Exponencial de Fourier

- Além disso,

$$D_0 = a_0 = C_0$$

$$|D_n| = |D_{-n}| = \frac{C_n}{2}, \quad n \neq 0$$

$$\angle D_n = \theta_n, \quad \angle D_{-n} = -\theta_n, \quad n \neq 0$$

- O espectro da série exponencial consiste nos gráficos discretos de:
 - $|D_n|$ versus $\omega = n\omega_0$ - espectro de amplitude (função par)
 - $\angle D_n$ versus $\omega = n\omega_0$ - espectro de fase (função ímpar)
- Deve-se observar que o espectro da série exponencial possui tanto frequências negativas quanto positivas

Existência das Séries de Fourier

- Para as série de Fourier existir é necessário que a_0 , a_n e b_n sejam finitos
- Para que isso ocorra, $x(t)$ deve ser absolutamente integrável em um período, ou seja:

$$\int_{T_0} |x(t)| dt < \infty$$

Convergência

- O critério de convergência usado nas séries de Fourier é a "convergência na média"
- Considere uma série infinita para um sinal periódico $x(t)$ e sua versão truncada (aproximada) $x_N(t)$ dadas por

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} z_n(t)$$
$$x_N(t) = \sum_{n=1}^N z_n(t)$$

- O erro de aproximação devido ao truncamento é dado por

$$e(t) = x(t) - x_N(t)$$

Convergência

- A série converge na média no intervalo $(0, T_0)$ se

$$\int_0^{T_0} |e(t)|^2 dt = \int_0^{T_0} |x(t) - x_N(t)|^2 dt \longrightarrow 0 \text{ se } N \longrightarrow \infty$$

- Ou seja, a energia do erro em um período tende a zero quando N tende a infinito
- Um outro critério mais simples para a convergência na média é verificar se o sinal tem energia finita em um período
- Um sinal periódico $x(t)$ possui uma série de Fourier que converge na média se

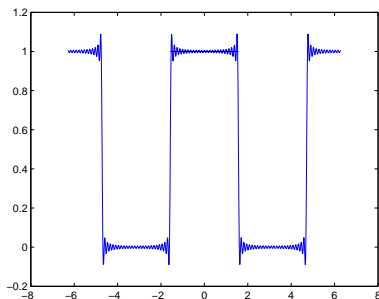
$$\int_{T_0} |x(t)|^2 dt < \infty$$

Convergência

- Além da convergência na média, é útil analisar a convergência em pontos específicos
- Se um sinal periódico $x(t)$ satisfizer as três condições de Dirichlet abaixo, então a série de $x(t)$ converge para todo ponto em que o sinal é contínuo e converge para o valor médio dos dois lados da descontinuidade nos pontos de descontinuidade
 - 1 $x(t)$ é absolutamente integrável
 - 2 Há um número finito de descontinuidades finitas em um período
 - 3 Há um número finito de máximos ou mínimos em um período

Fenômeno de Gibbs

- O fenômeno de Gibbs ocorre quando o sinal periódico $x(t)$ apresenta descontinuidades
- Ao se considerar uma série de Fourier truncada, há a presença de um sobre-sinal de amplitude aproximadamente igual a 9% do valor da descontinuidade nas vizinhanças dos pontos de descontinuidade



Teorema de Parseval

- O teorema de Parseval permite calcular a potência de um sinal a partir do espectro de amplitude do sinal
- Segundo o teorema de Parseval, a potência de um sinal periódico é igual a soma das potências das componentes da série, ou seja:

$$P_x = C_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} C_n^2$$

$$P_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |D_n|^2 = D_0^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} |D_n|^2$$

Resposta de um Sistema LCIT a Entradas Periódicas

- Vimos que um sinal periódico $x(t)$ pode ser representado como

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t}$$

- Se um sistema LCIT com função de transferência é estável, então

$$e^{j\omega t} \longrightarrow H(j\omega) e^{j\omega t}$$

- Aplicando a propriedade da linearidade, tem-se que:

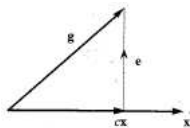
$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t} \longrightarrow y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n H(jn\omega_0) e^{jn\omega_0 t}$$

Resposta de um Sistema LCIT a Entradas Periódicas

- Ou seja, uma entrada periódica resulta em uma saída periódica com o mesmo período da entrada
- As componentes do espectro do sinal periódico são afetadas diferentemente pela função de transferência do sistema

Série de Fourier Generalizada

- As séries de Fourier estudadas podem ser analisadas de um ponto de vista mais geral através da analogia entre funções e vetores
- Considere dois vetores \vec{g} e \vec{x} representados abaixo



- Sabe-se que:

$$\vec{g} \cdot \vec{x} = |\vec{g}| |\vec{x}| \cos \theta$$

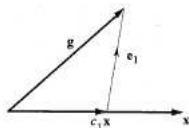
$$|\vec{g}|^2 = \vec{g} \cdot \vec{g}$$

$$\vec{g} = c \vec{x} + \vec{e}$$

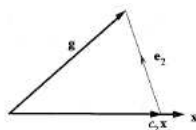
Série de Fourier Generalizada

- Se $\vec{g} \simeq c\vec{x}$, então $\vec{e} = \vec{g} - c\vec{x}$ corresponde ao erro da aproximação
- O erro \vec{e} é minimizado se $c|\vec{x}| = |\vec{g}| \cos \theta$, ou seja

$$c = \frac{|\vec{g}| \cos \theta}{|\vec{x}|} = \frac{\vec{g} \cdot \vec{x}}{|\vec{x}|^2}$$



(a)



- Além disso, se $\vec{g} \cdot \vec{x} = 0$, então \vec{g} e \vec{x} são ortogonais

Série de Fourier Generalizada

- Sejam agora dois sinais $g(t)$ e $x(t)$, então se $g(t) \simeq cx(t)$ no intervalo $t_1 < t < t_2$ então o erro da aproximação é dado por

$$e(t) = \left\{ \begin{array}{ll} g(t) - cx(t), & t_1 < t < t_2 \\ 0, & \text{c.c.} \end{array} \right\}$$

- A melhor aproximação é aquela que minimiza a energia do erro que pode ser expressada como

$$E_e = \int_{t_1}^{t_2} e^2(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} [g(t) - cx(t)]^2 dt$$

Série de Fourier Generalizada

- O valor de c que minimiza E_e pode ser obtido fazendo-se $dE_e/dt = 0$, o que resulta em

$$c = \frac{1}{E_x} \int_{t_1}^{t_2} g(t)x(t)dt$$

- Fazendo a analogia com vetores tem-se que:

$$\begin{aligned}\vec{g} \cdot \vec{x} &\longleftrightarrow \int_{t_1}^{t_2} g(t)x(t)dt \\ |\vec{x}|^2 &\longleftrightarrow E_x\end{aligned}$$

- $g(t)$ e $x(t)$ são ortogonais se

$$\int_{t_1}^{t_2} g(t)x(t)dt = 0$$

Série de Fourier Generalizada

- Se $g(t)$ e $x(t)$ são funções complexas, então:

$$c = \frac{1}{E_x} \int_{t_1}^{t_2} g(t)x^*(t)dt$$

- Além disso, para dois vetores ortogonais \vec{x} e \vec{y} , tem-se que $\vec{z} = \vec{x} + \vec{y}$ resulta em $|\vec{z}|^2 = |\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2$
- Pode-se mostrar que para dois sinais $x(t)$ e $y(t)$ ortogonais, tem-se que $z(t) = x(t) + y(t)$ possui energia $E_z = E_x + E_y$

Série de Fourier Generalizada

- Os resultados obtidos anteriormente podem ser generalizados para dimensões maiores
- Sejam \vec{x}_1 , \vec{x}_2 e \vec{x}_3 três vetores mutuamente ortogonais e um vetor $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$, então temos que:

$$\begin{aligned}\vec{x} &\simeq c_1 \vec{x}_1 + c_2 \vec{x}_2 \\ \vec{x} &= \vec{x} - (c_1 \vec{x}_1 + c_2 \vec{x}_2)\end{aligned}$$

- O erro é mínimo se c_1 e c_2 são as projeções ortogonais ao longo de \vec{x}_1 e \vec{x}_2 , respectivamente
- Se $\vec{x} \simeq c_1 \vec{x}_1 + c_2 \vec{x}_2 + c_3 \vec{x}_3$, então $\vec{e} = 0$, já que três vetores ortogonais formam uma base para \mathbb{R}^3

Série de Fourier Generalizada

- Analogamente, um conjunto de sinais $x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t)$ é ortogonal se

$$\int_{t_1}^{t_2} x_m(t) x_n^*(t) dt = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ E_n, & m = n \end{cases}$$

- Se além disso, $E_n = 1$, diz-se que os sinais são ortonormais
- Assim, um sinal $x(t)$ pode ser aproximado por

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \dots + c_N x_N(t) \simeq \sum_{n=1}^N c_n x_n(t)$$

$$e(t) = x(t) - \sum_{n=1}^N c_n x_n(t)$$

Série de Fourier Generalizada

- O erro é minimizado se

$$c_i = \frac{1}{E_{x_i}} \int_{t_1}^{t_2} x(t) x_i^*(t) dt, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

- Quando $N \rightarrow \infty$, então $E_e \rightarrow 0$ e

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n(t), \quad t_1 < t < t_2$$

é a série de Fourier generalizada