

Exemplos

Edmar J Nascimento

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Elétrica

www.univasf.edu.br/~edmar.nascimento

April 12, 2021

Exemplo

Exemplo

Calcular a transformada de Laplace inversa de $X(s) = \frac{7s-6}{s^2-s-6}$

Solução

$$X(s) = \frac{k_1}{s+2} + \frac{k_2}{s-3}$$

$$X(s) = \frac{4}{s+2} + \frac{3}{s-3}$$

$$x(t) = (4e^{-2t} + 3e^{3t})u(t)$$

Exemplo

Exemplo

Calcular a transformada de Laplace inversa de $X(s) = \frac{2s^2+5}{s^2+3s+2}$

Solução

$$X(s) = 2 + \frac{k_1}{s+1} + \frac{k_2}{s+2}$$

$$X(s) = 2 + \frac{7}{s+1} - \frac{13}{s+2}$$

$$x(t) = 2\delta(t) + (7e^{-t} - 13e^{-2t})u(t)$$

Exemplo

Exemplo

Calcular a transformada de Laplace inversa de $X(s) = \frac{6(s+34)}{s(s^2+10s+34)}$

Solução

$$\begin{aligned}X(s) &= \frac{k_1}{s} + \frac{k_2}{s+5-j3} + \frac{k_2^*}{s+5+j3} \\X(s) &= \frac{6}{s} + \frac{-3+j4}{s+5-j3} + \frac{-3-j4}{s+5+j3} \\X(s) &= \frac{6}{s} + \frac{5e^{j126,9^\circ}}{s+5-j3} + \frac{5e^{-j126,9^\circ}}{s+5+j3} \\x(t) &= [6 + 10e^{-5t} \cos(3t + 126,9^\circ)]u(t)\end{aligned}$$

Exemplo

Exemplo

Calcular a transformada de Laplace inversa de $X(s) = \frac{8s+10}{(s+1)(s+2)^3}$

Solução

$$X(s) = \frac{k_1}{s+1} + \frac{a_0}{(s+2)^3} + \frac{a_1}{(s+2)^2} + \frac{a_2}{s+2}$$

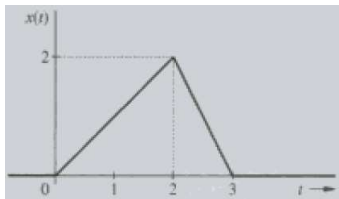
$$X(s) = \frac{2}{s+1} + \frac{6}{(s+2)^3} - \frac{2}{(s+2)^2} - \frac{2}{s+2}$$

$$x(t) = [2e^{-t} + (3t^2 - 2t - 2)e^{-2t}]u(t)$$

Exemplo

Exercício E4.3

Determinar a transformada de Laplace do sinal $x(t)$ dado por



Exemplo

Solução 1 exercício E4.3

$$\begin{aligned}x(t) &= t[u(t) - u(t-2)] + (-2t+6)[u(t-2) - u(t-3)] \\&= -3(t-2)u(t-2) + tu(t) + 2(t-3)u(t-3) \\tu(t) &\iff \frac{1}{s^2} \\X(s) &= (1 + 2e^{-3s} - 3e^{-2s})\frac{1}{s^2}\end{aligned}$$

Exemplo

Solução 2 exemplo 4.7

$$x(t) = -3(t-2)u(t-2) + tu(t) + 2(t-3)u(t-3)$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = -3u(t-2) + u(t) + 2u(t-3)$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -3\delta(t-2) + \delta(t) + 2\delta(t-3)$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2x(t)}{dt^2}\right\} = \mathcal{L}\left\{-3\delta(t-2) + \delta(t) + 2\delta(t-3)\right\}$$

$$s^2X(s) - sx(0^-) - \dot{x}(0^-) = 1 - 3e^{-2s} + 2e^{-3s}$$

$$X(s) = (1 + 2e^{-3s} - 3e^{-2s})\frac{1}{s^2}$$

Exemplo

Exemplo 4.8

Usando a propriedade da convolução, determine $c(t) = e^{at}u(t) * e^{bt}u(t)$.

Solução exemplo 4.8

$$C(s) = \mathcal{L}\{e^{at}u(t)\}\mathcal{L}\{e^{bt}u(t)\} = \frac{1}{s-a} \cdot \frac{1}{s-b} = \frac{1}{(s-a)(s-b)}$$

$$C(s) = \frac{1}{a-b} \left(\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s-b} \right) \Longleftrightarrow c(t) = \frac{(e^{at} - e^{bt})u(t)}{a-b}$$

Exemplo

Exemplo 4.9

Determinar os valores inicial e final de $y(t)$ se $Y(s)$ é dado por

$$Y(s) = \frac{10(2s + 3)}{s(s^2 + 2s + 5)}$$

Solução exemplo 4.9

$$y(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sY(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{10(2s + 3)}{(s^2 + 2s + 5)} = \frac{20}{\infty} = 0$$

$$y(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{10(2s + 3)}{(s^2 + 2s + 5)} = \frac{30}{5} = 6$$

$$y(t) = 6u(t) + \sqrt{85}e^{-t} \cos(2t + 229,398^\circ)u(t)$$

Exemplo

Exercício E4.6

Resolver

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = 2\frac{dx(t)}{dt} + x(t)$$

para a entrada $x(t) = u(t)$ com $y(0^-) = 1$ e $\dot{y}(0^-) = 2$.

Solução exercício E4.6

$$y(t) \iff Y(s)$$

$$\frac{dy(t)}{dt} \iff sY(s) - y(0^-) = sY(s) - 1$$

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} \iff s^2Y(s) - sy(0^-) - \dot{y}(0^-) = s^2Y(s) - s - 2$$

Exemplo

Solução exercício E4.6

$$x(t) = u(t) \iff X(s) = \frac{1}{s}$$

$$\frac{dx(t)}{dt} \iff sX(s) - x(0^-) = sX(s) = 1$$

Logo, temos que:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{\frac{d^2y(t)}{dt^2}\right\} + 4\mathcal{L}\left\{\frac{dy(t)}{dt}\right\} + 3\mathcal{L}\{y(t)\} &= 2\mathcal{L}\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} + \mathcal{L}\{x(t)\} \\ s^2Y(s) - s - 2 + 4(sY(s) - 1) + 3Y(s) &= 2 \cdot 1 + \frac{1}{s} \\ (s^2 + 4s + 3)Y(s) &= \frac{s^2 + 8s + 1}{s} \end{aligned}$$

Exemplo

Solução exercício E4.6

$$Y(s) = \frac{s^2 + 8s + 1}{s(s^2 + 4s + 3)} = \frac{s^2 + 8s + 1}{s(s + 1)(s + 3)}$$

$$Y(s) = \frac{k_1}{s} + \frac{k_2}{s + 1} + \frac{k_3}{s + 3}$$

$$Y(s) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{s} + 3 \cdot \frac{1}{s + 1} - \frac{7}{3} \cdot \frac{1}{s + 3}$$

$$y(t) = \frac{1}{3}u(t) + 3e^{-t}u(t) - \frac{7}{3}e^{-3t}u(t)$$

$$y(t) = \frac{1}{3}(1 + 9e^{-t} - 7e^{-3t})u(t)$$

Solução de Equações Diferenciais

Solução exercício E4.6 - Separação das componentes

$$s^2 Y(s) - s - 2 + 4(sY(s) - 1) + 3Y(s) = 2 + \frac{1}{s}$$

$$(s^2 + 4s + 3)Y(s) = \underbrace{(s + 6)}_{\text{cond. iniciais}} + \underbrace{2 + \frac{1}{s}}_{\text{entrada}}$$

$$Y(s) = \underbrace{\frac{s + 6}{s^2 + 4s + 3}}_{\text{comp. entrada nula}} + \underbrace{\frac{2s + 1}{s(s^2 + 4s + 3)}}_{\text{comp. estado nulo}}$$

Solução de Equações Diferenciais

Solução exercício E4.6 - Separação das componentes

$$\begin{aligned}\frac{s+6}{s^2+4s+3} &= \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{s+1} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{s+3} \\ \frac{2s+1}{s(s^2+4s+3)} &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{s} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s+1} - \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{s+3} \\ y(t) &= \underbrace{\frac{1}{2}(5e^{-t} - 3e^{-3t})u(t)}_{\text{resp. entrada nula}} + \underbrace{\frac{1}{6}(2 + 3e^{-t} - 5e^{-3t})u(t)}_{\text{resp. estado nulo}}\end{aligned}$$

Exemplo

Exemplo 4.12

Determinar a resposta $y(t)$ para o sistema

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 5\frac{dy(t)}{dt} + 6y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + x(t)$$

se $x(t) = 3e^{-5t}u(t)$ com todas as condições iniciais nulas.

Exemplo

Solução exemplo 4.12

$$H(s) = \frac{s+1}{s^2+5s+6}$$

$$Y(s) = H(s)X(s) = \frac{s+1}{s^2+5s+6} \cdot \frac{3}{s+5}$$

$$Y(s) = \frac{3(s+1)}{(s+2)(s+3)(s+5)}$$

$$Y(s) = -\frac{1}{s+2} + 3 \cdot \frac{1}{s+3} - 2 \cdot \frac{1}{s+5}$$

$$y(t) = (3e^{-3t} - e^{-2t} - 2e^{-5t})u(t)$$

Exemplo

Exercício E4.7

Para um sistema LIT com função de transferência

$$H(s) = \frac{s + 5}{s^2 + 4s + 3}$$

- 1 Dê a equação diferencial que relaciona a entrada e a saída.
- 2 Determine $y(t)$ se $x(t) = e^{-2t}u(t)$ e o sistema estiver em estado nulo.

Exemplo

Solução exercício E4.7

$$Y(s) = H(s)X(s) = \frac{s+5}{s^2+4s+3}X(s)$$

$$(s^2+4s+3)Y(s) = (s+5)X(s)$$

$$s^2Y(s) + 4sY(s) + 3Y(s) = sX(s) + 5X(s)$$

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 5x(t)$$

$$X(s) = \frac{1}{s+2} \implies Y(s) = \frac{s+5}{(s+2)(s^2+4s+3)}$$

$$y(t) = (2e^{-t} - 3e^{-2t} + e^{-3t})u(t)$$

Exemplo

Exemplo

Determinar a transformada de Laplace bilateral de

$$x(t) = e^{bt} u(-t) + e^{at} u(t)$$

Solução exemplo

$$x_1(t) = e^{at} u(t) \iff X_1(s) = \frac{1}{s-a}, \quad \operatorname{Re}\{s\} > a$$

$$x_2(-t) = e^{-bt} u(t) \iff X_2(-s) = \frac{1}{s+b}, \quad \operatorname{Re}\{s\} > -b$$

$$X_2(s) = -\frac{1}{s-b}, \quad \operatorname{Re}\{s\} < b$$

$$X(s) = \frac{a-b}{(s-a)(s-b)}, \quad a < \operatorname{Re}\{s\} < b$$

Exemplo

Exemplo 4.28

Determinar a transformada de Laplace bilateral inversa de

$$X(s) = \frac{-3}{(s+2)(s-1)}$$

se a RDC for

- 1 $-2 < \operatorname{Re}\{s\} < 1$
- 2 $\operatorname{Re}\{s\} > 1$
- 3 $\operatorname{Re}\{s\} < -2$

Exemplo

Solução exemplo 4.28

$$X(s) = \frac{-3}{(s+2)(s-1)} = \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s-1}$$

1 $x(t) = e^{-2t}u(t) + e^t u(-t)$

2 $x(t) = (e^{-2t} - e^t)u(t)$

3 $x(t) = (e^t - e^{-2t})u(-t)$

Exemplo

Exemplo 4.30

Determinar a resposta $y(t)$ para um sistema LCIT não causal cuja função de transferência é dada por

$$H(s) = \frac{-1}{s-1}, \quad \operatorname{Re}\{s\} < 1$$

para a entrada $x(t) = e^{-2t}u(t)$

Exemplo

Solução exemplo 4.30

$$x(t) = e^{-2t}u(t) \iff X(s) = \frac{1}{s+2}, \quad \text{Re}\{s\} > -2$$

$$Y(s) = X(s)H(s) = \frac{-1}{(s-1)(s+2)}, \quad -2 < \text{Re}\{s\} < 1$$

$$Y(s) = \frac{-1/3}{s-1} + \frac{1/3}{s+2}, \quad -2 < \text{Re}\{s\} < 1$$

$$y(t) = \frac{1}{3}[e^t u(-t) + e^{-2t} u(t)]$$

Exemplo

Exemplo 4.31

Determinar a resposta $y(t)$ para um sistema LCIT cuja função de transferência é dada por

$$H(s) = \frac{1}{s+5}, \quad \operatorname{Re}\{s\} > -5$$

para a entrada $x(t) = e^{-t}u(t) + e^{-2t}u(-t)$

Exemplo

Solução exemplo 4.31

$$x(t) = \underbrace{e^{-t}u(t)}_{x_1(t)} + \underbrace{e^{-2t}u(-t)}_{x_2(t)}$$

$$x_1(t) = e^{-t}u(t) \iff X_1(s) = \frac{1}{s+1}, \quad \text{Re}\{s\} > -1$$

$$x_2(t) = e^{-2t}u(-t) \iff X_2(s) = \frac{-1}{s+2}, \quad \text{Re}\{s\} < -2$$

Como $X_1(s)$ e $X_2(s)$ não possuem uma RDC comum, a resposta deve ser obtida separadamente

Exemplo

Solução exemplo 4.31

$$\begin{aligned}y(t) &= [x_1(t) + x_2(t)] * h(t) = x_1(t) * h(t) + x_2(t) * h(t) \\&= y_1(t) + y_2(t) \iff Y_1(s) + Y_2(s)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Y_1(s) &= X_1(s)H(s) = \frac{1}{(s+1)(s+5)} \\&= \frac{1/4}{s+1} - \frac{1/4}{s+5}, \quad \text{Re}\{s\} > -1\end{aligned}$$

$$y_1(t) = \frac{1}{4}(e^{-t} - e^{-5t})u(t)$$

Exemplo

Solução exemplo 4.31

$$\begin{aligned} Y_2(s) &= X_2(s)H(s) = \frac{-1}{(s+2)(s+5)} \\ &= \frac{-1/3}{s+2} + \frac{1/3}{s+5}, \quad -5 < \operatorname{Re}\{s\} < -2 \end{aligned}$$

$$y_2(t) = \frac{1}{3}[e^{-5t}u(t) + e^{-2t}u(-t)]$$

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) = \frac{1}{3}e^{-2t}u(-t) + \left(\frac{e^{-t}}{4} + \frac{e^{-5t}}{12}\right)u(t)$$

Exemplo

Exemplo 4.23

Determinar a resposta em frequência de um sistema LCIT causal cuja função de transferência é dada por:

$$H(s) = \frac{s + 0,1}{s + 5}$$

Solução exemplo 4.23

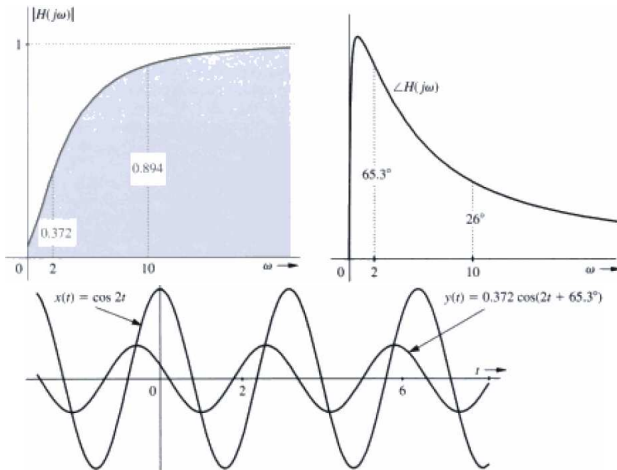
$$H(j\omega) = \frac{j\omega + 0,1}{j\omega + 5}$$

$$|H(j\omega)| = \frac{\sqrt{\omega^2 + 0,01}}{\sqrt{\omega^2 + 25}}$$

$$\angle H(j\omega) = \arctan(10\omega) - \arctan(0,2\omega)$$

Exemplo

Solução exemplo 4.23



Exemplo

Exemplo 4.24

Determinar a resposta em frequência para os seguintes sistemas:

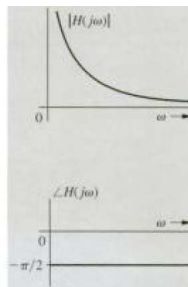
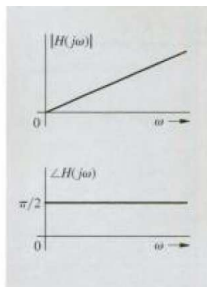
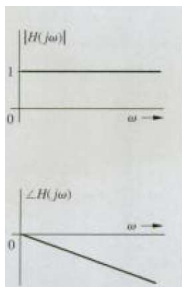
- 1 Um atrasador ideal de T segundos
- 2 Um diferenciador ideal
- 3 Um integrador ideal

Solução exemplo 4.24

- 1 $H(s) = e^{-sT} \rightarrow H(j\omega) = e^{-j\omega T}$
- 2 $H(s) = s \rightarrow H(j\omega) = j\omega = |\omega|e^{j\pi/2}$
- 3 $H(s) = 1/s \rightarrow H(j\omega) = 1/(j\omega) = |1/\omega|e^{-j\pi/2}$

Exemplo

Solução exemplo 4.24



Exemplo

Exercício E4.14

Determine a resposta de um sistema LCIT especificado por

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y(t) = \frac{dx}{dt} + 5x(t)$$

se a entrada for a senóide $x(t) = 20 \sin(3t + 35^\circ)$

Exemplo

Solução exercício E4.14

$$H(s) = \frac{s + 5}{s^2 + 3s + 2} \longrightarrow H(j\omega) = \frac{j\omega + 5}{3j\omega + 2 - \omega^2}$$

$$H(j3) = \frac{5 + 3j}{-7 + 9j} = 0,511e^{-j96,91^\circ}$$

$$x(t) = 20 \sin(3t + 35^\circ) = 20 \cos(3t - 55^\circ)$$

$$y(t) = 20 \cdot 0,511 \cos(3t - 55^\circ - 96,91^\circ)$$

$$= 10,23 \cos(3t - 151,91^\circ)$$

$$y(t) = 10,23 \sin(3t - 61,91^\circ)$$