

Análise de Sinais no Tempo Contínuo: A Transformada de Fourier

Edmar J Nascimento

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Elétrica

www.univasf.edu.br/~edmar.nascimento

May 10, 2021

Introdução

- A transformada de Fourier pode ser considerada como um caso especial da transformada de Laplace com $s = j\omega$
 - No caso do sinal ser a resposta ao impulso de um determinado sistema, é necessário que o sistema seja estável para que $s = j\omega$ pertença à RDC do sistema
- Ao contrário da transformada de Laplace, a transformada de Fourier inversa pode ser calculada sem a necessidade do formalismo do cálculo de variáveis complexas
- A transformada de Fourier é bastante usada em aplicações de processamento de sinais e nas telecomunicações

Definições

- A transformada de Fourier de um sinal $x(t)$ é definida por:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$$

- A transformada de Fourier inversa de $X(\omega)$ é dada por:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t} d\omega$$

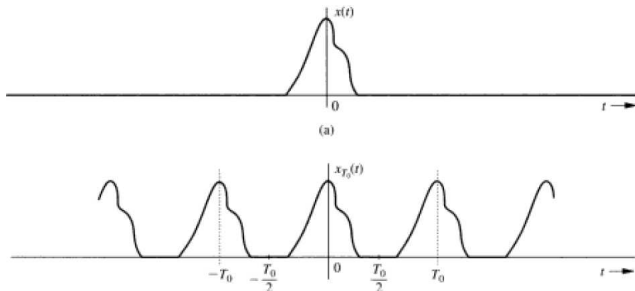
- O par de transformadas de Fourier pode ser denotado por

$$X(\omega) = \mathcal{F}[x(t)], \quad x(t) = \mathcal{F}^{-1}[X(\omega)], \quad x(t) \Longleftrightarrow X(\omega)$$

Definições

- A transformada de Fourier definida anteriormente pode ser obtida a partir da série de Fourier exponencial
- Para os sinais abaixo, tem-se que

$$\lim_{T_0 \rightarrow \infty} x_{T_0}(t) = x(t)$$



Definições

- Mas $x_{T_0}(t)$ é um sinal periódico com período T_0 e assim pode ser representado por

$$x_{T_0}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t}, \quad D_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x_{T_0}(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

- Se $T_0 \rightarrow \infty$, então

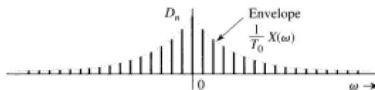
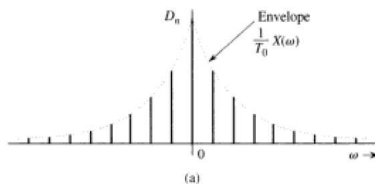
$$D_n = \frac{1}{T_0} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

- Assim, se

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt, \quad \text{então } D_n = \frac{1}{T_0} X(n\omega_0)$$

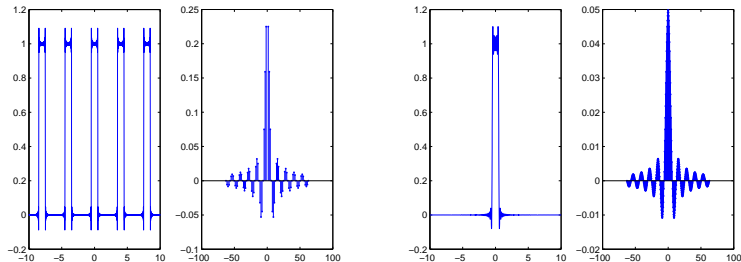
Definições

- A medida que T_0 cresce o espectro se torna mais denso (ω_0 diminui), mas a forma permanece a mesma (a do envelope $X(\omega)$)
- Quando $T_0 \rightarrow \infty$, o espectro se torna contínuo



Definições

- Na figura abaixo, é mostrado o gráfico de D_n para dois valores de T_0



Definições

- Analogamente, a transformada de Fourier inversa pode ser obtida fazendo-se

$$x_{T_0}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{X(n\omega_0)}{T_0} e^{jn\omega_0 t}$$

- Se $T_0 \rightarrow \infty$, então $\omega_0 \rightarrow 0$, logo fazendo-se $\Delta\omega = 2\pi/T_0$, tem-se:

$$x_{T_0}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{X(n\omega_0)\Delta\omega}{2\pi} e^{jn\Delta\omega t}$$

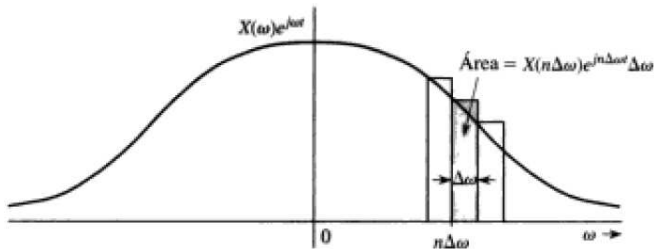
$$x(t) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} x_{T_0}(t) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(n\omega_0) e^{jn\Delta\omega t} \Delta\omega$$

Definições

- Assim,

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

- $x(t)$ pode ser interpretado como a soma dos elementos de área $X(n\Delta\omega) e^{jn\Delta\omega} \Delta\omega$



Espectro da Transformada de Fourier

- No caso geral, $X(\omega)$ é uma função complexa da variável ω , então

$$X(\omega) = |X(\omega)|e^{j\angle X(\omega)}$$

- O gráfico de $|X(\omega)| \times \omega$ é o espectro de amplitude
- O gráfico de $\angle X(\omega) \times \omega$ é o espectro de fase
- Tem-se que:

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \implies X(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{j\omega t} dt \\ \implies X^*(-\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)e^{-j\omega t} dt = \mathcal{F}[x^*(t)] \end{aligned}$$

Espectro da Transformada de Fourier

- Essa é a propriedade do conjugado da Transformada de Fourier, ou seja,

$$x^*(t) \iff X^*(-\omega)$$

- Como caso particular, se $x(t)$ é um sinal real, então $x(t) = x^*(t)$, logo

$$\begin{aligned} X^*(-\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = X(\omega) \implies X^*(\omega) = X(-\omega) \\ \implies |X(\omega)| e^{-j\angle X(\omega)} &= |X(-\omega)| e^{j\angle X(-\omega)} \\ \implies |X(\omega)| &= |X(-\omega)| \text{ e } \angle X(\omega) = -\angle X(-\omega) \end{aligned}$$

Espectro da Transformada de Fourier

- Assim, quando $x(t)$ é um sinal real, o seu espectro de amplitude é uma função par e o seu espectro de fase é uma função ímpar
- Pode-se mostrar também que a transformada de Fourier é uma operação linear, ou seja:

$$\sum_k a_k x_k(t) \iff \sum_k a_k X_k(\omega)$$

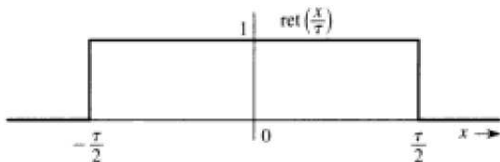
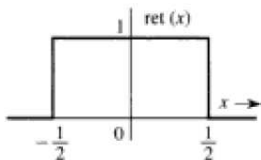
Principais Transformadas de Fourier

- Assim como foi feito com as transformadas de Laplace e Z, é útil obter as transformadas de Fourier para alguns modelos de sinais
- Antes de calcular as transformadas de Fourier, convém definir algumas funções bastante utilizadas na teoria de filtros: a função de porta unitária, a função triângulo unitário e a função de interpolação

Modelos de Sinais

- A função de porta unitária é definida como:

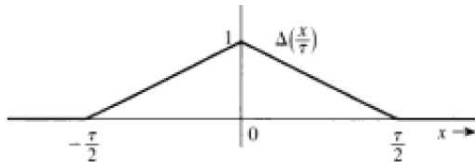
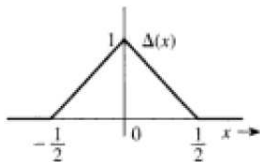
$$\text{ret}\left(\frac{x}{\tau}\right) = \left\{ \begin{array}{ll} 0, & |x| > \frac{\tau}{2} \\ \frac{1}{2}, & |x| = \frac{\tau}{2} \\ 1, & |x| < \frac{\tau}{2} \end{array} \right\}$$



Modelos de Sinais

- A função triângulo unitário é definida como:

$$\Delta\left(\frac{x}{\tau}\right) = \begin{cases} 0, & |x| \geq \frac{\tau}{2} \\ 1 - 2\frac{|x|}{\tau}, & |x| < \frac{\tau}{2} \end{cases}$$



Modelos de Sinais

- A função de interpolação é definida como:

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}$$

- Essa função possui as seguintes propriedades:

- ① $\text{sinc}(x)$ é uma função par
- ② $\text{sinc}(x) = 0 \implies \sin x = 0, x \neq 0 \implies x = k\pi, k \in \mathbb{Z}^*$
- ③ $\text{sinc}(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
- ④ $\text{sinc}(x)$ é um seno amortecido

- A partir dessas propriedades, é possível esboçar o gráfico de $\text{sinc}(x)$

Principais Transformadas de Fourier

- Impulso unitário no tempo - $\delta(t)$

$$\delta(t) \iff 1$$

- Impulso unitário no frequência - $\delta(\omega)$

$$\frac{1}{2\pi} \iff \delta(\omega) \implies 1 \iff 2\pi\delta(\omega)$$

- Impulso na frequência deslocado - $\delta(\omega \mp \omega_0)$

$$\frac{1}{2\pi} e^{\pm j\omega_0 t} \iff \delta(\omega \mp \omega_0) \implies e^{\pm j\omega_0 t} \iff 2\pi\delta(\omega \mp \omega_0)$$

Principais Transformadas de Fourier

- Cosseno - $\cos \omega_0 t$

$$\cos \omega_0 t = \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2} \Longleftrightarrow \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$$

- Seno - $\sin \omega_0 t$

$$\sin \omega_0 t = \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j} \Longleftrightarrow j\pi[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$$

- Sinal periódico

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t} \Longleftrightarrow X(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n \delta(\omega - n\omega_0)$$

Principais Transformadas de Fourier

- Porta unitária

$$x(t) = \text{ret}\left(\frac{x}{\tau}\right)$$
$$X(\omega) = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-j\omega t} dt = \frac{2}{\omega} \sin \frac{\omega\tau}{2} = \tau \text{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

- Deve-se observar que:

$$\text{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) = 0 \implies \frac{\omega\tau}{2} = k\pi \implies \omega = \frac{2k\pi}{\tau}$$

- Ou seja, a largura da porta é inversamente proporcional à largura do lóbulo principal da função sinc

Principais Transformadas de Fourier

- Triângulo unitário

$$\begin{aligned}x(t) &= \Delta\left(\frac{x}{\tau}\right) \\X(\omega) &= \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \left(1 - \frac{2|t|}{\tau}\right) e^{-j\omega t} dt \\&= \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-j\omega t} dt - \frac{2}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} |t| e^{-j\omega t} dt \\&= \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-j\omega t} dt + \frac{2}{\tau} \int_{-\tau/2}^0 t e^{-j\omega t} dt - \frac{2}{\tau} \int_0^{\tau/2} t e^{-j\omega t} dt\end{aligned}$$

Principais Transformadas de Fourier

- Triângulo unitário

$$\begin{aligned}X(\omega) &= \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-j\omega t} dt + \frac{2}{\tau} \int_{-\tau/2}^0 t \cos \omega t dt \\&\quad - \frac{2j}{\tau} \int_{-\tau/2}^0 t \sin \omega t dt - \frac{2}{\tau} \int_0^{\tau/2} t \cos \omega t dt \\&\quad + \frac{2j}{\tau} \int_0^{\tau/2} t \sin \omega t dt \\&= \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-j\omega t} dt + \frac{2}{\tau} \left[\int_{-\tau/2}^0 t \cos \omega t dt - \int_0^{\tau/2} t \cos \omega t dt \right] \\&\quad + \frac{2j}{\tau} \left[\int_0^{\tau/2} t \sin \omega t dt - \int_{-\tau/2}^0 t \sin \omega t dt \right]\end{aligned}$$

Principais Transformadas de Fourier

- Triângulo unitário

$$\begin{aligned}X(\omega) &= \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-j\omega t} dt - \frac{4}{\tau} \int_0^{\tau/2} t \cos \omega t dt \\&= \frac{2}{\omega} \sin \frac{\omega\tau}{2} - \frac{4}{\omega^2\tau} [\cos \omega t + \omega t \sin \omega t] \Big|_0^{\tau/2} \\&= \frac{2}{\omega} \sin \frac{\omega\tau}{2} - \frac{4}{\omega^2\tau} \left[\cos \frac{\omega\tau}{2} + \frac{\omega\tau}{2} \sin \frac{\omega\tau}{2} - 1 \right] \\&= \frac{4}{\omega^2\tau} [1 - \cos \frac{\omega\tau}{2}] = \frac{8}{\omega^2\tau} \sin^2 \frac{\omega\tau}{4} = \frac{\tau}{2} \text{sinc}^2 \left(\frac{\omega\tau}{4} \right)\end{aligned}$$

Conexão entre Laplace e Fourier

- A transformada de Laplace é dada por

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt$$

- Fazendo $s = j\omega$, tem-se que

$$X(s = j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$$

- Ou seja, se o eixo imaginário pertence à RDC de $X(s)$, então $X(j\omega) = X(\omega)$

Propriedades da Transformada de Fourier

- Linearidade

$$\sum_k a_k x_k(t) \iff \sum_k a_k X_k(\omega)$$

- Conjugação e simetria do conjugado

$$\text{se } x(t) \iff X(\omega)$$

$$\text{então } x^*(t) \iff X^*(-\omega)$$

$$\text{se } x(t) \text{ for real, então } X(-\omega) = X^*(\omega)$$

$$\text{ou } X^*(-\omega) = X(\omega)$$

Propriedades da Transformada de Fourier

- Dualidade

$$\begin{aligned} \text{se } x(t) &\Longleftrightarrow X(\omega) \\ \text{então } X(t) &\Longleftrightarrow 2\pi x(-\omega) \end{aligned}$$

- Prova:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \stackrel{(\omega=u)}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(u) e^{jut} du \\ 2\pi x(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} X(u) e^{jut} du \\ 2\pi x(-t) &= \int_{-\infty}^{\infty} X(u) e^{-jut} du, t = \omega \implies \\ 2\pi x(-\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} X(u) e^{-ju\omega} du \stackrel{(u=t)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} X(t) e^{-j\omega t} dt \end{aligned}$$

Propriedades da Transformada de Fourier

- Escalamento

$$\begin{aligned} \text{se } x(t) &\Longleftrightarrow X(\omega) \\ \text{então } x(at) &\Longleftrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(\frac{\omega}{a}\right) \end{aligned}$$

- Prova:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[x(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} x(at) e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} x(u) e^{-j\omega u/a} du \\ &= \begin{cases} \frac{1}{a} X\left(\frac{\omega}{a}\right), & a > 0 \\ -\frac{1}{a} X\left(\frac{\omega}{a}\right), & a < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Propriedades da Transformada de Fourier

- Deslocamento no tempo

$$\begin{aligned} \text{se } x(t) &\Longleftrightarrow X(\omega) \\ \text{então } x(t - t_0) &\Longleftrightarrow X(\omega)e^{-j\omega t_0} \end{aligned}$$

- Prova:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[x(t - t_0)] &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t - t_0)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(u)e^{-j\omega(u+t_0)} du \\ &= e^{-j\omega t_0} \int_{-\infty}^{\infty} x(u)e^{-j\omega u} du = e^{-j\omega t_0} X(\omega) \end{aligned}$$

- O deslocamento no tempo não altera o espectro de amplitude, mas atrasa o espectro de fase

$$X(\omega)e^{-j\omega t_0} = |X(\omega)|e^{j(\angle X(\omega) - \omega t_0)}$$

Propriedades da Transformada de Fourier

- Deslocamento na frequência

$$\begin{aligned} \text{se } x(t) &\Longleftrightarrow X(\omega) \\ \text{então } x(t)e^{j\omega_0 t} &\Longleftrightarrow X(\omega - \omega_0) \\ x(t)e^{-j\omega_0 t} &\Longleftrightarrow X(\omega + \omega_0) \\ x(t)\cos\omega_0 t &\Longleftrightarrow \frac{1}{2}[X(\omega - \omega_0) + X(\omega + \omega_0)] \end{aligned}$$

- Prova:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[x(t)e^{j\omega_0 t}] &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{j\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j(\omega - \omega_0)t} dt \\ &= X(\omega - \omega_0) \end{aligned}$$

Propriedades da Transformada de Fourier

- Convolução

$$\begin{aligned} \text{se } x_1(t) &\Longleftrightarrow X_1(\omega) \text{ e } x_2(t) \Longleftrightarrow X_2(\omega) \\ \text{então } x_1(t) * x_2(t) &\Longleftrightarrow X_1(\omega)X_2(\omega) \\ x_1(t)x_2(t) &\Longleftrightarrow \frac{1}{2\pi}X_1(\omega) * X_2(\omega) \end{aligned}$$

- Em sistemas LCIT

$$y(t) = x(t) * h(t) \implies Y(\omega) = X(\omega)H(\omega)$$

Propriedades da Transformada de Fourier

- Diferenciação e integração no tempo

$$\begin{aligned}\text{se } x(t) &\Longleftrightarrow X(\omega) \\ \text{então } \frac{dx(t)}{dt} &\Longleftrightarrow j\omega X(\omega) \\ \frac{d^n x(t)}{dt^n} &\Longleftrightarrow (j\omega)^n X(\omega) \\ \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau &\Longleftrightarrow \frac{X(\omega)}{j\omega} + \pi X(0)\delta(\omega)\end{aligned}$$

- Prova:

$$\begin{aligned}x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \implies \\ \frac{dx(t)}{dt} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) j\omega e^{j\omega t} d\omega = \mathcal{F}^{-1}[j\omega X(\omega)]\end{aligned}$$