

Análise de Sistemas em Tempo Contínuo usando a Transformada de Laplace

Edmar J Nascimento

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Elétrica

www.univasf.edu.br/~edmar.nascimento

April 12, 2021

Definições

- A transformada de Laplace de um sinal $x(t)$ é definida por:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt$$

- A transformada inversa de Laplace de $X(s)$ é dada por:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(s)e^{st} ds$$

- A integração na primeira expressão é de $-\infty$ a ∞
- Por essa razão, essa expressão é conhecida como transformada de Laplace Bilateral
- A transformada e sua inversa são chamados de **par de transformada**

Definições

- Simbolicamente, o par de transformadas é representado por:

$$X(s) = \mathcal{L}[x(t)], \quad x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)]$$

- Combinando-se estas expressões, tem-se que:

$$\mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{L}[x(t)]\} = x(t), \quad \mathcal{L}\{\mathcal{L}^{-1}[X(s)]\} = X(s)$$

- Uma representação bastante comum é dada por:

$$x(t) \iff X(s)$$

Definições

- A transformada de Laplace é uma operação linear, ou seja, se

$$x_1(t) \iff X_1(s), \quad x_2(t) \iff X_2(s)$$

- Então

$$a_1x_1(t) + a_2x_2(t) \iff a_1X_1(s) + a_2X_2(s)$$

- s é uma variável complexa e a transformada pode não existir para todos os valores de s
 - Região de Convergência (RDC) é o nome da região do plano complexo para a qual a transformada de Laplace existe

Exemplo

Exemplo

Calcular a transformada de Laplace e a RDC para um sinal

$$x(t) = e^{-at}u(t)$$

Resposta

$$\begin{aligned} X(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s+a)t} dt \\ &= -\frac{1}{s+a} e^{-(s+a)t} \Big|_0^{\infty} = -\frac{1}{s+a} (0 - 1) = \frac{1}{s+a}, \operatorname{Re}(s) > -a \end{aligned}$$

Exemplo

Exemplo

Calcular a transformada de Laplace e a RDC para um sinal

$$x(t) = -e^{-at}u(-t)$$

Resposta

$$\begin{aligned} X(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt = - \int_{-\infty}^0 e^{-(s+a)t} dt \\ &= \frac{1}{s+a} e^{-(s+a)t} \Big|_{-\infty}^0 = \frac{1}{s+a} (1 - 0) = \frac{1}{s+a}, \operatorname{Re}(s) < -a \end{aligned}$$

Região de Convergência

- A região de convergência é importante para a determinação da transformada de Laplace inversa
- Dois sinais diferentes podem ter a mesma transformada, mas com RDCs diferentes
- A transformada inversa é obtida calculando-se uma integral ao longo de um caminho no plano complexo
 - Procedimento complicado, pois exige conhecimentos de funções de variáveis complexas (disciplina: Métodos Matemáticos)
- O procedimento usual é utilizar uma tabela com os pares de transformadas para os sinais mais comuns

Transformada Unilateral

- Como os sinais de interesse prático são causais, define-se a **Transformada de Laplace Unilateral**
 - A transformada unilateral não apresenta ambiguidade
 - A correspondência entre um sinal e uma transformada é um-a-um
- A transformada de Laplace (unilateral) é definida como:

$$X(s) = \int_{0^-}^{\infty} x(t)e^{-st} dt$$

- Como a correspondência é um-a-um, geralmente se omite a RDC da transformada unilateral

Tabela dos Pares de Transformadas

$\delta(t)$	1
$u(t)$	$\frac{1}{s}$
$tu(t)$	$\frac{1}{s^2}$
$t^n u(t)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$e^{\lambda t} u(t)$	$\frac{1}{s - \lambda}$
$t e^{\lambda t} u(t)$	$\frac{1}{(s - \lambda)^2}$
$t^n e^{\lambda t} u(t)$	$\frac{n!}{(s - \lambda)^{n+1}}$
$\cos bt \, u(t)$	$\frac{s}{s^2 + b^2}$
$\sin bt \, u(t)$	$\frac{b}{s^2 + b^2}$
$e^{-at} \cos bt \, u(t)$	$\frac{s + a}{(s + a)^2 + b^2}$
$e^{-at} \sin bt \, u(t)$	$\frac{b}{(s + a)^2 + b^2}$
$re^{-at} \cos(bt + \theta) u(t)$	$\frac{(r \cos \theta)s + (ar \cos \theta - br \sin \theta)}{s^2 + 2as + (a^2 + b^2)}$
$re^{-at} \cos(bt + \theta) u(t)$	$\frac{0.5re^{j\theta}}{s + a - jb} + \frac{0.5re^{-j\theta}}{s + a + jb}$
$re^{-at} \cos(bt + \theta) u(t)$	$\frac{As + B}{s^2 + 2as + c}$
$r = \sqrt{\frac{A^2 + B^2 - 2ABa}{c - a^2}}, \theta = \tan^{-1} \frac{As + B}{A\sqrt{c - a^2}}$	
$b = \sqrt{c - a^2}$	
$e^{-at} \left[A \cos bt + \frac{B - Aa}{b} \sin bt \right] u(t)$	$\frac{As + B}{s^2 + 2as + c}$
$b = \sqrt{c - a^2}$	

Transformada Inversa

- A maioria das transformadas de interesse prático são funções racionais, ou seja:

$$X(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

- O procedimento para a obtenção da transformada inversa consiste então em:
 - Representar $X(s)$ em frações parciais
 - Aplicar os pares de transformada da tabela

Propriedades da Transformada de Laplace

- As transformadas que não estão tabeladas podem ser calculadas com o auxílio de algumas propriedades
- Linearidade

$$\begin{aligned} \text{se } x_1(t) &\Longleftrightarrow X_1(s) \text{ e } x_2(t) \Longleftrightarrow X_2(s) \\ \text{então } a_1x_1(t) + a_2x_2(t) &\Longleftrightarrow a_1X_1(s) + a_2X_2(s) \end{aligned}$$

- Deslocamento no tempo

$$\begin{aligned} \text{se } x(t) &\Longleftrightarrow X(s) \\ \text{então } x(t - t_0) &\Longleftrightarrow X(s)e^{-st_0} \quad (t_0 \geq 0) \end{aligned}$$

Propriedades da Transformada de Laplace

- Deslocamento em frequência

$$\begin{aligned} \text{se } x(t) &\Longleftrightarrow X(s) \\ \text{então } x(t)e^{s_0 t} &\Longleftrightarrow X(s - s_0) \end{aligned}$$

- Diferenciação no tempo

$$\begin{aligned} \text{se } x(t) &\Longleftrightarrow X(s) \\ \text{então } \frac{dx(t)}{dt} &\Longleftrightarrow sX(s) - x(0^-) \\ \frac{d^2x(t)}{dt^2} &\Longleftrightarrow s^2X(s) - sx(0^-) - \dot{x}(0^-) \\ \frac{d^nx(t)}{dt^n} &\Longleftrightarrow s^nX(s) - \sum_{k=1}^n s^{n-k}x^{(k-1)}(0^-) \end{aligned}$$

Propriedades da Transformada de Laplace

- Diferenciação na frequência

$$\begin{aligned} \text{se } x(t) &\Longleftrightarrow X(s) \\ \text{então } tx(t) &\Longleftrightarrow -\frac{dX(s)}{ds} \end{aligned}$$

- Integração no tempo

$$\begin{aligned} \text{se } x(t) &\Longleftrightarrow X(s) \\ \text{então } \int_{0^-}^t x(\tau) d\tau &\Longleftrightarrow \frac{X(s)}{s} \\ \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau &\Longleftrightarrow \frac{X(s)}{s} + \frac{\int_{-\infty}^{0^-} x(\tau) d\tau}{s} \end{aligned}$$

Propriedades da Transformada de Laplace

- Escalonamento

$$\begin{aligned}\text{se } x(t) &\Longleftrightarrow X(s) \\ \text{então } x(at) &\Longleftrightarrow \frac{1}{a}X\left(\frac{s}{a}\right)\end{aligned}$$

- Convolução no tempo e na frequência

$$\begin{aligned}\text{se } x_1(t) &\Longleftrightarrow X_1(s) \text{ e } x_2(t) \Longleftrightarrow X_2(s) \\ \text{então } x_1(t) * x_2(t) &\Longleftrightarrow X_1(s)X_2(s) \\ x_1(t)x_2(t) &\Longleftrightarrow \frac{1}{2\pi j}[X_1(s) * X_2(s)]\end{aligned}$$

Propriedades da Transformada de Laplace

- Aplicação da convolução em sistemas lineares

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau} d\tau = \mathcal{L}\{h(t)\}$$

- Ou seja, a função de transferência $H(s)$ é a transformada de Laplace da resposta ao impulso $h(t)$
- Para a resposta de estado nulo, tem-se

$$y(t) = x(t) * h(t) \iff Y(s) = X(s)H(s)$$
$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\mathcal{L}[\text{resp. estado nulo}]}{\mathcal{L}[\text{entrada}]}$$

Propriedades da Transformada de Laplace

- Teorema do valor inicial

- O objetivo é conhecer o valor inicial de $x(t)$ a partir de $X(s)$
- Se $x(t)$ e $dx(t)/dt$ possuem transformada de Laplace, então

$$x(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s)$$

- Esse teorema se aplica se $X(s)$ for estritamente própria ($M < N$)

Propriedades da Transformada de Laplace

- Teorema do valor final

- O objetivo é conhecer o valor final de $x(t)$ a partir de $X(s)$
- Se $x(t)$ e $dx(t)/dt$ possuem transformada de Laplace, então

$$x(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s)$$

- Esse teorema se aplica se os pólos de $X(s)$ estiverem no SPE (incluindo também o pólo $s = 0$)

Solução de Equações Diferenciais

- Vimos que

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \iff s^n X(s) - \sum_{k=1}^n s^{n-k} x^{(k-1)}(0^-)$$

- Além disso, a transformada de Laplace é uma operação linear de modo que

$$\sum_k a_k x_k(t) \iff \sum_k a_k X_k(s)$$

- Usando essas duas propriedades é possível resolver uma equação diferencial usando a transformada de Laplace

Solução de Equações Diferenciais

- É possível separar as componentes de entrada nula e de estado nulo na solução total
- Os termos da resposta de entrada nula dependem apenas das condições iniciais
- Os termos da resposta de estado nulo dependem apenas da entrada $x(t)$

Resposta de Estado Nulo

- Vimos que um sistema LCIT de ordem N pode ser escrito como

$$Q(D)y(t) = P(D)x(t)$$

$$Q(D) = D^N + a_1 D^{N-1} + \dots + a_{N-1} D + a_N$$

$$P(D) = b_0 D^N + b_1 D^{N-1} + \dots + b_{N-1} D + b_N$$

- Quando o estado é nulo, tem-se que:

$$y(0^-) = \dot{y}(0^-) = \dots = y^{(N-1)}(0^-) = 0$$

- Se $x(t)$ for causal, então:

$$x(0^-) = \dot{x}(0^-) = \dots = x^{(N-1)}(0^-) = 0$$

Resposta de Estado Nulo

- Sendo assim, tem-se que:

$$D^r y(t) = \frac{d^r}{dt^r} y(t) \iff s^r Y(s)$$

$$D^k x(t) = \frac{d^k}{dt^k} x(t) \iff s^k X(s)$$

- Logo a transformada de Laplace da equação do sistema é dada por

$$\begin{aligned} & (s^N + a_1 s^{N-1} + \cdots + a_{N-1} s + a_N) Y(s) \\ &= (b_0 s^N + b_1 s^{N-1} + \cdots + b_{N-1} s + b_N) X(s) \end{aligned}$$

Resposta de Estado Nulo

$$\begin{aligned}Y(s) &= \frac{(b_0 s^N + b_1 s^{N-1} + \dots + b_{N-1} s + b_N)}{(s^N + a_1 s^{N-1} + \dots + a_{N-1} s + a_N)} X(s) \\&= \frac{P(s)}{Q(s)} X(s) = H(s) X(s) \\H(s) &= \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{P(s)}{Q(s)}\end{aligned}$$

- As raízes do denominador de $H(s)$ são chamadas de pólos do sistema
- As raízes do numerador de $H(s)$ são chamadas de zeros do sistema

Transformada de Laplace Bilateral

- Vimos que para sinais não causais, o par de transformadas de Laplace é definido como

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt, \quad x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(s)e^{st}dt$$

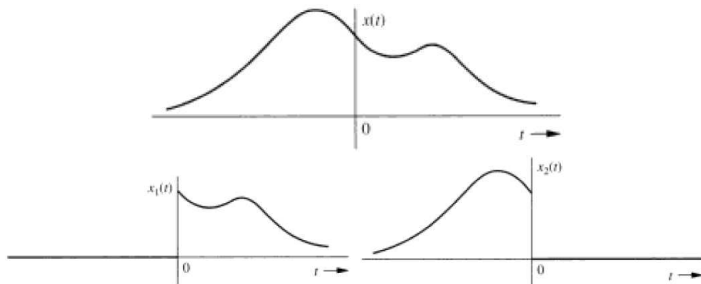
- Vimos também que a transformada bilateral não é única, já que

$$x(t) = e^{-at}u(t) \iff X(s) = \frac{1}{s+a}, \operatorname{Re}(s) > -a$$

$$x(t) = -e^{-at}u(-t) \iff X(s) = \frac{1}{s+a}, \operatorname{Re}(s) < -a$$

Transformada de Laplace Bilateral

- A transformada de Laplace bilateral pode ser calculada diretamente pela definição ou através de um procedimento que usa a tabela de transformadas unilaterais
- Um sinal não causal $x(t)$ pode ser decomposto na soma de um sinal causal $x_1(t)$ e de um sinal anticausal $x_2(t)$



Transformada de Laplace Bilateral

- Com essa decomposição, tem-se que:

$$\begin{aligned} X(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt \\ &= \int_{-\infty}^{0^-} x_2(t)e^{-st} dt + \int_{0^-}^{\infty} x_1(t)e^{-st} dt = X_2(s) + X_1(s) \end{aligned}$$

- $X_1(s)$ é a transformada unilateral de $x_1(t)$ e portanto, pode ser obtida a partir de uma tabela

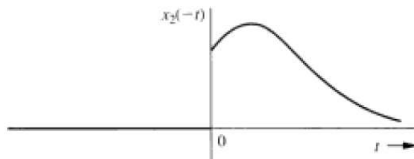
$$\begin{aligned} X_2(s) &= \int_{-\infty}^{0^-} x_2(t)e^{-st} dt = - \int_{\infty}^{0^+} x_2(-u)e^{su} du \\ &= \int_{0^+}^{\infty} x_2(-t)e^{st} dt \end{aligned}$$

Transformada de Laplace Bilateral

- Então

$$X_2(-s) = \int_{0^+}^{\infty} x_2(-t)e^{-st}dt = \int_{0^-}^{\infty} x_2(-t)e^{-st}dt$$

- Ou seja, $X_2(-s)$ é a transformada unilateral de $x_2(-t)$ e portanto, pode ser obtida a partir de uma tabela

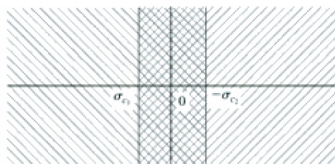





Transformada de Laplace Bilateral

- O procedimento para se obter a transformada de Laplace bilateral é o seguinte
 - 1 Dividir $x(t)$ em $x_1(t)$ (causal) e $x_2(t)$ (anticausal)
 - 2 Determinar $X_1(s) \iff x_1(t)$
 - 3 Determinar $X_2(s)$ calculando $x_2(-t) \iff X_2(-s)$ e em seguida trocando s por $-s$
 - 4 Fazer $X(s) = X_1(s) + X_2(s)$
- A RDC de um sinal causal é da forma $Re\{s\} > \sigma$, sendo assim
 - $X_1(s)$ tem RDC $Re\{s\} > \sigma_{c_1}$
 - $X_2(-s)$ tem RDC $Re\{s\} > \sigma_{c_2}$

Transformada de Laplace Bilateral

- Assim,
 - $X_2(s)$ tem RDC $\text{Re}\{s\} < -\sigma_{c_2}$
 - $X(s) = X_1(s) + X_2(s)$ tem RDC $\sigma_{c_1} < \text{Re}\{s\} < -\sigma_{c_2}$
- Os pólos de $X_1(s)$ estão localizados à esquerda da RDC
- Os pólos de $X_2(s)$ estão localizados à direita da RDC



-  Região de convergência para a componente causal de $x(t)$
-  Região de convergência para a componente anticausal de $x(t)$
-  Região (faixa) de convergência de todo $x(t)$

Propriedades da Transformada Bilateral

- As propriedades da transformada de Laplace bilateral são semelhantes às da unilateral
- Deve-se, contudo, prestar atenção à RDC
- Linearidade

$$\begin{aligned} &\text{se } x_1(t) \iff X_1(s) \text{ e } x_2(t) \iff X_2(s) \\ &\text{então } a_1x_1(t) + a_2x_2(t) \iff a_1X_1(s) + a_2X_2(s) \end{aligned}$$

- A RDC de $a_1X_1(s) + a_2X_2(s)$ é a intersecção das RDCs de $X_1(s)$ e $X_2(s)$

Propriedades da Transformada Bilateral

- Deslocamento no tempo

$$x(t - t_0) \iff X(s)e^{-st_0}$$

- A RDC de $X(s)e^{-st_0}$ é idêntica à RDC de $X(s)$
- Deslocamento em frequência

$$\begin{aligned} \text{se } x(t) &\iff X(s), \quad a < \operatorname{Re}\{s\} < b \\ \text{então } x(t)e^{s_0 t} &\iff X(s - s_0) \end{aligned}$$

- A RDC de $X(s - s_0)$ é $a + c < \operatorname{Re}\{s\} < b + c$, com $c = \operatorname{Re}\{s_0\}$

Propriedades da Transformada Bilateral

- Convolução no tempo

$$\begin{aligned} \text{se } x_1(t) &\Longleftrightarrow X_1(s) \text{ e } x_2(t) \Longleftrightarrow X_2(s) \\ \text{então } x_1(t) * x_2(t) &\Longleftrightarrow X_1(s)X_2(s) \end{aligned}$$

- A RDC de $X_1(s)X_2(s)$ é a intersecção das RDCs de $X_1(s)$ e $X_2(s)$

- Reversão no tempo

$$\begin{aligned} \text{se } x(t) &\Longleftrightarrow X(s), \quad a < \operatorname{Re}\{s\} < b \\ \text{então } x(-t) &\Longleftrightarrow X(-s) \end{aligned}$$

- A RDC de $X(-s)$ é $-b < \operatorname{Re}\{s\} < -a$

Transformada de Laplace Bilateral

- A transformada de Laplace bilateral pode ser utilizada para analisar sistemas LCIT não causais ou quando a entrada é não causal
- Desde que a RDC de $X(s)H(s)$ exista, pode-se calcular

$$y(t) = \mathcal{L}\{X(s)H(s)\}$$