

# Análise no Domínio do Tempo de Sistemas em Tempo Discreto

Edmar J Nascimento

Universidade Federal do Vale do São Francisco  
Colegiado de Engenharia Elétrica

*[www.univasf.edu.br/~edmar.nascimento](http://www.univasf.edu.br/~edmar.nascimento)*

March 29, 2021

# Introdução

- Sinais discretos são sinais definidos em instantes discretos de tempo
  - Representados por  $x[n]$ ,  $n \in \mathbb{Z}$
  - Podem ser discretos por natureza ou resultado de uma operação de discretização (passagem do tempo contínuo para o tempo discreto)
- Sistemas discretos são aqueles que processam sinais discretos, resultando em um sinal de saída também discreto
- Sinais contínuos também podem ser processados por sistemas discretos desde que eles sejam discretizados previamente

$$x(t) = e^{-t} \rightarrow x(nT_s) = e^{-nT_s} \rightarrow x[n] = e^{-0,1n} \quad (T_s = 0,1)$$

# Modelos de Sinais Discretos

- Impulso discreto

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

- Degrau unitário

$$u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

- O de grau unitário é útil para representar sinais discretos causais, bem como abreviar notações

# Exponencial Discreta

- A exponencial discreta  $e^{\lambda n}$  é representada frequentemente na forma  $\gamma^n$ , sendo

$$\gamma^n = e^{\lambda n} \quad (\gamma = e^\lambda \text{ ou } \lambda = \ln \gamma)$$

- O plano  $\lambda$  pode ser mapeado para o plano  $\gamma$ 
  - Eixo imaginário ( $\lambda$ ) - Círculo unitário ( $\gamma$ )

$$\lambda = j\omega \rightarrow \gamma = e^{j\omega} \rightarrow |\gamma| = |e^{j\omega}| = 1$$

- SPE ( $\lambda$ ) - Interior do círculo unitário ( $\gamma$ )

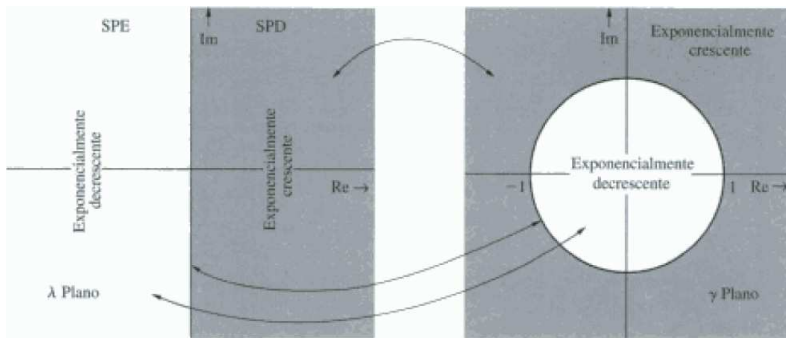
$$\lambda = a + j\omega \rightarrow \gamma = e^a e^{j\omega} \rightarrow |\gamma| = |e^a| < 1 \quad (a < 0)$$

- SPD ( $\lambda$ ) - Exterior do círculo unitário ( $\gamma$ )

$$\lambda = a + j\omega \rightarrow \gamma = e^a e^{j\omega} \rightarrow |\gamma| = |e^a| > 1 \quad (a > 0)$$

# Exponencial Discreta

- Mapeamento do plano  $\lambda$  para o plano  $\gamma$



# Senóide Discreta

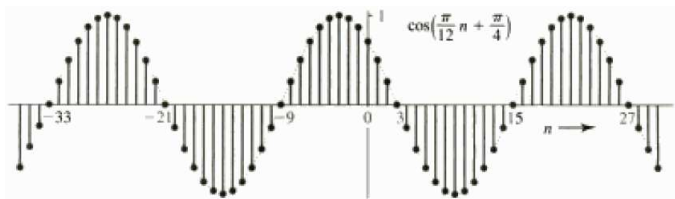
- Uma senóide discreta no tempo é representada por

$$x[n] = C \cos(\Omega n + \theta) = C \cos(2\pi \mathcal{F} n + \theta)$$

- $C \rightarrow$  amplitude
- $\theta \rightarrow$  fase em radianos
- $\Omega \rightarrow$  frequência em radianos/amostra
- $\Omega n \rightarrow$  ângulo em radianos
- $\mathcal{F} = \frac{1}{N_0} \rightarrow$  frequência em ciclos/amostra
- $N_0 \rightarrow$  período

# Senóide Discreta

- Senóide discreta  $\cos\left(\frac{\pi}{12}n + \frac{\pi}{4}\right)$



# Exponencial Complexa Discreta

- Uma exponencial complexa discreta é representada por  $e^{j\Omega n}$
- A sua relação com a senóide discreta é dada por

$$\begin{aligned}e^{j\Omega n} &= (\cos \Omega n + j \sin \Omega n) \\e^{-j\Omega n} &= (\cos \Omega n - j \sin \Omega n) \\ \cos \Omega n &= \frac{e^{j\Omega n} + e^{-j\Omega n}}{2} \\ \sin \Omega n &= \frac{e^{j\Omega n} - e^{-j\Omega n}}{2j}\end{aligned}$$



# Energia e Potência de Sinais Discretos

- A energia de um sinal discreto  $x[n]$  é dada por

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$$

- Se  $0 < E_x < \infty$  o sinal é dito ser de energia
- A potência de um sinal  $x[n]$  é dada por

$$P_x = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N |x[n]|^2$$

- Se  $0 < P_x < \infty$  o sinal é dito ser de potência
- Se  $x[n]$  for periódico, a potência pode ser calculada dividindo-se a energia de um período pelo tamanho do período

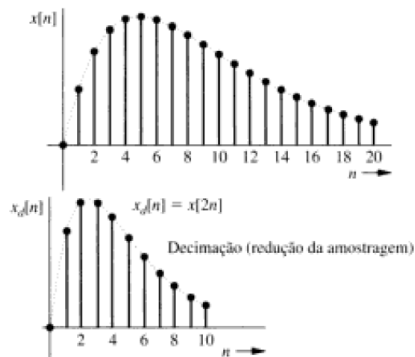
# Operações com Sinais

- Deslocamento  $x_s[n] = x[n - M]$ ,  $M \in \mathbb{Z}$ 
  - $M > 0 \rightarrow$  deslocamento para a direita (atraso)
  - $M < 0 \rightarrow$  deslocamento para a esquerda (avanço)
- Reversão no tempo  $x_r[n] = x[-n]$
- Alteração na taxa de amostragem: Decimação e Interpolação
- Decimação (compressão)  $x_d[n] = x[Mn]$ ,  $M \in \mathbb{Z}$ 
  - Reduz a quantidade de amostras por um fator de  $M$
  - Há uma perda de informação
- Interpolação (expansão): 2 etapas (expansão e interpolação)
  - Amostras são criadas a partir de outras amostras

$$x_e[n] = \left\{ \begin{array}{ll} x[n/L]; & n = kL \ (k \in \mathbb{Z}) \\ 0; & \text{c.c.} \end{array} \right\}$$

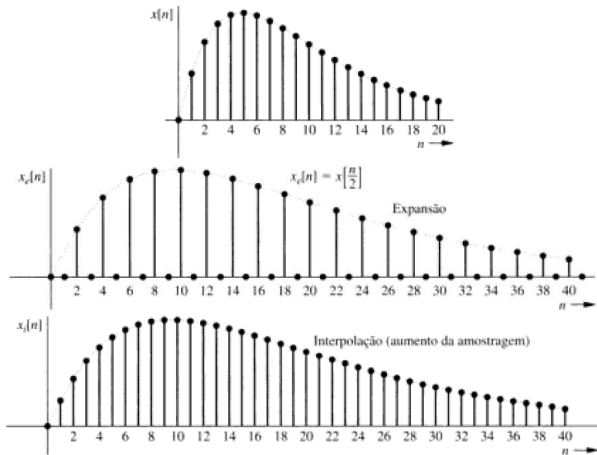
# Decimação

- $x_d[n] = x[2n]$



# Interpolação

•  $x_d[n] = x[n/2]$



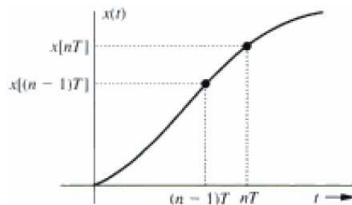
# Sistemas Discretos

- Um sistema discreto é um sistema que processa sinais discretos resultando em saídas discretas
- Sistemas discretos podem ser expressados através de equações de diferença
- Esses sistemas podem ser inerentemente discretos ou podem ser obtidos a partir da discretização de sistemas contínuos no tempo
- Os softwares de simulação transformam os sistemas contínuos em discretos
  - O usuário tem a "ilusão" de estar trabalhando com um sistema contínuo

# Sistemas Discretos

## Exemplo

Projetar um sistema discreto para diferenciar sinais contínuos



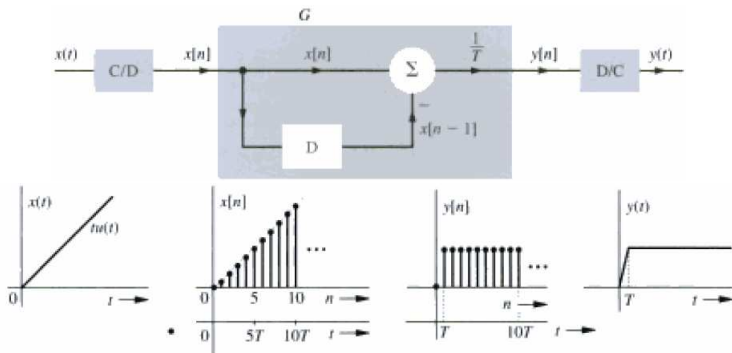
## Solução

$$\begin{aligned}y(nT) &= \left. \frac{dx(t)}{dt} \right|_{t=nT} = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{x(nT) - x((n-1)T)}{T} \\y[n] &= \lim_{T \rightarrow 0} \frac{x[n] - x[n-1]}{T} \\y[n] &= \frac{x[n] - x[n-1]}{T} = \frac{x[n]}{T} - \frac{x[n-1]}{T} \quad (T \text{ pequeno})\end{aligned}$$

T é escolhido de acordo com o sinal a ser diferenciado.

# Sistemas Discretos

## Solução





- Em geral, uma equação diferencial qualquer pode ser convertida em uma equação de diferenças
- Considere o exemplo da equação diferencial de primeira ordem abaixo

$$\frac{dy(t)}{dt} + cy(t) = x(t) \rightarrow \lim_{T \rightarrow 0} \frac{y[n] - y[n-1]}{T} + cy[n] = x[n]$$

- Se  $T$  é pequeno, então pode-se ter a aproximação

$$\begin{aligned} \frac{y[n] - y[n-1]}{T} + cy[n] &= x[n] \rightarrow \\ y[n] + \alpha y[n-1] &= \beta x[n] \text{ ou} \\ y[n+1] + \alpha y[n] &= \beta x[n+1] \end{aligned}$$

# Classificação de Sistemas Discretos

- A classificação dos sistemas discretos segue a mesma linha dos sistemas contínuos
- Sendo assim, os sistemas discretos podem ser
  - Lineares ou não lineares
  - Variantes ou invariantes no tempo
  - Causais ou não causais
  - Inversíveis ou não inversíveis
  - Estáveis ou instáveis
  - Com memória ou sem memória