

Análise de Sistemas em Tempo Discreto usando a Transformada Z

Edmar J Nascimento

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Elétrica

www.univasf.edu.br/~edmar.nascimento

April 23, 2021

Definições

- A transformada Z é o equivalente da transformada de Laplace para sistemas discretos
- A transformada Z de um sinal $x[n]$ é definida por:

$$X[z] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

- A transformada Z inversa de $X[z]$ é dada por:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint X[z]z^{n-1}dz$$

- Essa integral é uma integral de contorno na direção anti-horária em um caminho fechado no plano complexo

Definições

- Simbolicamente, o par de transformadas é representado por:

$$X[z] = \mathcal{Z}\{x[n]\}, \quad x[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{X[z]\}$$

- Combinando-se estas expressões, tem-se que:

$$\mathcal{Z}^{-1}\{\mathcal{Z}\{x[n]\}\} = x[n], \quad \mathcal{Z}\{\mathcal{Z}^{-1}\{X[z]\}\} = X[z]$$

- Uma representação bastante comum é dada por:

$$x[n] \iff X[z]$$

Definições

- A transformada Z também é uma operação linear, ou seja, se

$$x_1[n] \iff X_1[z], \quad x_2[n] \iff X_2[z]$$

- Então

$$a_1x_1[n] + a_2x_2[n] \iff a_1X_1[z] + a_2X_2[z]$$

- z é uma variável complexa e a transformada pode não existir para todos os valores de z
 - Região de Convergência (RDC) é o nome da região do plano complexo para a qual a transformada Z existe

Região de Convergência

- A região de convergência é importante para a determinação da transformada Z inversa
- Dois sinais diferentes podem ter a mesma transformada, mas com RDCs diferentes
- Assim como foi feito para a transformada de Laplace inversa, o procedimento usual para se determinar a transformada Z inversa é utilizar uma tabela com os pares de transformadas mais comuns

Transformada Z Unilateral

- Como os sinais de interesse prático são causais, define-se a **Transformada Z Unilateral**
 - A transformada Z unilateral não apresenta ambiguidade
 - A correspondência entre um sinal e uma transformada é um-a-um
- A transformada Z unilateral é definida como:

$$X[z] = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

- Como a correspondência é um-a-um, geralmente se omite a RDC da transformada unilateral

Transformada Z Inversa

- O procedimento para a obtenção da transformada Z inversa é similar ao usado na transformada de Laplace
- Entretanto, deve-se observar que

$$\gamma^{n-1}u[n-1] \iff \frac{1}{z-\gamma}$$

- Ou seja, a expansão em frações parciais usual leva ao aparecimento de termos em $u[n-1]$ e não em $u[n]$
- Para se obter uma expressão em termos de $u[n]$ é necessário modificar o procedimento
 - Expandir em frações parciais $X[z]/z$
 - Isolar $X[z]$ e utilizar a tabela

Função de Transferência

- Considere um sistema LDIT com resposta ao impulso $h[n]$
- Se a entrada desse sistema é z^n , então:

$$x[n] = z^n \longrightarrow y[n] = h[n] * z^n$$

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]z^{n-m} = z^n \underbrace{\sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]z^{-m}}_{H[z]} = z^n H[z]$$

$$H[z] = \mathcal{Z}\{h[n]\}$$

- $H[z]$ é a função de transferência do sistema discreto com resposta ao impulso $h[n]$
- Se o sistema LDIT é da forma $Q[E]y[n] = P[E]x[n]$, então

$$H[z] = \frac{P[z]}{Q[z]}$$

Propriedades da Transformada Z

- As propriedades da transformada Z são úteis no cálculo de algumas transformadas, bem como na resolução de sistemas de equações de diferenças
- Deslocamento para a direita (atraso)

$$\begin{aligned} \text{se } x[n]u[n] &\iff X[z] \\ \text{então } x[n-1]u[n-1] &\iff \frac{X[z]}{z} = z^{-1}X[z] \\ x[n-m]u[n-m] &\iff \frac{X[z]}{z^m} = z^{-m}X[z] \end{aligned}$$

Propriedades da Transformada Z

- Deslocamento para a direita (atraso)
 - Uma outra versão dessa propriedade pode ser obtida notando-se que:

$$\begin{aligned}x[n-1]u[n-1] &= x[n-1](u[n] - \delta[n]) \\&= x[n-1]u[n] - \delta[n]x[n-1] \\&= x[n-1]u[n] - \delta[n]x[-1]\end{aligned}$$

- Então

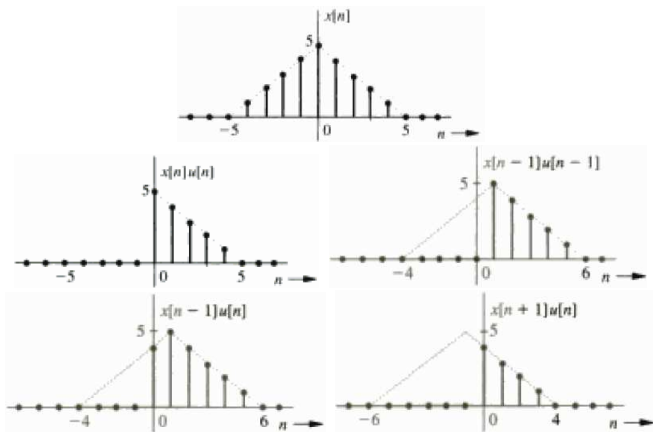
$$\begin{aligned}\text{se } x[n]u[n] &\iff X[z] \\ \text{então } x[n-1]u[n] &\iff \frac{X[z]}{z} + x[-1] \\ x[n-m]u[n] &\iff z^{-m}X[z] + z^{-m} \sum_{k=1}^m x[-k]z^k\end{aligned}$$

Propriedades da Transformada Z

- Deslocamento para a esquerda (avanço)

$$\begin{aligned}\text{se } x[n]u[n] &\iff X[z] \\ \text{então } x[n+1]u[n] &\iff zX[z] - zx[0] \\ x[n+m]u[n] &\iff z^m X[z] - z^m \sum_{k=0}^{m-1} x[k]z^{-k}\end{aligned}$$

Tipos de Deslocamento



Propriedades da Transformada Z

- Convolução no tempo e na frequência

$$\begin{aligned} \text{se } x_1[n] &\Longleftrightarrow X_1[z] \text{ e } x_2[n] \Longleftrightarrow X_2[z] \\ \text{então } x_1[n] * x_2[n] &\Longleftrightarrow X_1[z]X_2[z] \\ x_1[n]x_2[n] &\Longleftrightarrow \frac{1}{2\pi j} \oint X_1[u]X_2\left[\frac{z}{u}\right]u^{-1}du \end{aligned}$$

- Para sistemas LDIT, tem-se que:

$$y[n] = x[n] * h[n] \Longleftrightarrow Y[z] = X[z]H[z]$$

Propriedades da Transformada Z

- Multiplicação por γ^n

$$\begin{aligned} \text{se } x[n]u[n] &\Longleftrightarrow X[z] \\ \text{então } \gamma^n x[n]u[n] &\Longleftrightarrow X\left[\frac{z}{\gamma}\right] \end{aligned}$$

- Multiplicação por n

$$\begin{aligned} \text{se } x[n]u[n] &\Longleftrightarrow X[z] \\ \text{então } nx[n]u[n] &\Longleftrightarrow -z \frac{dX[z]}{dz} \end{aligned}$$

Propriedades da Transformada Z

- Valor inicial

$$\begin{aligned} &\text{se } x[n] \text{ é causal} \\ &\text{então } x[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} X[z] \end{aligned}$$

- Valor final

$$\begin{aligned} &\text{se } (z - 1)X[z] \text{ não possuir pólos fora do círculo unitário} \\ &\text{então } \lim_{N \rightarrow \infty} x[N] = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)X[z] \end{aligned}$$

Solução de Equações de Diferenças

- Vimos que:

$$x[n - m]u[n] \iff z^{-m}X[z] + z^{-m} \sum_{k=1}^m x[-k]z^k$$

$$x[n + m]u[n] \iff z^mX[z] - z^m \sum_{k=0}^{m-1} x[k]z^{-k}$$

- Para calcular a transformada Z de $x[n - m]u[n]$ é necessário dispor dos valores $x[-1], x[-2], \dots, x[-m]$
- Para calcular a transformada Z de $x[n + m]u[n]$ é necessário dispor dos valores $x[0], x[1], \dots, x[m - 1]$

Solução de Equações de Diferenças

- Assim como foi feito com a transformada de Laplace, é possível separar as componentes da resposta total
- A resposta de estado nulo depende apenas da entrada, enquanto que a resposta de entrada nula depende apenas do estado (condições iniciais)

Resposta de Estado Nulo

- Vimos que um sistema LDIT de ordem N pode ser escrito na forma de avanço como

$$y[n + N] + a_1 y[n + N - 1] + \cdots + a_N y[n] = \\ b_0 x[n + N] + b_1 x[n + N - 1] + \cdots + b_N x[n]$$

- Na forma de atraso, essa equação é escrita como

$$y[n] + a_1 y[n - 1] + \cdots + a_N y[n - N] = \\ b_0 x[n] + b_1 x[n - 1] + \cdots + b_N x[n - N]$$

Resposta de Estado Nulo

- Quando o estado é nulo, tem-se que:

$$y[-1] = y[-2] = \cdots = y[-N] = 0$$

- Se $x[n]$ for causal, então:

$$x[-1] = x[-2] = \cdots = x[-N] = 0$$

- Assim, quando o estado é nulo e o sinal de entrada é causal, então:

$$\begin{aligned} y[n-m]u[n] &\Longleftrightarrow \frac{1}{z^m} Y[z] \\ x[n-m]u[n] &\Longleftrightarrow \frac{1}{z^m} X[z], \quad m = 1, 2, \dots, N \end{aligned}$$

Resposta de Estado Nulo

- A transformada Z da equação de diferenças é

$$\begin{aligned}\left(1 + \frac{a_1}{z} + \dots + \frac{a_N}{z^N}\right) Y[z] &= \left(b_0 + \frac{b_1}{z} + \dots + \frac{b_N}{z^N}\right) X[z] \\ (z^N + a_1 z^{N-1} + \dots + a_N) Y[z] &= (b_0 z^N + b_1 z^{N-1} + \dots + b_N) X[z]\end{aligned}$$

- Portanto,

$$Y[z] = \frac{b_0 z^N + b_1 z^{N-1} + \dots + b_N}{z^N + a_1 z^{N-1} + \dots + a_N} X[z] = \underbrace{\frac{P[z]}{Q[z]}}_{H[z]} X[z]$$

$$H[z] \equiv \frac{Y[z]}{X[z]} = \frac{\mathcal{Z}[\text{resp. estado nulo}]}{\mathcal{Z}[\text{entrada}]}$$