

Análise no Domínio do Tempo de Sistemas em Tempo Contínuo

Edmar J Nascimento

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Elétrica

www.univasf.edu.br/~edmar.nascimento

March 18, 2021

Introdução

- Uma classe importante de sistemas lineares são os **Sistemas Lineares Contínuos Invariantes no Tempo** (LCIT)
 - Sistemas lineares diferenciais
- A análise desses sistemas pode ser realizada no domínio do tempo ou da frequência
 - No domínio da frequência, a análise é feita através das transformadas de Laplace e de Fourier

Sistemas Lineares Diferenciais

- Seja $x(t)$ a entrada e $y(t)$ a saída de um sistema LCIT, então

$$\begin{aligned} \frac{d^N y}{dt^N} + a_1 \frac{d^{N-1} y}{dt^{N-1}} + \cdots + a_{N-1} \frac{dy}{dt} + a_N y(t) \\ = b_{N-M} \frac{d^M x}{dt^M} + b_{N-M+1} \frac{d^{M-1} x}{dt^{M-1}} + \cdots + b_{N-1} \frac{dx}{dt} + b_N x(t) \end{aligned}$$

- Usando o operador $D = d/dt$, tem-se

$$\begin{aligned} (D^N + a_1 D^{N-1} + \cdots + a_{N-1} D + a_N) y(t) \\ = (b_{N-M} D^M + b_{N-M+1} D^{M-1} + \cdots + b_{N-1} D + b_N) x(t) \end{aligned}$$

Sistemas Lineares Diferenciais

- O sistema LCIT pode ser representado por polinômios

$$Q(D)y(t) = P(D)x(t)$$

$$Q(D) = D^N + a_1 D^{N-1} + \cdots + a_{N-1} D + a_N$$

$$P(D) = b_{N-M} D^M + b_{N-M+1} D^{M-1} + \cdots + b_{N-1} D + b_N$$

- Normalmente, $N \geq M$ para garantir que os sistemas sejam estáveis e que o ruído não seja amplificado

Resposta de um Sistema LCIT

- A resposta de um sistema LCIT pode ser expressa como a soma de duas componentes
 - Resposta de entrada nula (devido às condições iniciais)
 - Resposta de estado nulo (devido à entrada apenas)

Circuito RC

$$y(t) = v_C(0) + Rx(t) + \frac{1}{C} \int_0^t x(\tau) d\tau$$

Resposta de Entrada Nula

- A resposta de entrada nula $y_0(t)$ é obtida observando-se a saída quando $x(t) = 0$

$$\begin{aligned} Q(D)y_0(t) &= 0 \\ (D^N + a_1D^{N-1} + \dots + a_{N-1}D + a_N)y_0(t) &= 0 \end{aligned}$$

- A solução é obtida encontrando-se as raízes do polinômio $Q(\lambda)$

$$Q(\lambda) = \lambda^N + a_1\lambda^{N-1} + \dots + a_{N-1}\lambda + a_N = 0$$

- Se $Q(\lambda)$ tiver N raízes distintas, então

$$Q(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_N) = 0$$

Resposta de Entrada Nula

- Finalmente, a resposta de entrada nula $y_0(t)$ é da forma

$$y_0(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + c_N e^{\lambda_N t}$$

- O polinômio $Q(\lambda)$ é chamado de polinômio característico
- A equação $Q(\lambda) = 0$ é chamada de equação característica
- As constantes c_1, c_2, \dots, c_N são obtidas a partir de N condições iniciais
- As raízes $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ são chamadas de raízes características, valores característicos, autovalores ou frequências naturais
- As exponenciais $e^{\lambda_i t}, i = 1, 2, \dots, N$ são chamadas de modos característicos do sistema

Resposta de Entrada Nula

- Quando as raízes de $Q(\lambda)$ são repetidas r vezes, tem-se:

$$Q(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^r (\lambda - \lambda_{r+1}) \cdots (\lambda - \lambda_N)$$

$$y_0(t) = (c_1 + c_2 t + \cdots + c_r t^{r-1}) e^{\lambda_1 t} + c_{r+1} e^{\lambda_{r+1} t} \cdots + c_N e^{\lambda_N t}$$

- Para um sistema real, quando as raízes são complexas, elas ocorrem em pares conjugados $(\alpha \pm j\beta)$, logo:

$$y_0(t) = c_1 e^{(\alpha+j\beta)t} + c_2 e^{(\alpha-j\beta)t}$$

- Para um sistema real, a resposta $y_0(t)$ também é real, o que requer que c_1 e c_2 sejam conjugados ($c_1 = c_2^* = (c/2)e^{j\theta}$)

$$y_0(t) = ce^{\alpha t} \cos(\beta t + \theta)$$

Resposta ao Impulso Unitário

- A resposta ao impulso unitário denotada por $h(t)$ representa a resposta de um sistema LCIT a uma entrada $\delta(t)$ aplicada em $t = 0$ com todas as condições iniciais iguais a zero para $t = 0^-$
- Seja o sistema LCIT

$$Q(D)y(t) = P(D)x(t)$$

- Como $M \leq N$, o caso mais geral pode ser representado por $M = N$, logo

$$\begin{aligned} (D^N + a_1 D^{N-1} + \cdots + a_{N-1} D + a_N)y(t) \\ = (b_0 D^N + b_1 D^{N-1} + \cdots + b_{N-1} D + b_N)x(t) \end{aligned}$$

Resposta ao Impulso Unitário

- A resposta ao impulso $h(t)$ pode ser obtida mais facilmente através da aplicação da transformada de Laplace
- No domínio do tempo, $h(t)$ pode ser obtida pelo método simplificado de casamento de impulso
- Como $h(t)$ é a resposta a uma entrada $\delta(t)$, a seguinte igualdade é verificada

$$\begin{aligned} (D^N + a_1 D^{N-1} + \dots + a_{N-1} D + a_N)h(t) \\ = (b_0 D^N + b_1 D^{N-1} + \dots + b_{N-1} D + b_N)\delta(t) \end{aligned}$$

Método Simplificado de Casamento de Impulso

- A resposta ao impulso $h(t)$ é dada por

$$h(t) = b_0\delta(t) + [P(D)y_n(t)]u(t)$$

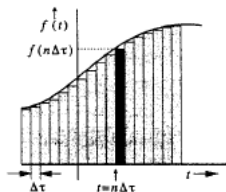
- Sendo $y_n(t)$ a combinação linear dos modos característicos do sistema sujeitos às condições iniciais

$$\begin{aligned} y_n(0) &= \dot{y}_n(0) = \cdots = y_n^{(N-2)}(0) = 0 \\ y_n^{(N-1)}(0) &= 1 \end{aligned}$$

- Se $M < N$, então $b_0 = 0$ e consequentemente o termo $b_0\delta(t)$ não aparece em $h(t)$

Resposta de Estado Nulo

- Na resposta ao estado nulo, todas as condições iniciais são iguais a zero
- Seja $x(t)$ uma entrada arbitrária e $p(t)$ um pulso de altura unitária e largura $\Delta\tau$
- $x(t)$ pode ser representado como uma soma de pulsos $x(n\Delta\tau)p(t - n\Delta\tau)$ começando em $t = n\Delta\tau$ com altura $x(n\Delta\tau)$



Resposta de Estado Nulo

- Tem-se que

$$\begin{aligned}x(t) &= \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \sum_n x(n\Delta\tau) p(t - n\Delta\tau) \\&= \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \sum_n \frac{x(n\Delta\tau)}{\Delta\tau} p(t - n\Delta\tau) \Delta\tau \\&= \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \sum_n x(n\Delta\tau) \delta(t - n\Delta\tau) \Delta\tau\end{aligned}$$

Resposta de Estado Nulo

- A resposta ao impulso para $x(t)$ é calculada com base nas propriedades dos sistemas LCIT

$$\text{entrada} \implies \text{saída}$$

$$\delta(t) \implies h(t)$$

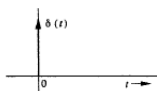
$$\delta(t - n\Delta\tau) \implies h(t - n\Delta\tau)$$

$$(x(n\Delta\tau)\Delta\tau)\delta(t - n\Delta\tau) \implies (x(n\Delta\tau)\Delta\tau)h(t - n\Delta\tau)$$

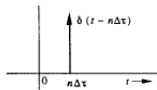
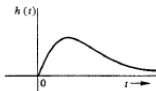
$$\lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \sum_n x(n\Delta\tau)\delta(t - n\Delta\tau)\Delta\tau \implies$$

$$\lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \sum_n x(n\Delta\tau)h(t - n\Delta\tau)\Delta\tau = y(t)$$

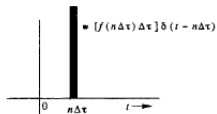
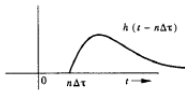
Resposta de Estado Nulo



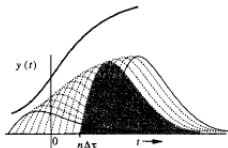
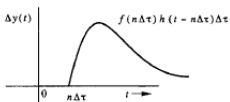
(b)



(c)



(d)



(e)

Resposta de Estado Nulo

- No limite, a resposta ao estado nulo $y(t)$ é dada por

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau$$

- A integral acima é chamada de integral de convolução
- Conhecendo $h(t)$ é possível encontrar a resposta $y(t)$ para qualquer entrada
- Representa-se essa operação por $y(t) = x(t) * h(t)$
- Para dois sinais quaisquer $x_1(t)$ e $x_2(t)$, tem-se:

$$x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)x_2(t - \tau)d\tau$$

Propriedades da Convolução

- Comutatividade

$$x_1(t) * x_2(t) = x_2(t) * x_1(t)$$

- Distributividade

$$x_1(t) * [x_2(t) + x_3(t)] = x_1(t) * x_2(t) + x_1(t) * x_3(t)$$

- Associatividade

$$x_1(t) * [x_2(t) * x_3(t)] = [x_1(t) * x_2(t)] * x_3(t)$$

Propriedades da Convolução

- Deslocamento

$$x_1(t) * x_2(t) = c(t)$$

$$x_1(t) * x_2(t - T) = x_1(t - T) * x_2(t) = c(t - T)$$

$$x_1(t - T_1) * x_2(t - T_2) = c(t - T_1 - T_2)$$

- Convolução com o impulso

$$x(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = x(t)$$

- Largura

- Se $x_1(t)$ tem largura T_1 e $x_2(t)$ tem largura T_2 , então $x_1(t) * x_2(t)$ tem largura $T_1 + T_2$

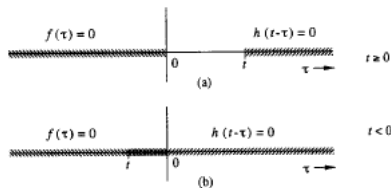
Propriedades da Convolução

• Causalidade

- Se $x(t)$ e $h(t)$ são causais, então a integral de convolução pode ser simplificada
- A resposta $y(t) = x(t) * h(t)$ é dada por:

$$y(t) = \int_0^t x(\tau)h(t-\tau)d\tau, \quad t \geq 0$$

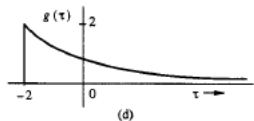
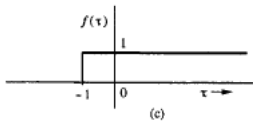
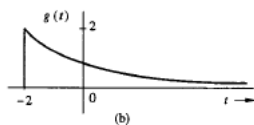
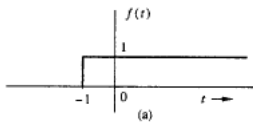
$$= 0, \quad t < 0$$



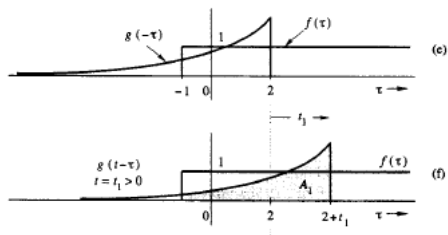
Método Gráfico da Convolução

- A convolução de dois sinais quaisquer $x(t)$ e $g(t)$ pode ser melhor entendida graficamente
- O procedimento consiste em:
 - Manter $x(\tau)$ fixa
 - Rotacionar $g(\tau)$ em relação ao eixo vertical resultando em $g(-\tau)$
 - Deslocar $g(-\tau)$ por t_0 segundos, resultando em $g(t_0 - \tau)$
 - A área referente ao produto de $x(\tau)$ com $g(t_0 - \tau)$ vale $c(t_0)$, o valor da convolução em $t = t_0$
 - Repita para todos os valores possíveis de t para obter $c(t) = x(t) * g(t)$

Método Gráfico da Convolução



Método Gráfico da Convolução



Método Gráfico da Convolução

