

Exemplos

Edmar J Nascimento

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Elétrica

www.univasf.edu.br/~edmar.nascimento

April 25, 2021

Exemplo

Exemplo 5.1

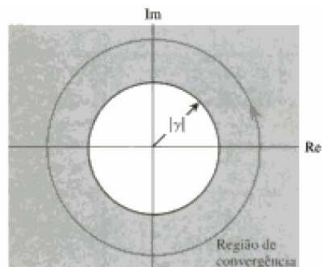
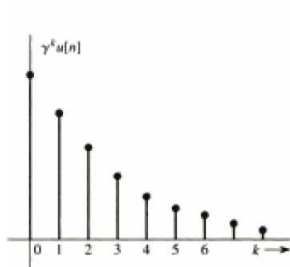
Calcular a transformada Z e a RDC para um sinal $x[n] = \gamma^n u[n]$

Solução exemplo 5.1

$$\begin{aligned} X[z] &= \sum_{n=0}^{\infty} \gamma^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\gamma}{z}\right)^n \\ &= \frac{1}{1 - \frac{\gamma}{z}} = \frac{z}{z - \gamma}, \text{ se } \left|\frac{\gamma}{z}\right| < 1 \\ x[n] = \gamma^n u[n] &\iff X[z] = \frac{z}{z - \gamma}, \quad |z| > |\gamma| \end{aligned}$$

Exemplo

Solução exemplo 5.1

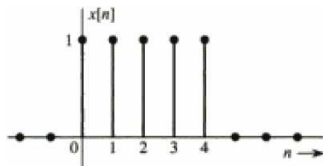


Exemplo

Exemplo 5.2

Calcular a transformada Z e a RDC para os sinais indicados abaixo:

- 1 $\delta[n]$
- 2 $u[n]$
- 3 $\cos(\beta n)u[n]$
- 4 O sinal $x[n]$ mostrado abaixo



Exemplo

Solução exemplo 5.2

$$\delta[n] \iff 1, \quad \forall z \neq 0$$

$$u[n] \iff \frac{z}{z-1}, \quad |z| > 1$$

$$\underbrace{\cos(\beta n)u[n]}_{\frac{(e^{j\beta n} + e^{-j\beta n})}{2}u[n]} \iff \frac{z(z - \cos \beta)}{z^2 - 2z \cos \beta + 1}, \quad |z| > 1$$

$$X[z] = \sum_{n=0}^4 z^{-n} = \sum_{n=0}^4 \frac{1}{z^n} = \frac{\frac{1}{z^5} - 1}{\frac{1}{z} - 1} = \frac{z}{z-1}(1 - z^{-5})$$

Exemplo

Exercício E5.2

Calcular a transformada Z inversa de:

$$X_1[z] = \frac{z(2z - 1)}{(z - 1)(z + 0,5)}$$

$$X_2[z] = \frac{1}{(z - 1)(z + 0,5)}$$

$$X_3[z] = \frac{9}{(z + 2)(z - 0,5)^2}$$

$$X_4[z] = \frac{5z(z - 1)}{z^2 - 1,6z + 0,8}$$

Exemplo

Solução exercício E5.2

$$\frac{X_1[z]}{z} = \frac{2z - 1}{(z - 1)(z + 0,5)} = \frac{k_1}{z - 1} + \frac{k_2}{z + 0,5}$$

$$\frac{X_1[z]}{z} = \frac{2/3}{z - 1} + \frac{4/3}{z + 0,5}$$

$$X_1[z] = \frac{2}{3} \frac{z}{z - 1} + \frac{4}{3} \frac{z}{z + 0,5}$$

$$x_1[n] = \frac{1}{3} [2 + 4(-0,5)^n] u[n]$$

Exemplo

Solução exercício E5.2

$$\frac{X_2[z]}{z} = \frac{1}{z(z-1)(z+0,5)} = \frac{k_1}{z} + \frac{k_2}{z-1} + \frac{k_3}{z+0,5}$$

$$\frac{X_2[z]}{z} = \frac{-2}{z} + \frac{2/3}{z-1} + \frac{4/3}{z+0,5}$$

$$X_2[z] = -2 + \frac{2}{3} \frac{z}{z-1} + \frac{4}{3} \frac{z}{z+0,5}$$

$$x_2[n] = -2\delta[n] + \frac{1}{3}[2 + 4(-0,5)^n]u[n]$$

Exemplo

Solução exercício E5.2

$$\begin{aligned}\frac{X_3[z]}{z} &= \frac{9}{z(z+2)(z-0,5)^2} \\&= \frac{k_1}{z} + \frac{k_2}{z+2} + \frac{k_3}{z-0,5} + \frac{k_4}{(z-0,5)^2} \\&= \frac{18}{z} + \frac{-0,72}{z+2} + \frac{-17,28}{z-0,5} + \frac{7,2}{(z-0,5)^2} \\X_3[z] &= 18 - 0,72 \frac{z}{z+2} - 17,28 \frac{z}{z-0,5} + 7,2 \frac{z}{(z-0,5)^2} \\x_3[n] &= 18\delta[n] - [0,72(-2)^n + 17,28(0,5)^n - 14,4n(0,5)^n]u[n]\end{aligned}$$

Exemplo

Solução exercício E5.2

$$\begin{aligned}\frac{X_4[z]}{z} &= \frac{5(z-1)}{z^2 - 1,6z + 0,8} = \frac{5(z-1)}{(z-0,8+j0,4)(z-0,8-j0,4)} \\&= \frac{k_1}{z-0,8+j0,4} + \frac{k_1^*}{z-0,8-j0,4} \\&= \frac{1,25\sqrt{5}e^{-j0,4636}}{z-0,8+j0,4} + \frac{1,25\sqrt{5}e^{j0,4636}}{z-0,8-j0,4} \\X_4[z] &= \frac{0,5 \cdot 2,5\sqrt{5}e^{-j0,4636}}{z-0,4\sqrt{5}e^{-j0,4636}} + \frac{0,5 \cdot 2,5\sqrt{5}e^{j0,4636}}{z-0,4\sqrt{5}e^{j0,4636}} \\x_4[n] &= 2,5\sqrt{5}(0,4\sqrt{5})^n \cos(0,4636n + 0,4636)u[n] \\&= \frac{5\sqrt{5}}{2} \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^n \cos(0,4636n + 0,4636)u[n]\end{aligned}$$

Exemplo

Exercício E5.10

Resolver a equação

$$y[n+2] - \frac{5}{6}y[n+1] + \frac{1}{6}y[n] = 5x[n+1] - x[n]$$

com $y[-1] = 2$, $y[-2] = 0$ e $x[n] = u[n]$.

Exemplo

Solução exercício E5.10

Colocando a equação na forma de atraso

$$y[n] - \frac{5}{6}y[n-1] + \frac{1}{6}y[n-2] = 5x[n-1] - x[n-2]$$

com $y[-1] = 2$, $y[-2] = 0$ e $x[n] = u[n]$. Tomando $n = 0$ como a referência de tempo, tem-se que:

$$\begin{aligned}y[n] &= y[n]u[n] \\y[n-1] &= y[n-1]u[n] \\y[n-2] &= y[n-2]u[n] \\x[n-1] &= x[n-1]u[n] \\x[n-2] &= x[n-2]u[n]\end{aligned}$$

Exemplo

Solução exercício E5.10

A transformada Z de cada um dos termos vale

$$y[n]u[n] \iff Y[z]$$

$$y[n-1]u[n] \iff \frac{1}{z}Y[z] + 2$$

$$y[n-2]u[n] \iff \frac{1}{z^2}Y[z] + \frac{2}{z}$$

$$x[n] = u[n] \iff X[z] = \frac{z}{z-1}$$

$$x[n-1]u[n] \iff \frac{1}{z-1}$$

$$x[n-2]u[n] \iff \frac{1}{z(z-1)}$$

Exemplo

Solução exercício E5.10

Aplicando-se a transformada Z à equação de diferenças, tem-se:

$$\begin{aligned} Y[z] - \frac{5}{6} \left(\frac{1}{z} Y[z] + 2 \right) + \frac{1}{6} \left(\frac{1}{z^2} Y[z] + \frac{2}{z} \right) \\ = 5 \left(\frac{1}{z-1} \right) - \left(\frac{1}{z(z-1)} \right) \\ Y[z] \left(1 - \frac{5}{6z} + \frac{1}{6z^2} \right) + \frac{1-5z}{3z} = \frac{5z-1}{z(z-1)} \\ Y[z] \left(1 - \frac{5}{6z} + \frac{1}{6z^2} \right) = \frac{5z-1}{3z} + \frac{5z-1}{z(z-1)} \end{aligned}$$

Exemplo

Solução exercício E5.10

$$Y[z] \left(z^2 - \frac{5}{6}z + \frac{1}{6} \right) = \frac{5z^2 - z}{3} + \frac{5z^2 - z}{z - 1}$$

$$Y[z] \left(z^2 - \frac{5}{6}z + \frac{1}{6} \right) = \frac{(5z^2 - z)(z + 2)}{3(z - 1)}$$

$$Y[z] = \frac{z(5z - 1)(z + 2)}{3(z - 1) \left(z - \frac{1}{2} \right) \left(z - \frac{1}{3} \right)}$$

$$\frac{Y[z]}{z} = \frac{12}{z - 1} - \frac{15}{z - \frac{1}{2}} + \frac{14/3}{z - \frac{1}{3}}$$

Exemplo

Solução exercício E5.10

$$Y[z] = 12 \frac{z}{z-1} - 15 \frac{z}{z-\frac{1}{2}} + \frac{14}{3} \frac{z}{z-\frac{1}{3}}$$
$$y[n] = \left[12 - 15 \left(\frac{1}{2} \right)^n + \frac{14}{3} \left(\frac{1}{3} \right)^n \right] u[n]$$

Solução exercício E5.10 - Separação das Componentes

- É possível separar as componentes da resposta total
- A resposta de estado nulo depende apenas da entrada, enquanto que a resposta de entrada nula depende apenas do estado (condições iniciais)
- Equação de diferenças deve estar na forma de atraso
- No exercício E5.10, os termos da equação em $Y[z]$ podem ser reagrupados da seguinte maneira

$$Y[z] \left(z^2 - \frac{5}{6}z + \frac{1}{6} \right) = \underbrace{\frac{5z^2 - z}{3}}_{\text{cond. iniciais}} + \underbrace{\frac{5z^2 - z}{z - 1}}_{\text{entrada}}$$

Solução exercício E5.10 - Separação das Componentes

- Continuando com os dois termos separados, tem-se:

$$Y[z] = \underbrace{\frac{5z^2 - z}{3\left(z^2 - \frac{5}{6}z + \frac{1}{6}\right)}}_{\text{comp. entrada nula: } Y_0[z]} + \underbrace{\frac{5z^2 - z}{\left(z^2 - \frac{5}{6}z + \frac{1}{6}\right)(z - 1)}}_{\text{comp. estado nulo: } Y_{EsN}[z]}$$
$$\frac{Y_0[z]}{z} = \frac{5z - 1}{3\left(z - \frac{1}{2}\right)\left(z - \frac{1}{3}\right)} = \frac{3}{z - \frac{1}{2}} - \frac{4/3}{z - \frac{1}{3}}$$
$$Y_0[z] = 3\frac{z}{z - \frac{1}{2}} - \frac{4}{3}\frac{z}{z - \frac{1}{3}}$$
$$y_0[n] = \left[3\left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{4}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]u[n]$$

Solução exercício E5.10 - Separação das Componentes

$$\frac{Y_{EsN}[z]}{z} = \frac{5z - 1}{\left(z - \frac{1}{2}\right)\left(z - \frac{1}{3}\right)(z - 1)} = -\frac{18}{z - \frac{1}{2}} + \frac{6}{z - \frac{1}{3}} + \frac{12}{z - 1}$$

$$Y_{EsN} = -\frac{18z}{z - \frac{1}{2}} + \frac{6z}{z - \frac{1}{3}} + \frac{12z}{z - 1}$$

$$y_{EsN}[n] = 6\left[2 - 3\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n\right]u[n]$$

Exemplo

Exercício E5.11

Resolver a equação

$$y[n] + 3y[n-1] + 2y[n-2] = x[n-1] + 3x[n-2]$$

com $y[0] = 1$, $y[1] = 2$ e $x[n] = u[n]$.

Exemplo

Solução exercício E5.11

Colocando a equação na forma de avanço

$$y[n+2] + 3y[n+1] + 2y[n] = x[n+1] + 3x[n]$$

com $y[0] = 1$, $y[1] = 2$ e $x[n] = u[n]$. Tomando $n = 0$ como a referência de tempo, tem-se que:

$$y[n] = y[n]u[n]$$

$$y[n+1] = y[n+1]u[n]$$

$$y[n+2] = y[n+2]u[n]$$

$$x[n] = x[n]u[n]$$

$$x[n+1] = x[n+1]u[n]$$

Exemplo

Solução exercício E5.11

A transformada Z de cada um dos termos vale

$$\begin{aligned}y[n]u[n] &\iff Y[z] \\y[n+1]u[n] &\iff zY[z] - z \\y[n+2]u[n] &\iff z^2Y[z] - z^2 - 2z \\x[n] = u[n] &\iff X[z] = \frac{z}{z-1} \\x[n+1]u[n] &\iff \frac{z}{z-1}\end{aligned}$$

Exemplo

Solução exercício E5.11

Aplicando-se a transformada Z à equação de diferenças, tem-se:

$$z^2 Y[z] - z^2 - 2z + 3(zY[z] - z) + 2Y[z] = \frac{z}{z-1} + 3\left(\frac{z}{z-1}\right)$$

$$Y[z](z^2 + 3z + 2) - (z^2 + 5z) = \frac{4z}{z-1}$$

$$Y[z](z^2 + 3z + 2) = (z^2 + 5z) + \frac{4z}{z-1}$$

Exemplo

Solução exercício E5.11

$$Y[z](z^2 + 3z + 2) = (z^2 + 5z) + \frac{4z}{z - 1}$$

$$Y[z](z^2 + 3z + 2) = \frac{z(z^2 + 4z - 1)}{z - 1}$$

$$Y[z] = \frac{z(z^2 + 4z - 1)}{(z - 1)(z + 1)(z + 2)}$$

$$\frac{Y[z]}{z} = \frac{2}{3} \frac{1}{z - 1} + 2 \frac{1}{z + 1} - \frac{5}{3} \frac{1}{z + 2}$$

Exemplo

Solução exercício E5.11

$$Y[z] = \frac{2}{3} \frac{z}{z-1} + 2 \frac{z}{z+1} - \frac{5}{3} \frac{z}{z+2}$$
$$y[n] = \left[\frac{2}{3} + 2(-1)^n - \frac{5}{3}(-2)^n \right] u[n]$$

Exemplo

Exercício E5.13

Para um sistema LIT com função de transferência

$$H[z] = \frac{z - 0,5}{(z + 0,5)(z - 1)}$$

- 1 Determine $y[n]$ se $x[n] = 3^{-(n+1)}u[n]$ e o sistema estiver em estado nulo.
- 2 Dê a equação de diferenças que relaciona a entrada e a saída.

Exemplo

Solução exercício E5.13

$$x[n] = 3^{-(n+1)}u[n] = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n \iff X[z] = \frac{1}{3} \frac{z}{z - \frac{1}{3}}$$

$$Y[z] = X[z]H[z] = \frac{z(z - 0,5)/3}{(z + 0,5)(z - 1)(z - \frac{1}{3})}$$

$$\begin{aligned} \frac{Y[z]}{z} &= \frac{(z - 0,5)/3}{(z + 0,5)(z - 1)(z - \frac{1}{3})} \\ &= \frac{-0,8/3}{z + 0,5} + \frac{0,5/3}{z - 1} + \frac{0,1}{z - \frac{1}{3}} \end{aligned}$$

$$Y[z] = \frac{1}{3} \left[0,5 \frac{z}{z - 1} - 0,8 \frac{z}{z + 0,5} + 0,3 \frac{z}{z - \frac{1}{3}} \right]$$

Exemplo

Solução exercício E5.13

$$y[n] = \frac{1}{3} \left[0,5 - 0,8(-0,5)^n + 0,3 \left(\frac{1}{3} \right)^n \right] u[n]$$

A equação de diferenças é obtida fazendo-se:

$$\frac{Y[z]}{X[z]} = H[z] = \frac{z - 0,5}{z^2 - 0,5z - 0,5}$$

$$z^2 Y[z] - 0,5z Y[z] - 0,5 Y[z] = z X[z] - 0,5 X[z]$$

$$y[n+2] - 0,5y[n+1] - 0,5y[n] = x[n+1] - 0,5x[n]$$

Exemplo

Exercício E5.18

Para um sistema especificado pela equação

$$y[n+1] - 0,5y[n] = x[n]$$

Determine a resposta em frequência deste sistema. Determine a resposta do sistema à entrada senoidal $\cos(1000t - \pi/3)$ amostrada a cada $T = 0,5ms$

Exemplo

Solução exercício E5.18

$$H[z] = \frac{1}{z - 0,5} \Rightarrow H[e^{j\Omega}] = \frac{1}{e^{j\Omega} - 0,5}$$

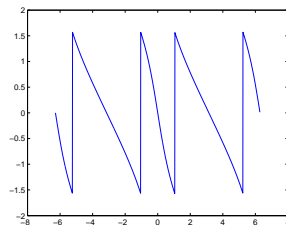
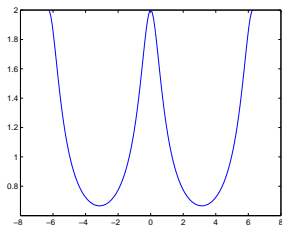
$$H[e^{j\Omega}] = \frac{1}{\cos \Omega - 0,5 + j \sin \Omega}$$

$$|H[e^{j\Omega}]| = \frac{1}{\sqrt{(\cos \Omega - 0,5)^2 + \sin^2 \Omega}} = \frac{1}{\sqrt{1,25 - \cos \Omega}}$$

$$\angle H[e^{j\Omega}] = -\arctan \left[\frac{\sin \Omega}{\cos \Omega - 0,5} \right]$$

Exemplo

Solução exercício E5.18



Exemplo

Solução exercício E5.18

Para $T = 0,5ms$, a frequência discreta é
 $\Omega = \omega T = 1000 \cdot 0,5 \cdot 10^{-3} = 0,5 rad/amostra$. Assim,

$$\begin{aligned} H[e^{j0,5}] &= \frac{1}{\cos 0,5 - 0,5 + j \sin 0,5} = \frac{1}{0,3776 + j0,4794} \\ &= 1,639e^{-j0,904} \end{aligned}$$

Logo,

$$y[n] = 1,639 \cos \left(0,5n - \frac{\pi}{3} - 0,904 \right)$$