

Exemplos

Edmar J Nascimento

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Elétrica

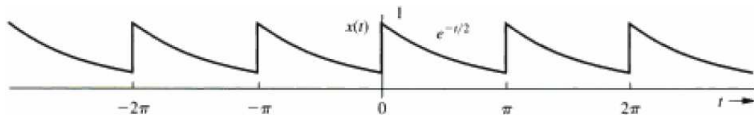
www.univasf.edu.br/~edmar.nascimento

May 3, 2021

Exemplo

Exemplos 6.1 e 6.5

Determinar as três séries de Fourier para o sinal $x(t)$ abaixo e esboçar os espectros de amplitude e fase das séries compacta e exponencial



Sugestão:

$$\int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cos bx + b \sin bx)$$
$$\int e^{ax} \sin bx \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin bx - b \cos bx)$$

Exemplo

Solução exemplos 6.1 e 6.5

$$T_0 = \pi \longrightarrow \omega_0 = 2$$

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{-t/2} dt = \frac{2(1 - e^{-\pi/2})}{\pi} = 0,504$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \cos n\omega_0 t dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} e^{-t/2} \cos 2nt dt \\ &= \frac{4(1 - e^{-\pi/2})}{\pi(1 + 16n^2)} = 0,504 \frac{2}{1 + 16n^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \sin n\omega_0 t dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} e^{-t/2} \sin 2nt dt \\ &= \frac{16n(1 - e^{-\pi/2})}{\pi(1 + 16n^2)} = 0,504 \frac{8n}{1 + 16n^2} \end{aligned}$$

Exemplo

Solução exemplos 6.1 e 6.5

$$x(t) = 0,504 + 0,504 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{1 + 16n^2} (\cos(2nt) + 4n \sin(2nt))$$

$$C_0 = a_0 = 0,504$$

$$C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = 0,504 \frac{2}{\sqrt{1 + 16n^2}}$$

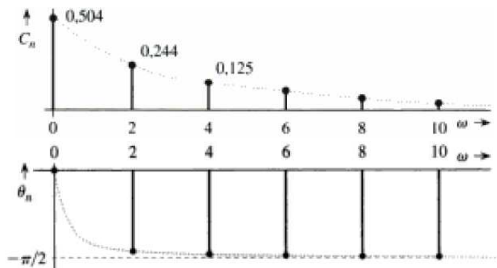
$$\theta_n = \arctan\left(\frac{-b_n}{a_n}\right) = -\arctan(4n)$$

$$x(t) = 0,504 + 0,504 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{1 + 16n^2}} \cos(2nt - \arctan(4n))$$

Exemplo

Solução exemplos 6.1 e 6.5

O espectro da série compacta é representado nos dois gráficos abaixo:



Exemplo

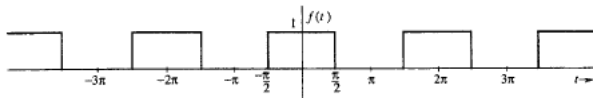
Solução exemplos 6.1 e 6.5

$$\begin{aligned}D_n &= \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{-t/2} e^{-j2nt} dt \\&= \frac{2(1 - e^{-\pi/2})}{\pi(1 + j4n)} = \frac{0,504}{1 + j4n} = 0,504 \frac{1 - j4n}{1 + 16n^2} \\&= \frac{1}{2} \underbrace{\frac{0,504 \cdot 2}{1 + 16n^2}}_{a_n} - j \frac{1}{2} \underbrace{\frac{8n}{1 + 16n^2}}_{b_n} \\x(t) &= 0,504 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1 - j4n}{1 + 16n^2} e^{j2nt}\end{aligned}$$

Exemplo

Exemplo 6.4

Determinar as três séries de Fourier para o sinal $x(t)$ abaixo e esboçar os espectros de amplitude e fase das séries compacta e exponencial



Exemplo

Solução exemplo 6.4

Observa-se que $x(t)$ é par

$$T_0 = 2\pi \longrightarrow \omega_0 = 1$$

$$a_0 = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0/2} x(t) dt = \frac{2}{2\pi} \int_0^{\pi/2} dt = \frac{1}{2}$$

$$a_n = \frac{4}{T_0} \int_0^{T_0/2} x(t) \cos n\omega_0 t dt = \frac{4}{2\pi} \int_0^{\pi/2} \cos nt dt$$

$$= \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} = \left\{ \begin{array}{ll} 0, & n \text{ par} \\ 2/(n\pi), & n = 1, 5, 9, \dots \\ -2/(n\pi), & n = 3, 7, 11, \dots \end{array} \right\}$$

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0/2} x(t) \sin n\omega_0 t dt = 0$$

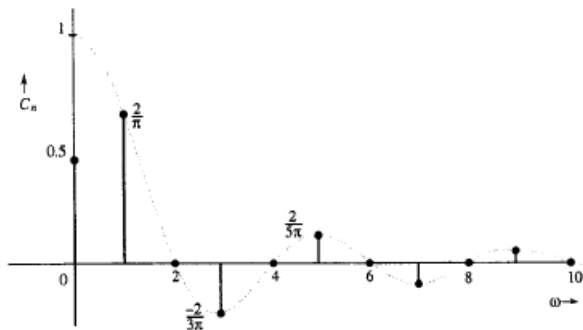
Exemplo

Solução exemplo 6.4

$$\begin{aligned}x(t) &= \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} \cos nt \\&= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left(\cos t - \frac{1}{3} \cos 3t + \frac{1}{5} \cos 5t - \frac{1}{7} \cos 7t + \cdots \right) \\x(t) &= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left[\cos t + \frac{1}{3} \cos (3t - \pi) + \frac{1}{5} \cos 5t + \right. \\&\quad \left. + \frac{1}{7} \cos (7t - \pi) + \cdots \right]\end{aligned}$$

Exemplo

Solução exemplo 6.4



Exemplo

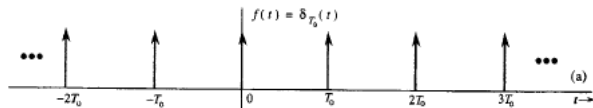
Solução exemplo 6.4

$$\begin{aligned}D_n &= \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-jnt} dt \\&= -\frac{1}{2jn\pi} (e^{-jn\pi/2} - e^{jn\pi/2}) = \frac{1}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} \\x(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} e^{jnt}\end{aligned}$$

Exemplo

Exemplo 6.7

Determinar as três séries de Fourier para o sinal $x(t)$ abaixo e esboçar os espectros de amplitude e fase das séries compacta e exponencial



Exemplo

Solução exemplo 6.7

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) dt = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \delta(t) dt = \frac{1}{T_0}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \cos n\omega_0 t dt = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \delta(t) \cos n\omega_0 t dt \\ &= \frac{2}{T_0} \end{aligned}$$

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \sin n\omega_0 t dt = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \delta(t) \sin n\omega_0 t dt = 0$$

Exemplo

Solução exemplo 6.7

$$x(t) = \frac{1}{T_0} + \frac{2}{T_0} \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{2\pi nt}{T_0}$$

$$D_n = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \delta(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0}$$

$$x(t) = \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi nt/T_0}$$

Exemplo

Parseval

Verificar o teorema de Parseval para o sinal indicado e obter a frequência na qual 95% da potência está concentrada.

