

Amostragem: A Ponte entre o Contínuo e o Discreto

Edmar J Nascimento

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Elétrica

www.univasf.edu.br/~edmar.nascimento

May 17, 2021

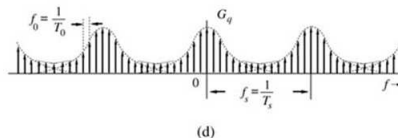
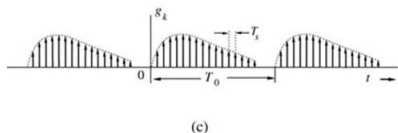
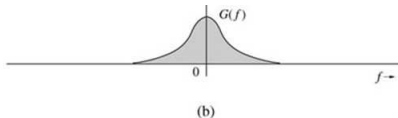
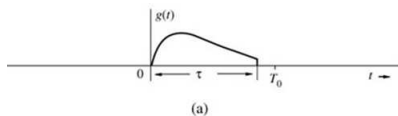
Transformada de Fourier Discreta

- Quando os cálculos da transformada de Fourier são feitos de forma numérica, deve-se considerar:
 - Um conjunto de amostras discretas de $x(t)$ (amostragem no tempo)
 - Um conjunto de amostras discretas de $X(\omega)$ a partir das amostras de $x(t)$ (amostragem espectral)
- Assim como a amostragem no tempo de um sinal gera réplicas periódicas do espectro, a amostragem espectral de um $X(\omega)$ gera réplicas periódicas do sinal no tempo
- Seja τ a largura do sinal no tempo e T_0 o intervalo de repetição das réplicas temporais, o dual do teorema da amostragem (amostragem espectral) estabelece que:

$$f_0 = \frac{1}{T_0} < \frac{1}{\tau} \text{ Hz} \Leftrightarrow T_0 > \tau$$

Relação entre as amostras de $x(t)$ e $X(\omega)$

- A combinação entre a amostragem no tempo e a amostragem espectral leva a seguinte relação:



Transformada de Fourier Discreta

- Seja N_0 o número de amostras de $x(t)$ em um período T_0 , então $N_0 = T_0/T_s$
- Seja N'_0 o número de amostras de $X(\omega)$ em um período f_s , então $N'_0 = f_s/f_0$

$$f_s = \frac{1}{T_s}, f_0 = \frac{1}{T_0} \implies N_0 = \frac{T_0}{T_s} = \frac{f_s}{f_0} = N'_0$$

- Definindo-se

$$x_n = T_s x(nT_s) = \frac{T_0}{N_0} x(nT_s)$$

$$X_r = X(r\omega_0), \omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

Transformada de Fourier Discreta

- O par da transformada de Fourier discreta é dado por

$$X_r = \sum_{n=0}^{N_0-1} x_n e^{-jr\Omega_0 n}$$

$$x_n = \frac{1}{N_0} \sum_{r=0}^{N_0-1} X_r e^{jr\Omega_0 n}, \Omega_0 = \omega_0 T_s = \frac{2\pi}{N_0}$$

$$x_n \iff X_r$$

- Parâmetros (N_0, T_s, T_0)

$$f_s \geq 2B, T_s = \frac{1}{f_s} \implies T_s \leq \frac{1}{2B}$$

$$f_0 = \frac{1}{T_0} (\text{resolução na frequência}), N_0 = \frac{T_0}{T_s}$$

Exemplo

Exemplo 8.8

Utilizar a TDF para calcular a transformada de Fourier de $e^{-2t}u(t)$ e traçar o seu espectro.

Solução

O cálculo da TF leva a

$$x(t) = e^{-2t}u(t) \iff \frac{1}{2+j\omega} = \frac{1}{\sqrt{4+\omega^2}}e^{-j \arctan \omega/2}$$

Exemplo

Solução

Para calcular T_s , é necessário estimar B . Se $\omega' = 2\pi B$, tal que $|X(\omega')|$ corresponde a 1% do valor de pico de $|X(\omega)|$ (0,5), então:

$$\frac{1}{2\pi B} = 0,005 \iff B = \frac{100}{\pi} \text{ Hz} \iff T_s \leq \frac{1}{2B} = \frac{\pi}{200}$$

Para calcular T_0 , é necessário truncar $x(t)$, de modo que $x(T_0) \ll 1$.

$$T_0 = 4 \iff x(4) = e^{-8} = 0,00035$$

$$N_0 = \frac{T_0}{T_s} = 254,6 \iff N_0 = 256 = 2^8 (\text{FFT})$$

$$N_0 = 256, T_0 = 4 \iff T_s = 0,015625 = 1/64$$

Solução

```
% Exemplo 8.8 Lathi, Sinais e Sistemas
```

```
T_0 = 4; N_0 = 256;  
T = T_0/N_0; t = (0:T:T*(N_0-1))';  
x = T*exp(-2*t); x(1) = T*(exp(-2*T_0)+1)/2;  
X_r = fft(x); r = [-N_0/2:N_0/2-1]'; omega_r = r*2*pi/T_0;  
  
omega = linspace(-pi/T,pi/T,4097); X = 1./(1+omega+2);  
  
subplot(211);  
plot(omega,abs(X),'k',omega_r,fftshift(abs(X_r)),'ko');  
xlabel('\omega'); ylabel('|X(\omega)|')  
axis([-0.01 40 -0.01 0.51]);  
legend('TF verdadeira',['TFD com T_0 = ',num2str(T_0),', N_0 = ',num2str(N_0)],0);  
subplot(212);  
plot(omega,angle(X),'k',omega_r,fftshift(angle(X_r)),'ko');  
xlabel('\omega'); ylabel('\angle X(\omega)')  
axis([-0.01 40 -pi/2-0.01 0.01]);  
legend('TF verdadeira',['TFD com T_0 = ',num2str(T_0),', N_0 = ',num2str(N_0)],0);
```


Solução

