

# Amostragem: A Ponte entre o Contínuo e o Discreto

Edmar J Nascimento

Universidade Federal do Vale do São Francisco  
Colegiado de Engenharia Elétrica

*[www.univasf.edu.br/~edmar.nascimento](http://www.univasf.edu.br/~edmar.nascimento)*

May 17, 2021

# Introdução

- Sinais contínuos no tempo podem ser convertidos em sinais discretos no tempo através do processo de amostragem
  - Amostras (valores) do sinal contínuo são obtidas periodicamente
- É importante que o intervalo de amostragem permita a reconstrução do sinal contínuo original a partir de suas amostras
- O teorema da amostragem estabelece condições para a recuperação de um sinal contínuo

# Introdução

- Frequentemente os sinais discretos no tempo são processados por sistemas digitais, o que requer que os sinais analógicos sejam ainda digitalizados
- O processo de digitalização necessita da etapa de quantização das amostras analógicas
- Na etapa de quantização, as amostras em tempo discretos obtidas são mapeadas para um alfabeto finito
- O sinal digital consiste então de uma sequência de símbolos discretos (números)
- Esses números podem ainda ser representados em outros sistemas de numeração como o binário

# Teorema da Amostragem

- O teorema da amostragem estabelece condições para que um sinal analógico possa ser recuperado a partir de suas amostras
- Um sinal  $g(t)$  cujo espectro é limitado em banda a  $B$  Hz (ou seja,  $G(\omega) = 0$  para  $|\omega| > 2\pi B$ ) pode ser reconstruído a partir de suas amostras se ele for amostrado a uma frequência  $f_s$  superior a  $2B$  Hz
  - $f_s > 2B$  ou  $T_s = 1/f_s < 1/(2B)$
- A prova desse teorema pode ser feita reconstruindo-se  $g(t)$  a partir de suas amostras usando um trem de impulsos  $\delta_{T_s}(t)$  com período  $T_s$

# Teorema da Amostragem

- O sinal amostrado  $\bar{g}(t)$  pode ser escrito como

$$\begin{aligned}\bar{g}(t) &= g(t)\delta_{T_s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(t)\delta(t - nT_s) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(nT_s)\delta(t - nT_s)\end{aligned}$$

- Como  $\delta_{T_s}(t)$  é periódico, a sua expansão em séries de Fourier resulta em

$$\delta_{T_s}(t) = \frac{1}{T_s}[1 + 2\cos\omega_s t + 2\cos 2\omega_s t + \cdots]$$

- Assim o sinal amostrado  $\bar{g}(t)$  pode ser reescrito como

$$\bar{g}(t) = \frac{1}{T_s}[g(t) + 2g(t)\cos\omega_s t + 2g(t)\cos 2\omega_s t + \cdots]$$

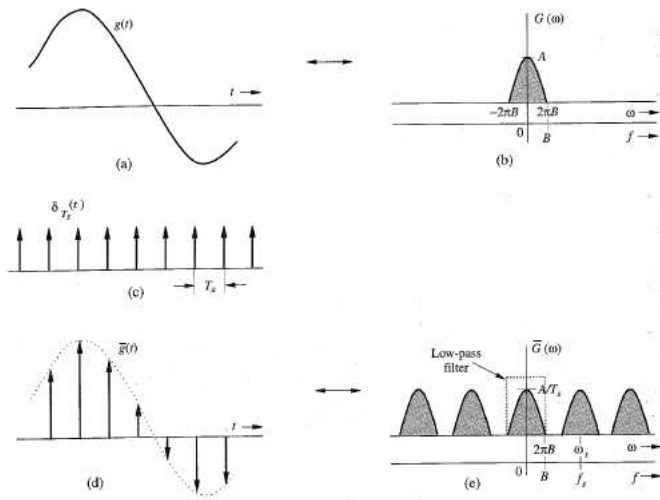
# Teorema da Amostragem

- O espectro de  $\bar{g}(t)$  denotado por  $\bar{G}(\omega)$  é dado então por

$$\begin{aligned}\bar{G}(\omega) &= \frac{1}{T_s} [G(\omega) + G(\omega - \omega_s) + G(\omega + \omega_s) + \\ &\quad G(\omega - 2\omega_s) + G(\omega + 2\omega_s) + \cdots] \\ &= \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(\omega - n\omega_s)\end{aligned}$$

- Para que se possa reconstruir  $g(t)$  a partir de  $\bar{g}(t)$  é necessário que as réplicas de  $G(\omega)$  não se sobreponham, ou seja, que  $\omega_s > 2(2\pi B)$  ou  $f_s > 2B$
- A taxa mínima de amostragem  $f_s = 2B$  é denominada de *taxa de Nyquist* e o período máximo  $T_s = 1/(2B)$  de *intervalo de Nyquist*

# Sinal Amostrado e o seu Espectro



# Reconstrução Exata

- Conforme observado na prova do teorema, a reconstrução do sinal contínuo pode ser feita gerando-se um trem de impulsos com amplitudes iguais as das amostras e passando-se o sinal através de um filtro passa-baixas com banda  $B$  Hz
- No domínio do tempo, esta operação pode ser obtida considerando-se um filtro

$$h(t) = 2BT_s \text{sinc}(2\pi Bt) \iff H(\omega) = T_s \text{ret}\left(\frac{\omega}{4\pi B}\right)$$



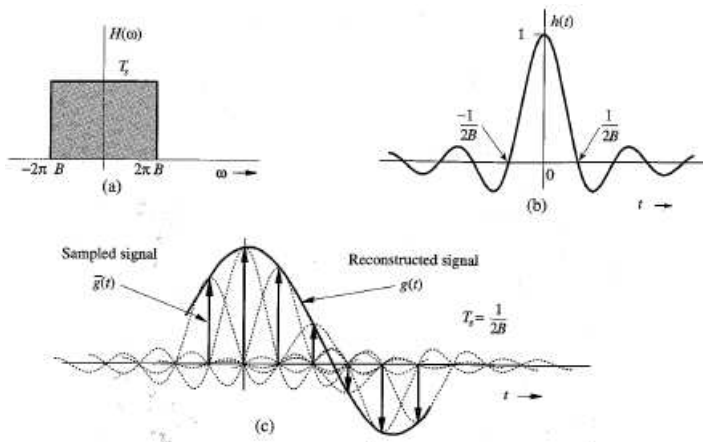
# Reconstrução Exata

- Se  $T_s = 1/(2B)$ , então a reconstrução exata do sinal é dada pela *fórmula de interpolação*

$$\begin{aligned}g(t) &= \sum_k g(kT_s)\delta(t - kT_s) * h(t) = \sum_k g(kT_s)h(t - kT_s) \\&= \sum_k g(kT_s)\text{sinc}[2\pi B(t - kT_s)] \\&= \sum_k g(kT_s)\text{sinc}(2\pi Bt - k\pi)\end{aligned}$$

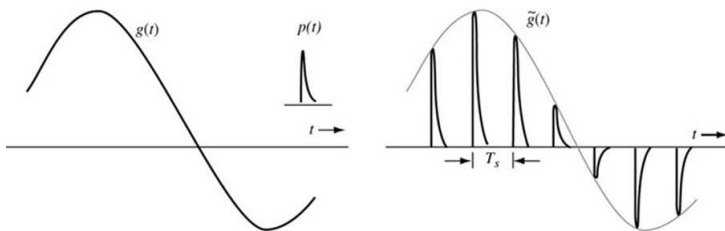
- Cabe lembrar que um sistema com esse  $h(t)$  não é fisicamente realizável

# Reconstrução Exata



# Reconstrução Prática de Sinais

- Impulsos são modelos matemáticos e não são gerados na prática
- Pulsos periódicos genéricos podem ser usados para reconstruir um sinal a partir de suas amostras
- Nesse tipo de reconstrução, a característica não ideal do pulso é compensada por um filtro equalizador



# Reconstrução Prática de Sinais

- O sinal reconstruído a partir de pulsos  $p(t)$  é representado por

$$\begin{aligned}\tilde{g}(t) &\triangleq \sum_n g(nT_S)p(t - nT_S) \\ &= p(t) * \left[ \sum_n g(nT_S)\delta(t - nT_S) \right] = p(t) * \bar{g}(t)\end{aligned}$$

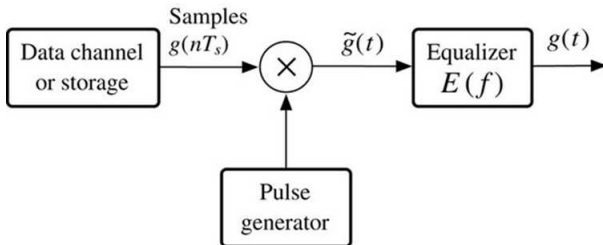
- No domínio da frequência, tem-se que

$$\begin{aligned}\tilde{g}(t) \iff \tilde{G}(f) &= P(f) \frac{1}{T_S} \sum_n G(f - nf_S) \\ &= P(f) \left[ G(f) \frac{1}{T_S} + \frac{1}{T_S} \sum_{n, n \neq 0} G(f - nf_S) \right]\end{aligned}$$

# Reconstrução Prática de Sinais

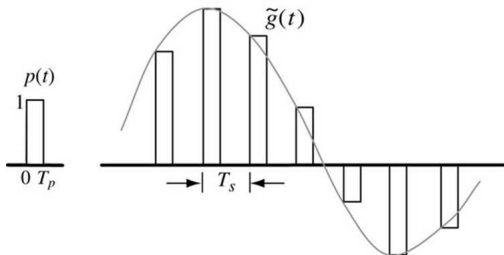
- Para que  $g(t)$  seja recuperado, é necessário equalizar o sinal com um filtro  $E(f)$ , de modo que:

$$G(f) = E(f)\tilde{G}(f)$$
$$E(f)P(f) = \begin{cases} 0 & |f| > f_s - B \\ T_s & |f| < B \end{cases}$$



# Reconstrução Prática de Sinais

- Quando os pulsos  $p(t)$  são pulsos retangulares, tem-se um sistema de retenção de ordem zero (*zero-order hold*)
- Nesse caso, o sinal reconstruído a partir de suas amostras tem o formato indicado abaixo

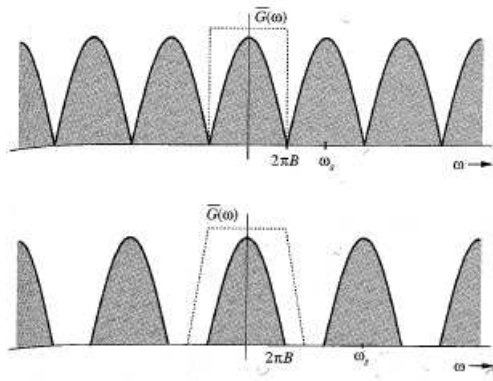


- Aproximações melhores podem ser obtidas através de um filtro de retenção de primeira ordem

# Dificuldades na Reconstrução

- Quando se utiliza a frequência de Nyquist na amostragem, se requer um filtro passa-baixas ideal (irrealizável) na reconstrução
- Quando há uma separação maior entre as bandas ( $f_s > 2B$ ), é mais fácil projetar filtros para recuperar o sinal  $g(t)$
- Sendo assim, há um compromisso entre o projeto do filtro e a escolha da frequência de amostragem

# Dificuldades na Reconstrução

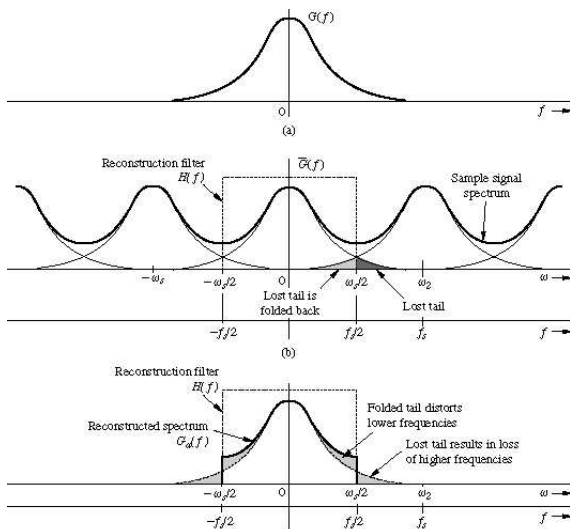




# Dificuldades na Reconstrução

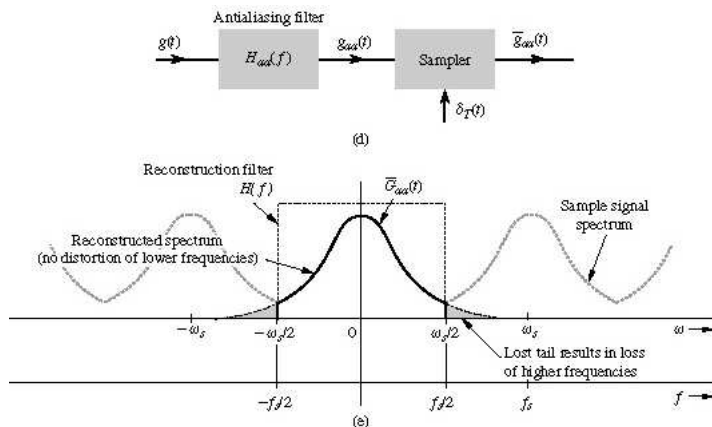
- Outro problema que surge é que os sinais práticos não são limitados em banda
- Isso significa que as componentes do sinal acima de  $\omega_s/2$  são perdidas e também interferem ao mesmo tempo no sinal recuperado
- Esse fenômeno é conhecido como mascaramento (*aliasing*), também conhecido como dobra espectral (*spectral folding*)

# Mascaramento



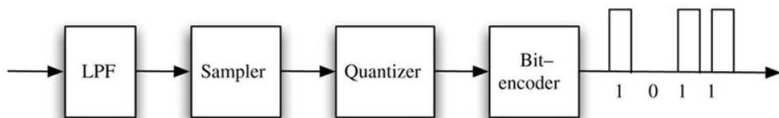
- Várias técnicas podem ser usadas para lidar com esse problema
  - Aumentar a frequência de amostragem
  - Eliminar uma porção do espectro antes da amostragem (filtro antialiasing) (pré-filtragem)
  - Eliminar a porção comprometida do espectro do sinal amostrado (filtro antialiasing) (pós-filtragem)

# Mascaramento



# Pulse-Code Modulation (PCM)

- A Modulação por codificação de pulso (PCM) é uma ferramenta usada para a conversão A/D
- Com PCM, um sinal analógico contínuo no tempo é convertido em um sinal digital
- No processo de conversão, o sinal é amostrado e em seguida quantizado



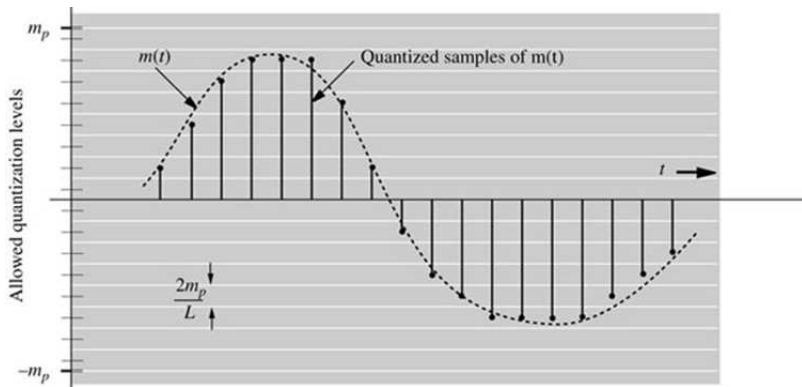
# Pulse-Code Modulation (PCM)

- Em PCM, as amplitudes são arredondadas para um dentre  $L$  níveis discretos (níveis quantizados)
- Se o sinal analógico  $m(t)$  possui amplitudes na faixa  $(-m_p, m_p)$ , o tamanho de cada intervalo é dado por:

$$\Delta v = \frac{2m_p}{L}$$

- Cada amostra é aproximada para o ponto médio do intervalo em que ela se encontra
- Um sinal desse tipo é conhecido como um sinal digital L-ário

# Pulse-Code Modulation (PCM)

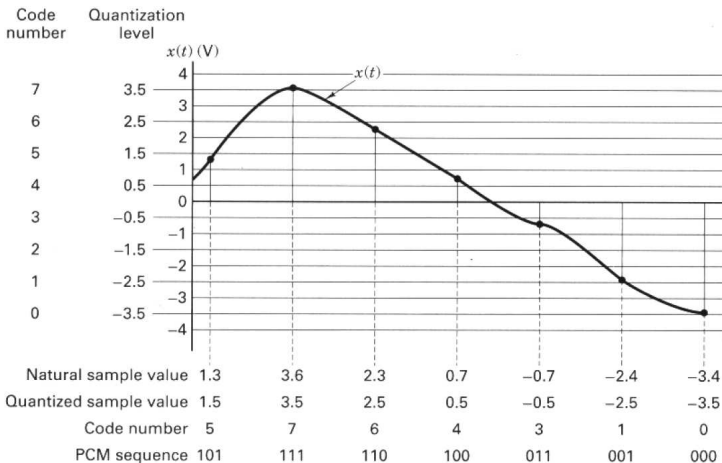


# Pulse-Code Modulation (PCM)

- Do ponto de vista prático, sinais binários são desejáveis
- Para converter um sinal digital  $L$ -ário em um sinal binário (2 níveis - 0 e 1) pode-se utilizar algum tipo de codificação
  - BCD, Gray, NBC, etc.
- $L$  níveis correspondem a  $L$  símbolos que correspondem a  $\log_2 L$  bits
- Um  $L$  maior (mais bits por amostra) significa maior precisão na conversão A/D
  - Menor ruído de quantização
  - Mais banda para transmissão e maior capacidade de armazenamento requerida
- A reconstrução de um sinal analógico a partir de um sinal digital é sempre aproximada



# Pulse-Code Modulation (PCM)



# Pulse-Code Modulation (PCM)

- Em telefonia, tem-se:
  - $f_{min} = 300\text{Hz}$ ,  $f_{max} = 3400\text{Hz}$  e  $B = 3400\text{Hz}$
  - $f_s = 6,8\text{kHz}$ , mas na prática escolhe-se  $f_s = 8\text{kHz}$
  - $L = 256$  ou 8 bits por amostra
  - $R = 64\text{kbps}$
- Em som com qualidade de CD, tem-se:
  - $B = 15\text{kHz}$
  - $f_s = 30\text{kHz}$ , mas na prática escolhe-se  $f_s = 44,1\text{kHz}$
  - $L = 65536$  ou 16 bits por amostra
  - $R = 705,6\text{kbps}$