

Análise no Domínio do Tempo de Sistemas em Tempo Contínuo

Edmar J Nascimento

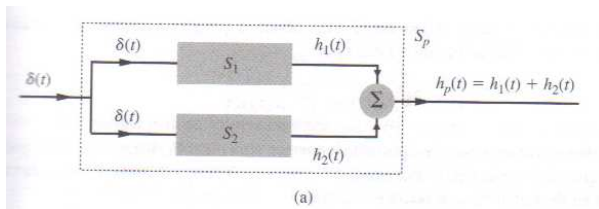
Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Elétrica

www.univasf.edu.br/~edmar.nascimento

March 21, 2021

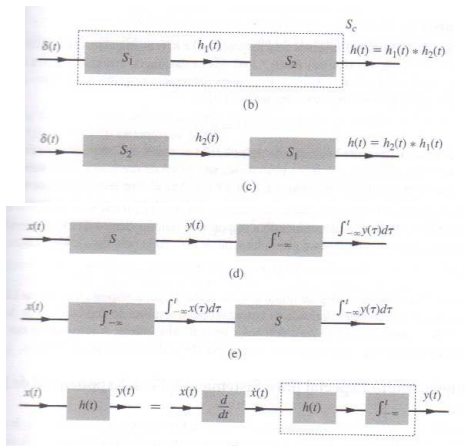
Sistemas Interconectados

- Dois ou mais sistemas LCIT podem ser conectados de duas formas
 - Série
 - Paralelo
- Sistemas Interconectados em Paralelo



Sistemas Interconectados

- Sistemas Interconectados em Série



Função de Transferência

- Seja e^{st} uma exponencial com duração infinita e com parâmetro complexo s
- A resposta do sistema com resposta ao impulso $h(t)$ à entrada e^{st} é dada por

$$\begin{aligned}y(t) &= h(t) * e^{st} \\&= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{s(t-\tau)} d\tau \\&= e^{st} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau \\&= H(s) e^{st}\end{aligned}$$

- Sendo que,

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau$$

Função de Transferência

- $H(s)$ é chamada de **função de transferência** do sistema
- $H(s)$ pode ser também definido da seguinte maneira:

$$H(s) = \frac{\text{Sinal de saída}}{\text{Sinal de entrada}} \Big|_{\text{entrada} = e^{st}}$$

- Um sistema LCIT pode ser escrito na forma:

$$Q(D)y(t) = P(D)x(t)$$

- Logo

$$Q(D)H(s)e^{st} = H(s)[Q(D)e^{st}] = P(D)e^{st}$$

Função de Transferência

- Como

$$D^r e^{st} = s^r e^{st} \Rightarrow P(D)e^{st} = P(s)e^{st} \text{ e } Q(D)e^{st} = Q(s)e^{st}$$

- Logo

$$H(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

Estabilidade do Sistema

- A noção de estabilidade de um sistema pode ser tomada com base no equilíbrio de um cone
 - Cone equilibrado pela ponta - instável
 - Cone equilibrado pela base - estável
 - Cone deitado - equilíbrio neutro
- Dois critérios de estabilidade são comumente usados em sistemas
 - Estabilidade externa ou BIBO (Bounded-Input-Bounded-Output)
 - Estabilidade interna ou assintótica

Estabilidade Externa

- Para um sistema LCIT tem-se:

$$\begin{aligned}y(t) &= h(t) * x(t) \\&= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau \\|y(t)| &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)||x(t-\tau)|d\tau\end{aligned}$$

- Se $x(t)$ é limitado, então $|x(t-\tau)| < K_1 < \infty$

$$|y(t)| \leq K_1 \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|d\tau$$

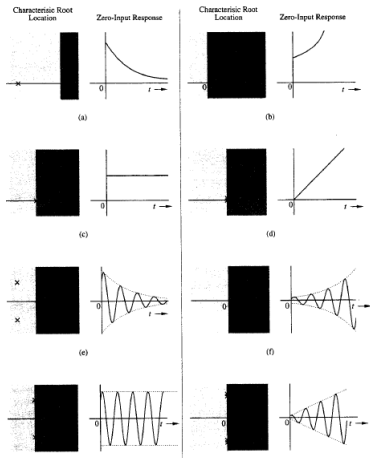
- Para a estabilidade BIBO, é necessário então que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|d\tau < \infty$$

Estabilidade Interna

- O sistema pode ser externamente estável, mas um de seus modos pode explodir com uma determinada condição
- Um critério simples pode ser obtido analisando-se a posição das raízes características no plano complexo
- De acordo com esse critério, o sistema pode ser:
 - Assintoticamente estável
 - Assintoticamente instável
 - Marginalmente estável

Estabilidade Interna



Condições Iniciais

- Para se obter a resposta de entrada nula são necessárias as condições iniciais $y_0(0), \dot{y}_0(0), \dots$
- Em problemas reais, essas condições iniciais devem ser determinadas a partir de situações físicas
 - Em circuitos RLC, as condições iniciais são determinadas a partir das tensões nos capacitores e correntes nos indutores
- Admite-se que a entrada é aplicada no instante $t = 0$ e por isso, faz-se necessário distinguir os instantes $t = 0^-$ e $t = 0^+$
 - As variáveis de interesse nesses instantes não são necessariamente idênticas

Condições Iniciais

- A resposta total $y(t)$ é constituída de
 - Resposta de entrada nula $y_0(t)$ devida apenas às condições iniciais com a entrada $x(t) = 0$
 - Resposta de estado nulo devida apenas à entrada e com todas as condições iniciais iguais à zero
- Essas duas componentes da resposta total são independentes
- Para $t = 0^-$, a resposta total $y(t)$ é formada apenas pela resposta de entrada nula $y_0(t)$, pois a entrada ainda não foi aplicada, logo:

$$y(0^-) = y_0(0^-), \dot{y}(0^-) = \dot{y}_0(0^-), \dots$$

Condições Iniciais

- A aplicação da entrada $x(t)$ em $t = 0$ não possui efeito em $y_0(t)$, logo

$$y_0(0^-) = y_0(0^+), \dot{y}_0(0^-) = \dot{y}_0(0^+), \dots$$

- Entretanto, a resposta total em geral muda, ou seja

$$y(0^-) \neq y(0^+), \dot{y}(0^-) \neq \dot{y}(0^+), \dots$$

Resposta Total

- A resposta total foi representada como a soma de duas componentes

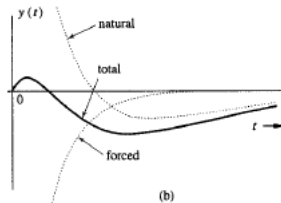
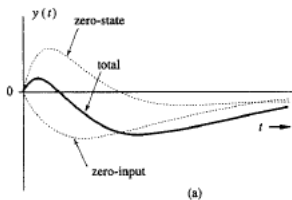
$$y(t) = \underbrace{\sum_{k=1}^N c_k e^{\lambda_k t}}_{\text{comp. de entrada nula}} + \underbrace{x(t) * h(t)}_{\text{comp. de estado nulo}}$$

- A componente de estado nulo contém modos característicos do sistema bem como modos não característicos
- Uma outra forma de representar a resposta total é agrupar todos os modos característicos na resposta natural $y_n(t)$ e os não característicos na resposta forçada $y_\phi(t)$, assim

$$y(t) = y_n(t) + y_\phi(t)$$

Resposta Total

- Resposta total para um circuito RLC série



Solução Clássica de Equações Diferenciais

- No método clássico de solução de equações diferenciais, são determinadas as componentes natural e forçada ao invés das componentes de entrada nula e de estado nulo
 - $y_n(t)$ também é chamada de solução homogênea
 - $y_\phi(t)$ também é chamada de solução particular
- A forma de $y_\phi(t)$ depende da entrada que está sendo aplicada
- A solução particular é determinada a partir da equação

$$Q(D)y_\phi(t) = P(D)x(t)$$

- As constantes da solução homogênea são determinadas a partir das condições iniciais de $y(t) = y_n(t) + y_\phi(t)$ em $t = 0^+$

Avaliação do Método Clássico

- O método clássico é relativamente simples para determinadas entradas (exponenciais, constantes, senóides, etc.), mas ele não permite separar o efeito da entrada
- Além disso, o método clássico não pode ser aplicado a uma entrada qualquer
- Outro inconveniente é que as condições em $t = 0^+$ são mais trabalhosas de serem obtidas
- No estudo teórico de sistemas lineares, o método clássico não é o mais adequado