

Análise de Sistemas em Tempo Discreto usando a Transformada Z

Edmar J Nascimento

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Elétrica

www.univasf.edu.br/~edmar.nascimento

April 25, 2021

Estabilidade de Sistemas Discretos

- A estabilidade de um sistema LDIT pode ser analisada segundo os critérios
 - BIBO (estabilidade externa)
 - Assintótica (estabilidade interna)
- A estabilidade BIBO pode ser determinada a partir da análise dos pólos da função de transferência do sistema $H[z]$
- A estabilidade assintótica pode ser determinada a partir das raízes do polinômio $Q[z]$

Estabilidade de Sistemas Discretos

- O sistema é BIBO estável se todos os pólos de $H[z]$ estão no interior do círculo unitário
 - Caso contrário, o sistema é BIBO instável
- A estabilidade assintótica é determinada a partir das raízes de $Q[z]$ ou a partir dos pólos de $H[z]$, se $P[z]$ e $Q[z]$ não possuírem fatores em comum
 - O sistema é assintoticamente estável se todas as raízes estão no interior do círculo unitário
 - O sistema é assintoticamente instável se ao menos uma raiz estiver fora do círculo ou se existirem raízes repetidas sobre o círculo
 - O sistema é marginalmente estável se não existirem raízes fora do círculo e existirem uma ou mais raízes não repetidas sobre o círculo

Resposta em Frequência

- A resposta em frequência de sistemas discretos é obtida de modo similar à obtida para os sistemas contínuos
- Vimos que para um sistema LDIT, tem-se que:

$$z^n \implies H[z]z^n$$

- Fazendo $z = e^{j\Omega}$

$$\begin{aligned} e^{j\Omega n} &\implies H[e^{j\Omega}]e^{j\Omega n} \\ \operatorname{Re}\{e^{j\Omega n}\} = \cos \Omega n &\implies \operatorname{Re}\{H[e^{j\Omega}]e^{j\Omega n}\} \end{aligned}$$

Resposta em Frequência

- Como

$$H[e^{j\Omega}] = |H[e^{j\Omega}]| e^{j\angle H[e^{j\Omega}]}$$

- Tem-se que

$$\cos \Omega n \implies |H[e^{j\Omega}]| \cos(\Omega n + \angle H[e^{j\Omega}])$$

- Sendo assim, a saída $y[n]$ para uma entrada $x[n] = \cos \Omega n$ é dada por

$$y[n] = |H[e^{j\Omega}]| \cos(\Omega n + \angle H[e^{j\Omega}])$$

- Para $x[n] = \cos(\Omega n + \theta)$, $y[n]$ é dado por

$$y[n] = |H[e^{j\Omega}]| \cos(\Omega n + \theta + \angle H[e^{j\Omega}])$$

Resposta em Frequência

- $H[e^{j\Omega}]$ só pode ser calculado se $z = e^{j\Omega}$ estiver na RDC de $H[z]$, ou seja, o sistema deve ser BIBO estável
- A amplitude da senóide de saída é amplificada ou atenuada por $|H[e^{j\Omega}]|$
- A fase da senóide de saída é deslocada por $\angle H[e^{j\Omega}]$
- O gráfico de $|H[e^{j\Omega}]|$ versus Ω é chamado de resposta de amplitude
- O gráfico de $\angle H[e^{j\Omega}]$ versus Ω é chamado de resposta de fase
- A resposta em frequência de um sistema consiste nas respostas de amplitude e de fase

Resposta em Frequência

- Senóides práticas são de duração finita, ou seja, começam em algum instante de tempo
- Se o sistema for BIBO estável, os modos naturais desaparecem e assim, a resposta de regime permanente senoidal para a entrada $x[n] = \cos(\Omega n)u[n]$ é dada por

$$y_{ss}[n] = |H[e^{j\Omega}]| \cos(\Omega n + \angle H[e^{j\Omega}])u[n]$$

- A resposta para uma senóide contínua amostrada a cada T segundos $\cos \omega n T$ é obtida fazendo-se $\Omega = \omega T$ nas equações anteriores

Resposta em Frequência

- A resposta em frequência $H[e^{j\Omega}]$ é uma função periódica de Ω com período 2π , já que

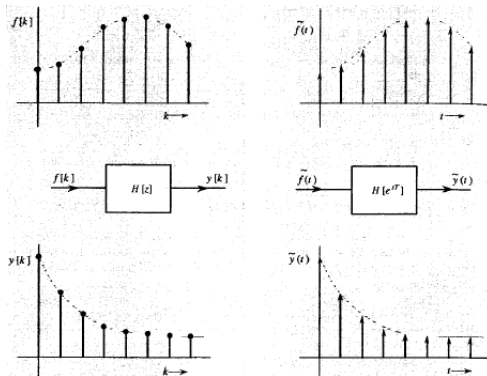
$$H[e^{j\Omega}] = H[e^{j(\Omega+2\pi m)}], \quad m \in \mathbb{Z}$$

- Dessa forma, senóide discretas separadas por múltiplos de 2π são idênticas
- Por essa razão, se considera em geral uma *faixa fundamental* de $-\pi$ a π a fim de evitar ambiguidades

$$\Omega_a = \Omega - 2\pi m, \quad -\pi \leq \Omega_a \leq \pi$$

Conexão entre as Transformadas de Laplace e Z

- Para mostrar a relação entre as transformadas de Laplace e Z, considera-se a figura abaixo



Conexão entre as Transformadas de Laplace e Z

- No lado esquerdo, tem-se um sistema discreto com entrada $x[n]$, função de transferência $H[z]$ e saída $y[n]$
- No lado direito, tem-se a operação realizada por um sistema contínuo equivalente
- A relação entre os dois sistemas pode ser obtida considerando-se que os sinais contínuos equivalentes são:

$$\bar{x}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] \delta(t - nT)$$
$$\bar{y}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} y[n] \delta(t - nT)$$

Conexão entre as Transformadas de Laplace e Z

- O sistema discreto produz a sua saída a partir de deslocamentos, somas e multiplicações por escalares
- A estrutura de $H[z]$ contém as informações dessas operações
- Um atraso no sistema discreto equivale a um termo $1/z$, enquanto que o seu equivalente contínuo vale e^{-sT}
- Sendo assim, o sistema contínuo procurado é obtido a partir de $H[z]$, fazendo-se $H[z = e^{sT}] = H(s)$
- Como

$$\bar{x}(t) \iff \bar{X}(s) \text{ e } \bar{y}(t) \iff \bar{Y}(s)$$

Conexão entre as Transformadas de Laplace e Z

- Então,

$$\overline{Y}(s) = H[e^{sT}] \overline{X}(s)$$

- Mas,

$$\overline{X}(s) = \mathcal{L} \left[\sum_{n=0}^{\infty} x[n] \delta(t - nT) \right] = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] e^{-snT}$$

$$\overline{Y}(s) = \mathcal{L} \left[\sum_{n=0}^{\infty} y[n] \delta(t - nT) \right] = \sum_{n=0}^{\infty} y[n] e^{-snT}$$

Conexão entre as Transformadas de Laplace e Z

- A substituição resulta em

$$\sum_{n=0}^{\infty} y[n]e^{-snT} = H[e^{sT}] \sum_{n=0}^{\infty} x[n]e^{-snT}$$

- Fazendo $z = e^{sT}$, tem-se que:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} y[n]z^{-n} &= H[z] \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n} \\ Y[z] &= H[z]X[z] \end{aligned}$$

- Assim, a transformada z pode ser considerada como sendo a transformada de Laplace com a mudança de variável $z = e^{sT}$ ou $s = (1/T) \ln z$