

Análise no Domínio do Tempo de Sistemas em Tempo Discreto

Edmar J Nascimento

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Elétrica

www.univasf.edu.br/~edmar.nascimento

March 29, 2021

Equações de Diferença

- Uma equação de diferenças pode ser escrita usando operações de avanço ou de atraso
 - As duas formulações são equivalentes
 - A formulação com avanços é similar à obtida para as equações diferenciais contínuas
- Uma equação de diferenças de ordem $\max(N, M)$ na forma de avanço pode ser escrita como

$$y[n + N] + a_1 y[n + N - 1] + \cdots + a_N y[n] = b_{N-M} x[n + M] + b_{N-M+1} x[n + M - 1] + \cdots + b_N x[n]$$

Equações de Diferença

- Se o sistema discreto for causal, então $N \geq M$, logo um sistema causal genérico de ordem N pode ser escrito fazendo-se $M = N$

$$y[n + N] + a_1 y[n + N - 1] + \cdots + a_N y[n] = \\ b_0 x[n + N] + b_1 x[n + N - 1] + \cdots + b_N x[n]$$

- A equação de diferenças acima pode ser escrita na forma de atraso fazendo-se a transformação $n \rightarrow n - N$, resultando em

$$y[n] + a_1 y[n - 1] + \cdots + a_N y[n - N] = \\ b_0 x[n] + b_1 x[n - 1] + \cdots + b_N x[n - N]$$

Solução Iterativa

- O método mais simples de solução de uma equação de diferenças é o recursivo ou iterativo
- Nesse método, os valores de $y[n]$ são obtidos sequencialmente a partir da entrada $x[n]$ e das condições iniciais
- Esse tipo de solução é adequada para computadores

$$\begin{aligned} y[n] &= -a_1 y[n-1] + \cdots - a_N y[n-N] \\ &+ b_0 x[n] + \cdots + b_N x[n-N] \end{aligned}$$

Solução Iterativa

Exemplo

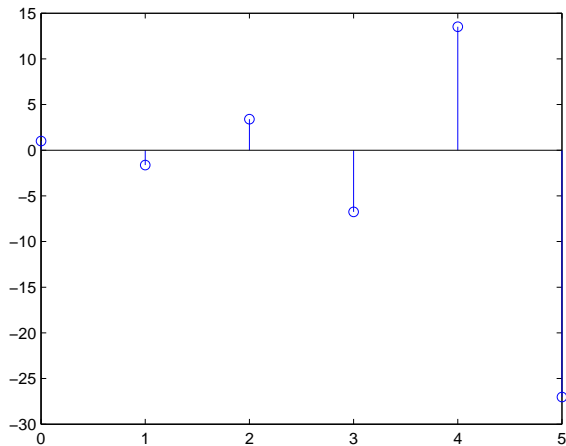
Resolver recursivamente a equação $y[n+1] + 2y[n] = x[n+1]$ para $x[n] = e^{-n}u[n]$ e $y[-1] = 0$

Solução

$$\begin{aligned}y[n] + 2y[n-1] &= x[n] \rightarrow y[n] = -2y[n-1] + e^{-n}u[n] \\y[0] &= -2y[-1] + e^0 = 1 \\y[1] &= -2y[0] + e^{-1} = -1,6321 \\y[2] &= -2y[1] + e^{-2} = 3,3996 \\&\vdots = \vdots\end{aligned}$$

Solução Iterativa

- $y[n + 1] + 2y[n] = x[n + 1]$



Solução Geral

- Assim como foi feito para as equações diferenciais, é útil representar uma equação de diferença usando operadores
- O operador de avanço é definido por

$$E^i x[n] = x[n + i]$$

- Assim, um sistema causal genérico pode ser escrito como

$$\underbrace{(E^N + a_1 E^{N-1} \dots + a_N)}_{Q[E]} y[n] = \underbrace{(b_0 E^N + b_1 E^{N-1} \dots + b_N)}_{P[E]} x[n]$$

$$Q[E]y[n] = P[E]x[n]$$

Solução Geral

- A solução geral consiste em uma expressão para $y[n]$ em função de n que verifique a equação de diferenças $Q[E]y[n] = P[E]x[n]$
- Assim como foi verificado para o caso contínuo, a solução geral (resposta total) de um sistema discreto é dada por

$$y[n] = \underbrace{\text{resposta de estado nulo}}_{\text{devido à entrada}} + \underbrace{\text{resposta de entrada nula}}_{\text{devido às condições iniciais}}$$

Resposta de Entrada Nula

- A resposta de entrada nula $y_0[n]$ é a resposta do sistema quando $x[n] = 0$, ou seja

$$\begin{aligned}y_0[n + N] + a_1 y_0[n + N - 1] + \cdots + a_N y_0[n] &= 0 \\ Q[E]y_0[n] &= 0\end{aligned}$$

- A solução é obtida a partir da equação característica

$$\begin{aligned}Q[\gamma] = 0 &\rightarrow \gamma^N + a_1 \gamma^{N-1} + \cdots + a_N = 0 \\ (\gamma - \gamma_1)(\gamma - \gamma_2) \cdots (\gamma - \gamma_N) &= 0\end{aligned}$$

- As raízes $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_N$ são chamadas de raízes características

Resposta de Entrada Nula

- Três casos podem ser possíveis
- As N raízes são distintas

$$y_0[n] = c_1\gamma_1^n + c_2\gamma_2^n + \cdots c_N\gamma_N^n$$

- Há raízes repetidas $(\gamma - \gamma_1)^r(\gamma - \gamma_{r+1}) \cdots (\gamma - \gamma_N) = 0$

$$y_0[n] = (c_1 + c_2n + \cdots + c_rn^{r-1})\gamma_1^n + c_{r+1}\gamma_{r+1}^n + \cdots c_N\gamma_N^n$$

- Há raízes complexas $\gamma = |\gamma|e^{j\beta}$ e $\gamma^* = |\gamma|e^{-j\beta}$

$$y_0[n] = c_1\gamma^n + c_2\gamma^{*n} = c|\gamma|^n \cos(\beta n + \theta)$$

- As N constantes são determinadas a partir das N condições iniciais

Resposta ao Impulso

- Para determinar a resposta de estado nulo é necessário primeiramente determinar a resposta ao impulso
- A resposta ao impulso denotada por $h[n]$ é a solução da equação

$$Q[E]h[n] = P[E]\delta[n], \text{ com } h[-1] = h[-2] = \dots h[-N] = 0$$

$$Q[E] = E^N + a_1 E^{N-1} \dots + a_N$$

$$P[E] = b_0 E^N + b_1 E^{N-1} \dots + b_N$$

- Quando $a_N \neq 0$, a resposta ao impulso é dada por

$$h[n] = \frac{b_N}{a_N} \delta[n] + y_c[n] u[n]$$

Resposta ao Impulso

- $y_c[n]$ consiste em uma combinação linear dos modos característicos γ_i do sistema
- As N constantes presentes em $h[n]$ são determinadas a partir de N valores de $h[n]$ ($h[0], h[1], \dots, h[N-1]$)
 - Esses valores são obtidos iterativamente a partir dos valores iniciais $h[-1] = h[-2] = \dots = h[-N] = 0$
- Quando $a_N = 0$, a expressão da resposta ao impulso é diferente
 - Esse caso é abordado na seção 3.12 do livro texto

Resposta de Estado Nulo

- Um sinal discreto qualquer $x[n]$ pode ser expressado como uma combinação linear de impulsos deslocados

$$x[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\delta[n-m]$$

- Alguns exemplos

$$u[n] = \sum_{m=0}^{\infty} \delta[n-m]$$

$$\gamma^n u[n] = \sum_{m=0}^{\infty} \gamma^m \delta[n-m]$$

Resposta de Estado Nulo

- Se o sistema é linear e invariante no tempo, então:

$$\begin{aligned} \text{entrada} &\implies \text{saída} \\ \delta[n] &\implies h[n] \\ \delta[n - m] &\implies h[n - m] \\ x[m]\delta[n - m] &\implies x[m]h[n - m] \\ \underbrace{\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\delta[n - m]}_{x[n]} &\implies \underbrace{\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]h[n - m]}_{y[n]} \end{aligned}$$

- $y[n]$ é a resposta de estado nulo e se deve unicamente à entrada $x[n]$

Resposta de Estado Nulo

- Define-se

$$x[n] * h[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]h[n-m]$$

- $x[n] * h[n]$ é chamado de somatório de convolução
- As propriedades do somatório de convolução são similares às da integral de convolução
- Comutatividade

$$x_1[n] * x_2[n] = x_2[n] * x_1[n]$$

- Distributividade

$$x_1[n] * (x_2[n] + x_3[n]) = x_1[n] * x_2[n] + x_1[n] * x_3[n]$$

Somatório de Convolução

- Associatividade

$$x_1[n] * (x_2[n] * x_3[n]) = (x_1[n] * x_2[n]) * x_3[n]$$

- Deslocamento

$$\begin{aligned}x_1[n] * x_2[n] &= c[n] \\ x_1[n - m] * x_2[n - p] &= c[n - m - p]\end{aligned}$$

- Convolução com o impulso

$$x[n] * \delta[n] = x[n]$$

- Largura

- Se $x_1[n]$ tem largura W_1 e L_1 elementos e $x_2[n]$ tem largura W_2 e L_2 elementos, então $x_1[n] * x_2[n]$ tem largura $W_1 + W_2$ e $L_1 + L_2 - 1$ elementos não nulos

Somatório de Convolução

- Se $x[n]$ e $h[n]$ forem causais, então tem-se que:

$$x[m] = 0 \text{ se } m < 0$$

$$h[n - m] = 0 \text{ se } m > n$$

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]h[n - m] = \sum_{m=0}^n x[m]h[n - m]$$

Função de Transferência

- Seja z^n uma exponencial com duração infinita e com parâmetro complexo z
- A resposta do sistema com resposta ao impulso $h[n]$ à entrada z^n é dada por

$$\begin{aligned}y[n] &= h[n] * z^n \\&= \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m] z^{n-m} \\&= z^n \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m] z^{-m} = H[z] z^n\end{aligned}$$

- Sendo que,

$$H[z] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m] z^{-m}$$

Função de Transferência

- $H[z]$ é chamada de **função de transferência** do sistema
- $H[z]$ pode ser também definido da seguinte maneira:

$$H[z] = \frac{\text{Sinal de saída}}{\text{Sinal de entrada}} \Big|_{\text{entrada}=z^n}$$

- Um sistema LDIT pode ser escrito na forma:

$$Q[E]y[n] = P[E]x[n]$$

- Logo

$$Q[E]H[z]z^n = H[z](Q[E]z^n) = P[E]z^n$$

Função de Transferência

- Como

$$E^k z^n = z^{n+k} = z^n z^k \Rightarrow P[E]z^n = P[z]z^n \text{ e } Q[E]z^n = Q[z]z^n$$

- Logo

$$H[z] = \frac{P[z]}{Q[z]}$$

Estabilidade de Sistemas Discretos

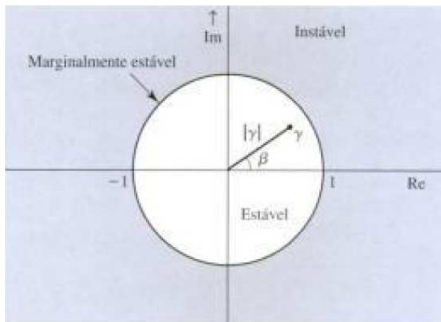
- Assim como foi feito para os sistemas contínuos, a estabilidade dos sistemas discretos pode ser avaliada segundo dois critérios
 - Estabilidade BIBO (externa)
 - Estabilidade assintótica (interna)
- Um sistema LDIT é BIBO estável se uma entrada limitada resulta sempre em uma saída limitada
- Essa condição é sempre verificada se

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < K < \infty$$

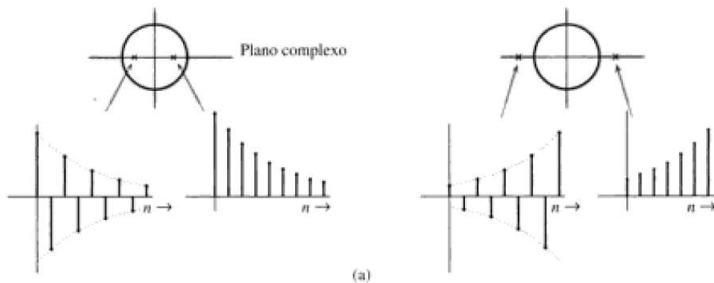
Estabilidade de Sistemas Discretos

- As condições de estabilidade assintótica para sistemas LDIT causais são análogas às dos sistemas contínuos quando se faz a correspondência entre os planos λ e γ
- Assim, um sistema LDIT é assintoticamente estável se todas as raízes γ_i estão dentro do círculo unitário
- Um sistema LDIT é assintoticamente instável se
 - Ao menos uma raiz estiver fora do círculo
 - Ou se houverem raízes repetidas no círculo
- Um sistema LDIT é marginalmente estável se não existirem raízes fora do círculo e se existirem algumas raízes não repetidas no círculo unitário

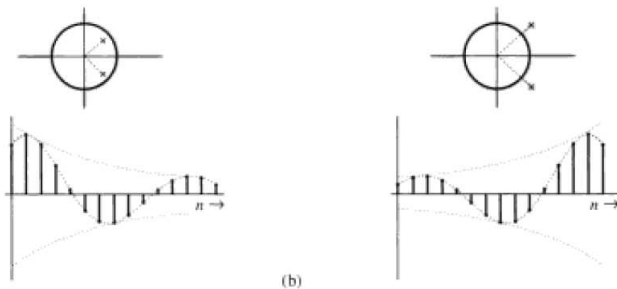
Estabilidade de Sistemas Discretos



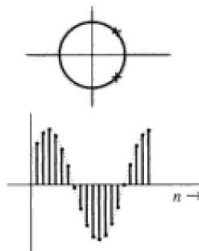
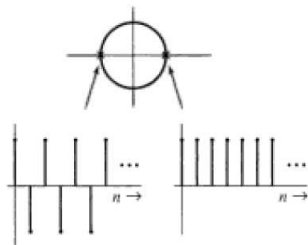
Estabilidade de Sistemas Discretos



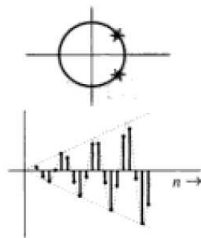
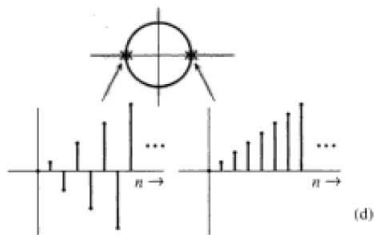
Estabilidade de Sistemas Discretos



Estabilidade de Sistemas Discretos



Estabilidade de Sistemas Discretos



Estabilidade de Sistemas Discretos

- Os critérios de estabilidade estão relacionados da seguinte forma
 - Assintoticamente estável \rightarrow BIBO estável
 - Assintoticamente instável e marginalmente estável \rightarrow BIBO instável
- O inverso nem sempre é verdadeiro
 - Só quando o sistema é controlável e observável (ver transformada Z)