

Análise de Sistemas em Tempo Contínuo usando a Transformada de Laplace

Edmar J Nascimento

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Elétrica

www.univasf.edu.br/~edmar.nascimento

April 12, 2021

Estabilidade de Sistemas Contínuos

- A estabilidade de um sistema linear pode ser analisada segundo os critérios
 - BIBO (estabilidade externa)
 - Assintótica (estabilidade interna)
- A estabilidade BIBO pode ser determinada a partir da análise dos pólos da função de transferência do sistema
- A estabilidade assintótica pode ser determinada a partir das raízes do polinômio $Q(s)$

Estabilidade BIBO

- Dois casos podem ser analisados
- 1º caso: $M > N$
 - $H(s)$ pode ser escrita como $H(s) = R(s) + H'(s)$, em que $R(s)$ é um polinômio de ordem $M - N$
 - A ação de $R(s)$ é a de um diferenciador de ordem $M - N$ e portanto o sistema é BIBO instável
- 2º caso: $M \leq N$
 - O sistema é BIBO estável se todos os pólos de $H(s)$ estão no semi plano esquerdo (SPE)
 - Caso contrário, o sistema é BIBO instável

Estabilidade Assintótica

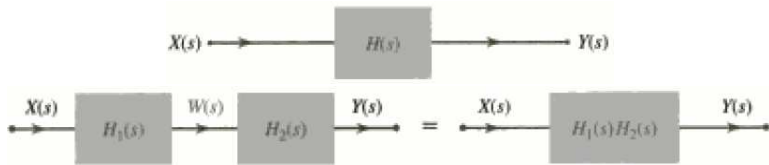
- A estabilidade assintótica é determinada a partir das raízes de $Q(s)$ ou a partir dos pólos de $H(s)$, se $P(s)$ e $Q(s)$ não possuírem fatores em comum (cancelamento de pólos)
 - O sistema é assintoticamente estável se todas as raízes estão no SPE
 - O sistema é assintoticamente instável se ao menos uma raiz estiver no SPD ou se existirem raízes repetidas no eixo imaginário
 - O sistema é marginalmente estável se não existirem raízes no SPD e existirem uma ou mais raízes não repetidas sobre o eixo imaginário

Diagramas de Bloco

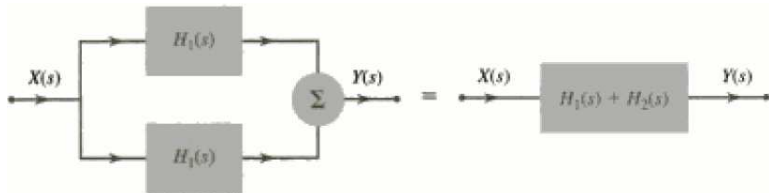
- Sistemas complexos podem ser representados através da interconexão de subsistemas
- Cada subsistema é representado por sua função de transferência
- Os tipos elementares de interconexão de subsistemas são:
 - Cascata (série)
 - Paralelo
 - Realimentação (feedback)

Diagramas de Bloco

- Interconexão em série

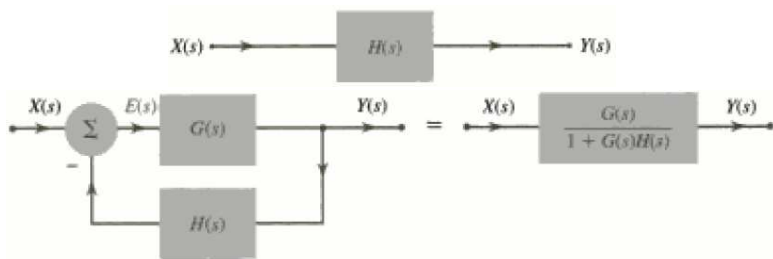


- Interconexão em paralelo



Diagramas de Bloco

- Interconexão com realimentação



- Alguns blocos elementares podem ser usados para construir (realizar) funções de transferências complexas
 - Atrasador ideal: $H(s) = e^{-sT}$
 - Diferenciador ideal: $H(s) = s$
 - Integrador ideal: $H(s) = \frac{1}{s}$

Resposta em Frequência

- A resposta em frequência consiste na análise da resposta de um sistema a senóides cuja frequência varia de 0 a ∞
- A resposta em frequência é essencial no desenvolvimento de filtros
- Vimos que para um sistema LCIT, tem-se que:

$$e^{st} \implies H(s)e^{st}$$

- Fazendo $s = j\omega$

$$\begin{aligned} e^{j\omega t} &\implies H(j\omega)e^{j\omega t} \\ \operatorname{Re}\{e^{j\omega t}\} = \cos \omega t &\implies \operatorname{Re}\{H(j\omega)e^{j\omega t}\} \end{aligned}$$

Resposta em Frequência

- Como

$$H(j\omega) = |H(j\omega)|e^{j\angle H(j\omega)}$$

- Tem-se que

$$\cos \omega t \implies |H(j\omega)| \cos(\omega t + \angle H(j\omega))$$

- Sendo assim, a saída $y(t)$ para uma entrada $x(t) = \cos \omega t$ é dada por

$$y(t) = |H(j\omega)| \cos(\omega t + \angle H(j\omega))$$

- Para $x(t) = \cos(\omega t + \theta)$, $y(t)$ é dado por

$$y(t) = |H(j\omega)| \cos(\omega t + \theta + \angle H(j\omega))$$

Resposta em Frequência

- $H(j\omega)$ só pode ser calculado se $s = j\omega$ estiver na RDC de $H(s)$, ou seja, o sistema deve ser BIBO estável
- A amplitude da senóide de saída é amplificada ou atenuada por $|H(j\omega)|$
- A fase da senóide de saída é deslocada por $\angle H(j\omega)$
- O gráfico de $|H(j\omega)|$ versus ω é chamado de resposta de amplitude
- O gráfico de $\angle H(j\omega)$ versus ω é chamado de resposta de fase
- A resposta em frequência de um sistema consiste nas respostas de amplitude e de fase

Resposta em Frequência

- Senóides práticas são de duração finita, ou seja, começam em algum instante de tempo
- Para uma exponencial complexa de duração finita, tem-se que:

$$e^{j\omega t} u(t) \iff \frac{1}{s - j\omega}$$

- Assim,

$$Y(s) = X(s)H(s) = \frac{P(s)}{\underbrace{(s - \lambda_1) \cdots (s - \lambda_N)}_{Q(s)}(s - j\omega)}$$

Resposta em Frequência

- A expansão em frações parciais de $Y(s)$ resulta em:

$$Y(s) = \sum_{i=1}^N \frac{k_i}{s - \lambda_i} + \frac{H(j\omega)}{s - j\omega}$$

- O que resulta na resposta

$$y(t) = \underbrace{\sum_{i=1}^N k_i e^{\lambda_i t} u(t)}_{\text{comp. transitório } y_{tr}(t)} + \underbrace{H(j\omega) e^{j\omega t} u(t)}_{\text{comp. regime estacionário } y_{ss}(t)}$$

- Para um sistema assintoticamente estável, $y_{tr}(t)$ diminui com o tempo

Resposta em Frequência

- Já a componente de regime estacionário $y_{ss}(t)$ não diminui
- Usando um argumento similar ao usado anteriormente, a resposta de regime permanente (estacionária) para uma entrada causal $x(t) = \cos(\omega t)u(t)$ é dada por

$$y_{ss}(t) = |H(j\omega)| \cos[\omega t + \angle H(j\omega)] u(t)$$