

# Análise de Sinais no Tempo Contínuo: A Transformada de Fourier

Edmar J Nascimento

Universidade Federal do Vale do São Francisco  
Colegiado de Engenharia Elétrica

*[www.univasf.edu.br/~edmar.nascimento](http://www.univasf.edu.br/~edmar.nascimento)*

May 10, 2021

# Sistemas Lineares

- Para um sistema LIT, a relação entre a entrada e a saída é dada por

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

- No domínio da frequência, tem-se

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= X(\omega)H(\omega) \\ &= |Y(\omega)|e^{j\angle Y(\omega)} = |X(\omega)||H(\omega)|e^{j[\angle X(\omega)+\angle H(\omega)]} \end{aligned}$$

- Portanto,

$$\begin{aligned} |Y(\omega)| &= |X(\omega)||H(\omega)| \\ \angle Y(\omega) &= \angle X(\omega) + \angle H(\omega) \end{aligned}$$

# Transmissão sem Distorção

- Em uma transmissão sem distorção, a forma de onda de entrada deve ser preservada
  - Toleram-se atrasos e uma alteração uniforme na amplitude (multiplicação por um escalar)

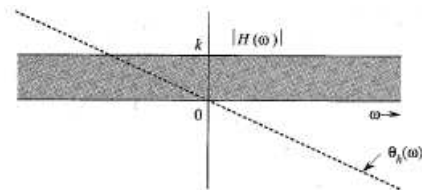
$$y(t) = G_0 x(t - t_d)$$

- No domínio da frequência, tem-se

$$Y(\omega) = G_0 X(\omega) e^{-j\omega t_d} \rightarrow H(\omega) = G_0 e^{-j\omega t_d}$$

- Resposta em amplitude constante -  $|H(\omega)| = G_0$
- Resposta em fase linear -  $\angle H(\omega) = -\omega t_d$

# Transmissão sem Distorção



- O atraso de grupo ou atraso de envelope é definido como

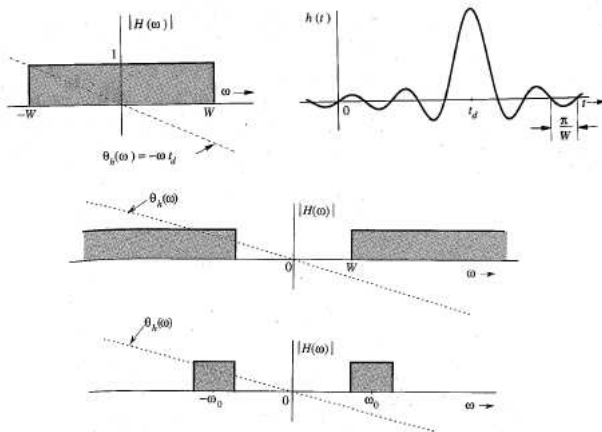
$$t_g(\omega) = -\frac{d\angle H(\omega)}{d\omega}$$

- $t_g(\omega)$  constante implica que todas as componentes do sinal são igualmente atrasadas por  $t_g(\omega) = t_d$
- Para um sistema sem distorção,  $t_g(\omega)$  deve ser pelo menos constante na banda de interesse

# Filtros Ideais

- Em muitas situações práticas é necessário limitar o espectro de frequências de um sinal
  - Melhor aproveitamento do espectro
  - Componentes de alta frequência de pouca relevância na aplicação considerada
- Os filtros ideais permitem que a transmissão ocorra sem distorção em uma determinada banda e suprimem as frequências fora dessa banda
- Os principais tipos de filtros são:
  - Passa-baixas (*Low-pass*)
  - Passa-altas (*High-pass*)
  - Passa-faixas (*Band-pass*)
  - Rejeita-faixas

# Filtros Ideais



# Filtros Ideais

- Os filtros ideais não são fisicamente realizáveis

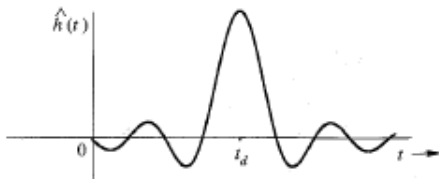
$$H(\omega) = \text{rect}\left(\frac{\omega}{2W}\right)e^{-j\omega t_d} \rightarrow h(t) = \frac{W}{\pi} \text{sinc}[W(t - t_d)]$$

- $h(t)$  é não causal e portanto não é fisicamente realizável
- Outra forma de verificar se um filtro é fisicamente realizável é verificar se ele atende o critério de Paley-Wiener

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\ln |H(\omega)||}{1 + \omega^2} d\omega < \infty$$

# Filtros Realizáveis

- Filtros fisicamente realizáveis podem ser obtidos truncando-se a parte negativa de  $h(t)$ , resultando em  $\hat{h}(t) = h(t)u(t)$
- Se  $t_d$  é grande,  $h(t)$  e  $\hat{h}(t)$  são bastante próximos
  - $\hat{H}(\omega)$  é uma boa aproximação





# Energia de um Sinal

- A energia de um sinal  $x(t)$  pode ser calculada no domínio do tempo a partir da seguinte expressão

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

- No domínio da frequência, de acordo com o teorema de Parseval, a energia de  $x(t)$  pode ser calculada como

$$E_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df$$

# Densidade Espectral de Energia

- A partir da expressão de Parseval verifica-se que a energia pode ser obtida através da área do gráfico de  $|X(\omega)|^2$ 
  - $|X(\omega)|^2$  é chamado de densidade espectral de energia (DEE - ESD em inglês)
- Para sinais reais,  $|X(\omega)|^2$  é uma função par de  $\omega$  e assim, a energia pode ser calculada como

$$E_x = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega$$

- A contribuição de energia do intervalo de frequências  $(\omega_1, \omega_2)$  é calculada como

$$\Delta E_x = \frac{1}{\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} |X(\omega)|^2 d\omega$$

# Largura de Banda Essencial

- O espectro da maioria dos sinais se estende até o infinito
- Entretanto, como a energia é em geral finita, o espectro de amplitude tende a zero quando  $\omega \rightarrow \infty$
- Pode-se então suprimir as componentes acima de  $B$  Hz ( $2\pi B$  rad/s) com pouco efeito no sinal original
- Segundo esse critério, a largura de banda  $B$  é chamada de **largura de banda essencial**
- O critério para estimar  $B$  depende da aplicação considerada
  - Faixa de frequência que contém uma certa percentagem da energia (total) do sinal

# Modulação

- Um sinal proveniente de uma fonte de informação ou de um transdutor é chamado de sinal em **banda base**
- Os sinais em banda básica podem ser transmitidos através de cabos ou fibras ópticas
- Por outro lado, esse tipo de sinal não é adequado para transmissão através de um enlace de rádio
  - Frequências mais altas são necessárias para garantir maior eficiência na propagação
  - Antenas menores podem ser utilizadas aumentando-se a frequência
- A comunicação em que o espectro em banda base é deslocado para frequências maiores é conhecida como **comunicação com portadora**

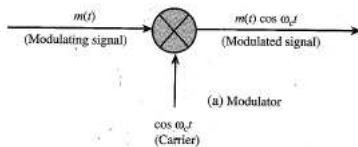
# Modulação

- Na comunicação com portadora, um sinal senoidal tem a sua amplitude, fase ou frequência modificada pelo sinal em banda base  $m(t)$
- Para os sinais em banda base analógicos, as modulações principais são:
  - Modulação em Amplitude (AM, AM-DSB-SC, AM-SSB-SC, QAM e AM-VSB)
  - Modulação em Ângulo (FM e PM)
- Para os sinais digitais, há uma infinidade de tipos de modulação
  - ASK, FSK, PSK, DPSK, GMSK, OOSK, etc.

# Modulação AM-DSB-SC

- Seja  $m(t)$  um sinal em banda base com largura de banda igual a  $B$  Hz e  $c(t) = \cos \omega_c t$  uma portadora senoidal
- Na modulação em amplitude com banda lateral dupla e portadora suprimida (AM-DSB-SC), o sinal modulado é dado por

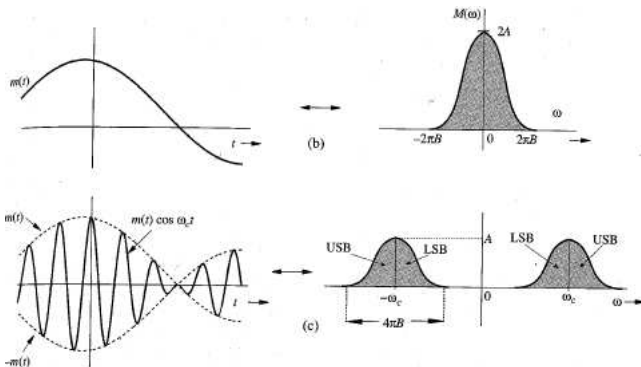
$$s(t) = m(t)c(t) = m(t) \cos \omega_c t$$



# Modulação AM-DSB-SC

- Se  $m(t) \iff M(\omega)$ , então

$$m(t) \cos \omega_c t \iff \frac{1}{2}[M(\omega + \omega_c) + M(\omega - \omega_c)]$$



# Espectro da Modulação AM-DSB-SC

- Sendo  $m(t)$  um sinal real, o espectro de amplitude  $|M(\omega)|$  é uma função par
- Quando o sinal é modulado, a sua largura de banda passa a ser de  $2B$  Hz
- A parte superior do espectro (frequências acima de  $\omega_c$ ) possui a mesma informação que a parte inferior do espectro (frequências abaixo de  $\omega_c$ )
  - Banda lateral superior (Upper SideBand - USB) -  
 $\omega_c < |\omega| < (\omega_c + 2\pi B)$
  - Banda lateral inferior (Lower SideBand - LSB) -  $(\omega_c - 2\pi B) < |\omega| < \omega_c$
- Observa-se que o sinal da portadora não aparece no espectro do sinal modulado (impulso em  $\pm\omega_c$ )



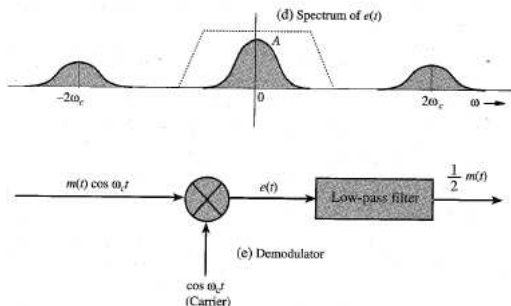
# Demodulação de um sinal AM-DSB-SC

- O processo de recuperação do sinal em banda base é chamado de **demodulação**
- Na demodulação, o espectro é transladado de volta para a origem e as componentes indesejadas são eliminadas por filtragem
- Seja  $s(t)$  o sinal modulado, então:

$$\begin{aligned}e(t) &= s(t) \cos \omega_c t = m(t) \cos^2 \omega_c t \\&= \frac{1}{2}[m(t) + m(t) \cos 2\omega_c t] \\E(\omega) &\Longleftrightarrow \frac{1}{2}M(\omega) + \frac{1}{4}[M(\omega + 2\omega_c) + M(\omega - 2\omega_c)]\end{aligned}$$

# Demodulação de um sinal AM-DSB-SC

- Passando o sinal  $e(t)$  através de um filtro passa-baixas, o sinal  $\frac{1}{2}m(t)$  é recuperado
- Este processo é conhecido como demodulação síncrona ou coerente
  - É necessário na demodulação uma senóide com a mesma fase e frequência usada na modulação



# Modulação em Amplitude (AM)

- Na demodulação de um sinal AM-DSB-SC, é necessário gerar uma portadora na recepção com a mesma frequência e fase usadas na modulação
  - Demodulação síncrona
- Na prática, isso exige que o transmissor possua circuitos de recuperação da portadora (PLL), tornando a sua construção mais complexa
- Em algumas situações, é de interesse que os receptores sejam mais simples e conseqüentemente mais baratos
  - Comunicação por difusão (*broadcast*)

# Modulação em Amplitude (AM)

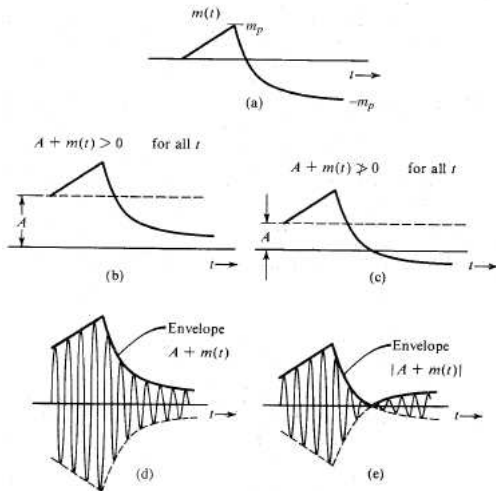
- Uma alternativa é enviar o sinal da portadora junto com o sinal modulado
  - Receptor mais simples
  - O transmissor precisa gastar mais potência na transmissão
- Na modulação em Amplitude tradicional, o sinal modulado é dado por:

$$\varphi_{AM}(t) = A \cos \omega_c t + m(t) \cos \omega_c t = (A + m(t)) \cos \omega_c t$$

- O espectro do sinal modulado é dado por:

$$\varphi_{AM}(t) \iff \frac{1}{2}[M(\omega + \omega_c) + M(\omega - \omega_c)] \\ + \pi A[\delta(\omega + \omega_c) + \delta(\omega - \omega_c)]$$

# Modulação em Amplitude (AM)



# Modulação em Amplitude (AM)

- Desde que  $A + m(t) \geq 0$  para todo  $t$ , é possível demodular  $\varphi_{AM}(t)$  através da detecção de envelope
- Admitindo-se que o sinal  $m(t)$  assume valores negativos para determinados valores de  $t$  e sendo  $m_{p-}$  o módulo do valor de pico negativo, então

$$A \geq m_{p-}$$

- Definindo-se o **índice de modulação AM**  $\mu$  como

$$\mu = \frac{m_{p-}}{A}$$

- Então a condição seguinte assegura que o sinal possa ser demodulado por detecção de envelope

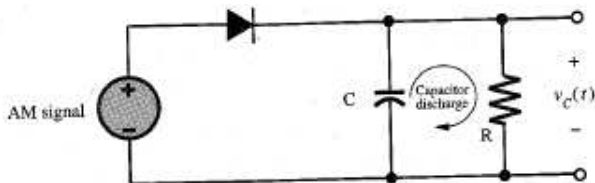
$$0 \leq \mu \leq 1$$

# Modulação em Amplitude (AM)

- Quando  $\mu > 1 \rightarrow A < m_{p-}$ , então o sinal AM não pode ser demodulado por detecção de envelope
  - Essa condição é chamada de sobremodulação
  - Nesse caso, só é possível realizar a demodulação síncrona
- Para todos os casos é possível realizar a demodulação síncrona

# Detector de Envelope

- No detector de envelope, o capacitor é carregado durante o ciclo positivo e descarrega quando o diodo é cortado



- Para reduzir as ondulações, é necessário que  $RC \gg 1/\omega_c$
- Entretanto, se  $RC$  for muito grande, a tensão no capacitor pode não seguir o envelope



# Detector de Envelope

