

Exemplos

Edmar J Nascimento

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Elétrica

www.univasf.edu.br/~edmar.nascimento

May 10, 2021

Exemplo

Exemplo 7.1

Determinar a transformada de Fourier de $x(t) = e^{-at}u(t)$ e esboçar o seu espectro

Solução exemplo 7.1

$$\begin{aligned}X(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \\&= \int_0^{\infty} e^{-(a+j\omega)t} dt = \frac{1}{a+j\omega}, \text{ se } a > 0 \\|X(\omega)| &= \frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega^2}}, \quad \angle X(\omega) = -\arctan \frac{\omega}{a}\end{aligned}$$

Exemplo

Exemplo

Usando a propriedade da dualidade, mostre que:

$$\begin{aligned}\frac{W}{\pi} \operatorname{sinc}(Wt) &\Longleftrightarrow \operatorname{ret}\left(\frac{\omega}{2W}\right) \\ \frac{W}{2\pi} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{Wt}{2}\right) &\Longleftrightarrow \Delta\left(\frac{\omega}{2W}\right)\end{aligned}$$

Exemplo

Exemplo

Usando a propriedade do escalamento, mostre que:

$$e^{at}u(-t) \iff \frac{1}{a - j\omega}, \quad (a > 0)$$
$$e^{-a|t|} \iff \frac{2a}{a^2 + \omega^2}, \quad (a > 0)$$

Exemplo

Exemplo 7.15

Determine a transformada de Fourier de $x(t) \cos 10t$ e esboce o seu espectro para

$$x(t) = \text{ret}\left(\frac{t}{4}\right)$$

Solução exemplo 7.15

$$x(t) \cos 10t \iff 2\{\text{sinc}[2(\omega + 10)] + \text{sinc}[2(\omega - 10)]\}$$

Exemplo

Exemplo

Usando a propriedade da convolução, mostre que:

$$x(t) \cos \omega_0 t \iff \frac{1}{2}[X(\omega - \omega_0) + X(\omega + \omega_0)]$$

Exemplo

Exemplo

Usando a propriedade de diferenciação no tempo, mostre que:

$$\Delta\left(\frac{x}{\tau}\right) \iff \frac{\tau}{2} \text{sinc}^2\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)$$

Sugestão:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

Exemplo

Exemplo

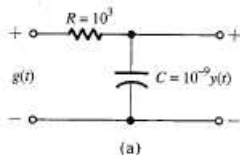
Usando a propriedade de integração no tempo, mostre que:

$$u(t) \iff \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

Exemplo

Exemplo

Para o circuito RC, determinar $H(\omega)$, esboçar $|H(\omega)|$, $\angle H(\omega)$ e $t_g(\omega)$.
Para que a transmissão seja sem distorção, qual o requisito da largura de banda de $x(t)$ se a variação tolerada na resposta em amplitude é de 2% e de 5% no atraso? Qual é o atraso? Encontre $y(t)$.



Exemplo

Solução exemplo

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC} = \frac{a}{a + j\omega}; \quad a = \frac{1}{RC} = 10^6$$

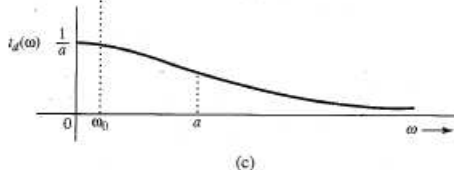
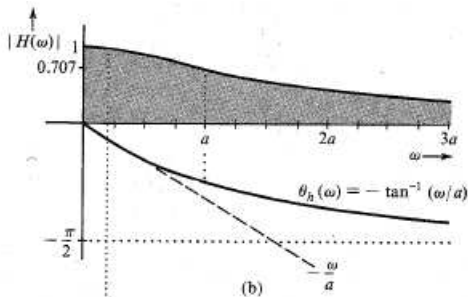
$$|H(\omega)| = \frac{a}{\sqrt{a^2 + \omega^2}} \simeq 1; \omega \ll a$$

$$\angle H(\omega) = -\arctan \frac{\omega}{a} \simeq -\frac{\omega}{a}; \omega \ll a$$

$$t_g(\omega) = -\frac{d\angle H(\omega)}{d\omega} = \frac{a}{\omega^2 + a^2} \simeq \frac{1}{a} = 10^{-6}; \omega \ll a$$

Exemplo

Solução exemplo



Exemplo

Solução exemplo

- Como $H(0) = 1$ e $t_g(0) = 1/a$, a região de transmissão sem distorção é calculada como

$$|H(\omega_0)| = \frac{a}{\sqrt{a^2 + \omega_0^2}} \geq 0,98 \rightarrow \omega_0 \leq 203.000$$

$$t_g(\omega_0) = \frac{a}{\omega_0^2 + a^2} \geq \frac{0,95}{a} \rightarrow \omega_0 \leq 229.400$$

- Assim, a banda de $x(t)$ deve ser menor que 203.000 rad/s ou 32,31 kHz

Exemplo

Exemplo 7.20

Estime a largura de banda essencial W em rad/s do sinal $e^{-at}u(t)$, $a > 0$, sendo que essa banda deve conter 95% da energia do sinal.

Solução exemplo 7.20

$$\begin{aligned}x(t) &= e^{-at}u(t) \leftrightarrow X(\omega) = \frac{1}{j\omega + a} \\E_x &= \int_0^\infty e^{-2at} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\omega^2 + a^2} d\omega = \frac{1}{2a} \\0,95 \frac{1}{2a} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W \frac{1}{\omega^2 + a^2} d\omega \rightarrow W = (12,706.a) \text{ rad/s}\end{aligned}$$