

Amostragem

Edmar José do Nascimento
(Análise de Sinais e Sistemas)

<http://www.univasf.edu.br/~edmar.nascimento>

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Elétrica

Roteiro

- 1 Teorema da Amostragem
- 2 Transformada de Fourier Discreta

Introdução

- O processo de digitalização de um sinal analógico consiste em duas etapas básicas: amostragem e quantização
- No processo de amostragem, obtém-se amostras do sinal em instantes de tempo discretos
- Na etapa de quantização, as amostras em tempo discretos obtidas são mapeadas para um alfabeto finito
- O sinal digital consiste então de uma sequência de símbolos discretos (números)
- Esses números podem ainda ser representados em outros sistemas de numeração como o binário

Teorema da Amostragem

- O teorema da amostragem estabelece condições para que um sinal analógico possa ser recuperado a partir de suas amostras
- Um sinal $g(t)$ cujo espectro é limitado em banda a B Hz (ou seja, $G(\omega) = 0$ para $|\omega| > 2\pi B$) pode ser reconstruído a partir de suas amostras se ele for amostrado a uma frequência f_s superior a $2B$ Hz
 - $f_s > 2B$ ou $T_s = 1/f_s < 1/(2B)s$
- A prova desse teorema pode ser feita reconstruindo-se $g(t)$ a partir de suas amostras usando um trem de impulsos $\delta_{T_s}(t)$ com período T_s

Teorema da Amostragem

- O sinal amostrado $\bar{g}(t)$ pode ser escrito como

$$\begin{aligned}\bar{g}(t) &= g(t)\delta_{T_s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(t)\delta(t - nT_s) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(nT_s)\delta(t - nT_s)\end{aligned}$$

- Como $\delta_{T_s}(t)$ é periódico, a sua expansão em séries de Fourier resulta em

$$\delta_{T_s}(t) = \frac{1}{T_s}[1 + 2 \cos \omega_s t + 2 \cos 2\omega_s t + \dots]$$

- Assim o sinal amostrado $\bar{g}(t)$ pode ser reescrito como

$$\bar{g}(t) = \frac{1}{T_s}[g(t) + 2g(t) \cos \omega_s t + 2g(t) \cos 2\omega_s t + \dots]$$

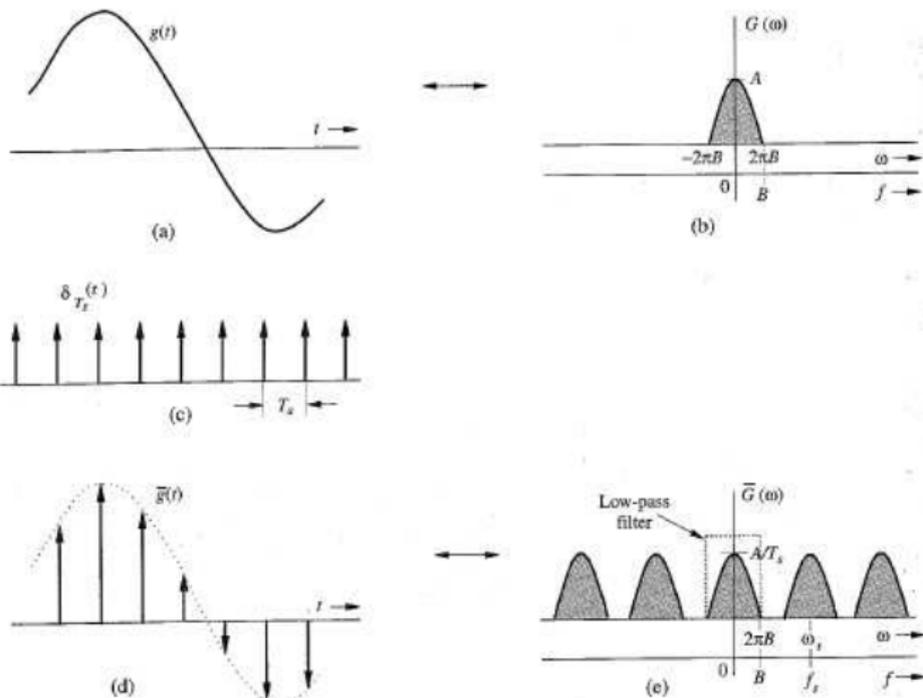
Teorema da Amostragem

- O espectro de $\bar{g}(t)$ denotado por $\bar{G}(\omega)$ é dado então por

$$\begin{aligned}\bar{G}(\omega) &= \frac{1}{T_s} [G(\omega) + G(\omega - \omega_s) + G(\omega + \omega_s) + \\ &\quad G(\omega - 2\omega_s) + G(\omega + 2\omega_s) + \dots] \\ &= \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(\omega - n\omega_s)\end{aligned}$$

- Para que se possa reconstruir $g(t)$ a partir de $\bar{g}(t)$ é necessário que as réplicas de $G(\omega)$ não se sobreponham, ou seja, que $\omega_s > 2(2\pi B)$ ou $f_s > 2B$
- A taxa mínima de amostragem $f_s = 2B$ é denominada de *taxa de Nyquist* e o período máximo $T_s = 1/(2B)$ de *intervalo de Nyquist*

Sinal Amostrado e o seu Espectro



Reconstrução Exata

- Conforme observado na prova do teorema, a reconstrução do sinal analógico pode ser feita gerando-se um trem de impulsos com amplitudes iguais as das amostras e passando-se o sinal através de um filtro passa-baixas com banda B Hz
- No domínio do tempo, esta operação pode ser obtida considerando-se um filtro

$$h(t) = 2BT_s \text{sinc}(2\pi Bt) \iff H(\omega) = T_s \text{rect}\left(\frac{\omega}{4\pi B}\right)$$

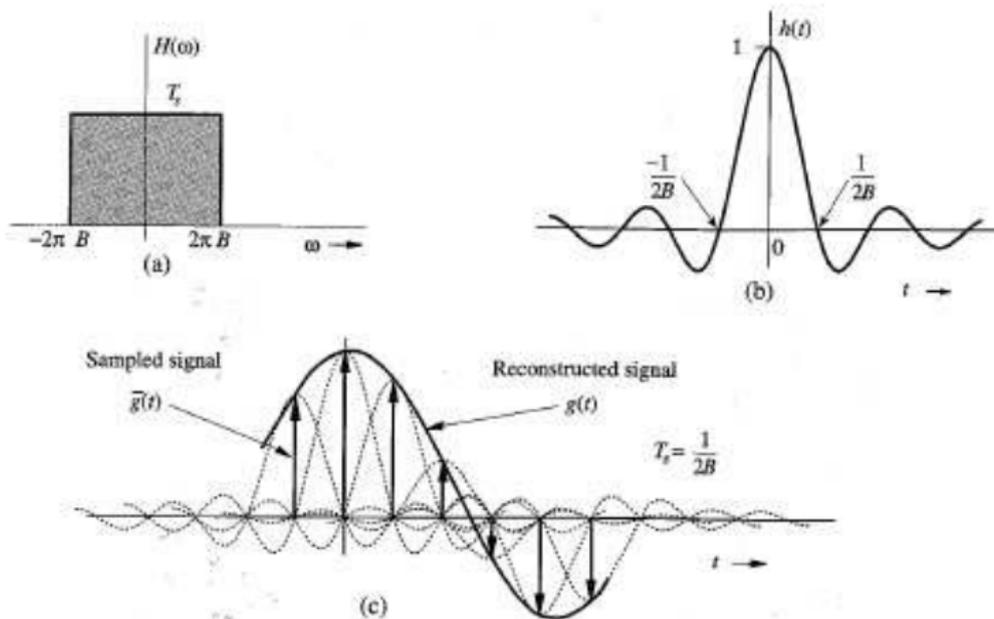
Reconstrução Exata

- Se $T_s = 1/(2B)$, então a reconstrução exata do sinal é dada pela *fórmula de interpolação*

$$\begin{aligned}g(t) &= \sum_k g(kT_s)\delta(t - kT_s) * h(t) = \sum_k g(kT_s)h(t - kT_s) \\ &= \sum_k g(kT_s)\text{sinc}[2\pi B(t - kT_s)] \\ &= \sum_k g(kT_s)\text{sinc}(2\pi Bt - k\pi)\end{aligned}$$

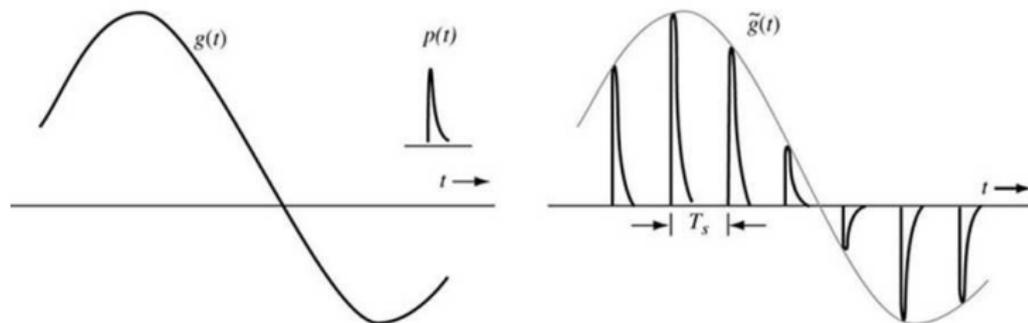
- Cabe lembrar que um sistema com esse $h(t)$ não é fisicamente realizável

Reconstrução Exata



Reconstrução Prática de Sinais

- Como será mostrado adiante, pulsos periódicos genéricos podem ser usados para reconstruir um sinal a partir de suas amostras
- Nesse tipo de reconstrução, a característica não ideal do pulso é compensada por um filtro equalizador



Reconstrução Prática de Sinais

- O sinal reconstruído a partir de pulsos $p(t)$ é representado por

$$\begin{aligned}\tilde{g}(t) &\triangleq \sum_n g(nT_S)p(t - nT_S) \\ &= p(t) * \left[\sum_n g(nT_S)\delta(t - nT_S) \right] = p(t) * \bar{g}(t)\end{aligned}$$

- No domínio da frequência, tem-se que

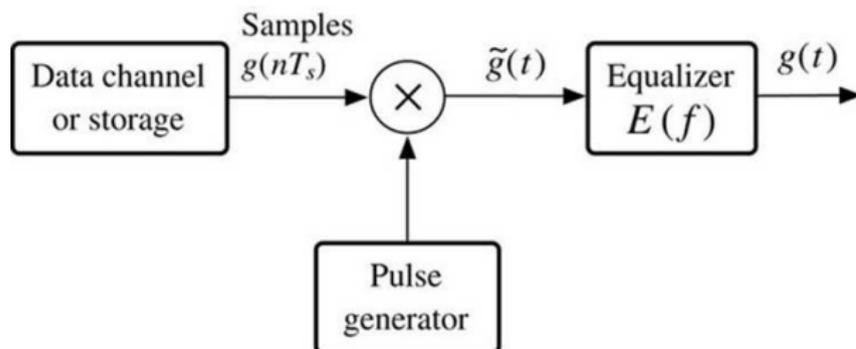
$$\begin{aligned}\tilde{g}(t) \iff \tilde{G}(f) &= P(f) \frac{1}{T_S} \sum_n G(f - nf_S) \\ &= P(f) \left[G(f) \frac{1}{T_S} + \frac{1}{T_S} \sum_{n, n \neq 0} G(f - nf_S) \right]\end{aligned}$$

Reconstrução Prática de Sinais

- Para que $g(t)$ seja recuperado, é necessário equalizar o sinal com um filtro $E(f)$, de modo que:

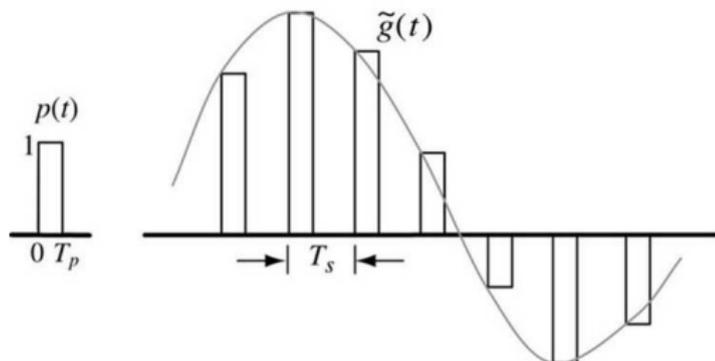
$$G(f) = E(f)\tilde{G}(f)$$

$$E(f)P(f) = \begin{cases} 0 & |f| > f_s - B \\ T_s & |f| < B \end{cases}$$



Reconstrução Prática de Sinais

- Quando os pulsos $p(t)$ são pulsos retangulares, tem-se um sistema de retenção de ordem zero (*zero-order hold*)
- Nesse caso, o sinal reconstruído a partir de suas amostras tem o formato indicado abaixo

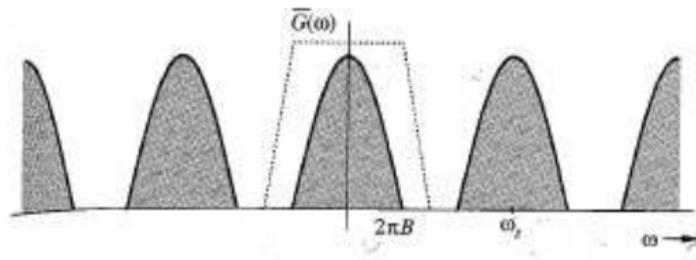
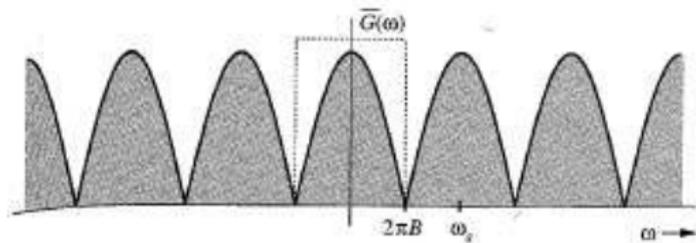


- Aproximações melhores podem ser obtidas através de um filtro de retenção de primeira ordem

Dificuldades na Reconstrução

- Quando se utiliza a frequência de Nyquist na amostragem, se requer um filtro passa-baixas ideal (irrealizável) na reconstrução
- Quando há uma separação maior entre as bandas ($f_s > 2B$), é mais fácil projetar filtros para recuperar o sinal $g(t)$
- Sendo assim, há um compromisso entre o projeto do filtro e a escolha da frequência de amostragem

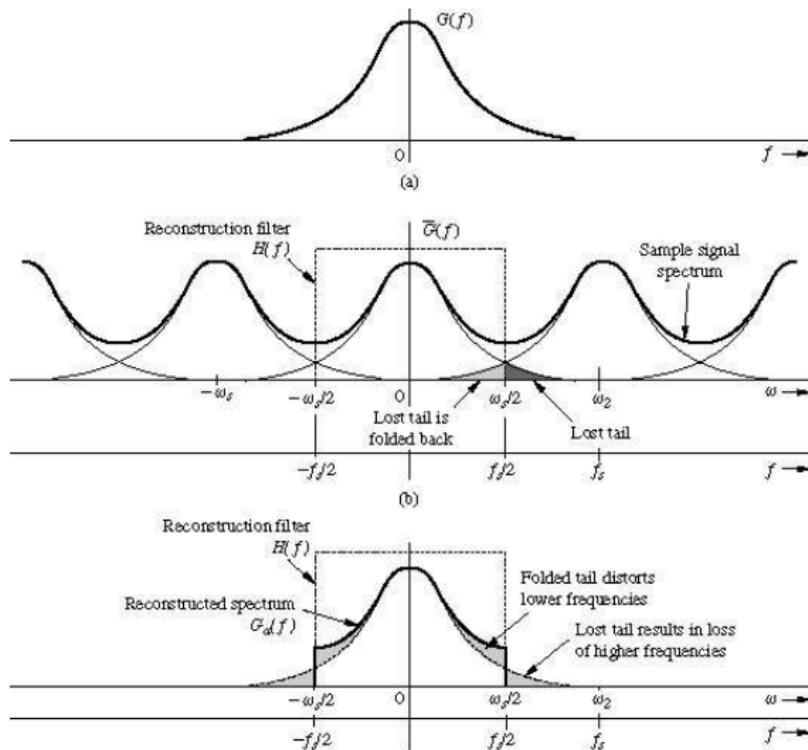
Dificuldades na Reconstrução



Dificuldades na Reconstrução

- Outro problema que surge é que os sinais práticos não são limitados em banda
- Isso significa que as componentes do sinal acima de $\omega_s/2$ são perdidas e também interferem ao mesmo tempo no sinal recuperado
- Esse fenômeno é conhecido como mascaramento (*aliasing*), também conhecido como dobra espectral (*spectral folding*)

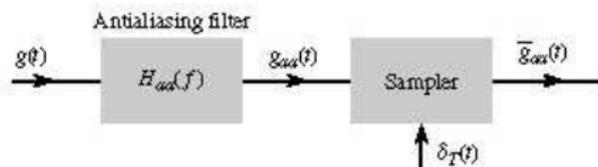
Mascaramento



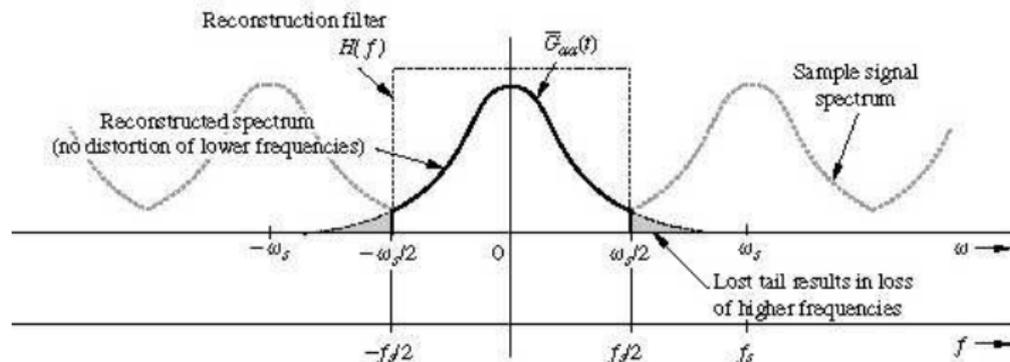
Mascaramento

- Várias técnicas podem ser usadas para lidar com esse problema
 - Aumentar a frequência de amostragem
 - Eliminar uma porção do espectro antes da amostragem (filtro antialiasing) (pré-filtragem)
 - Eliminar a porção comprometida do espectro do sinal amostrado (filtro antialiasing) (pós-filtragem)

Mascaramento



(d)



(e)

Amostragem Prática

- Anteriormente, foi admitido que os valores das amostras $g(kT_S)$ nos instantes kT_S eram perfeitamente conhecidos
- A partir dessas amostras se poderia reconstruir o sinal analógico utilizando pulsos periódicos e filtros equalizadores
- Entretanto, conhecer o valor real de uma amostra no instante kT_S é como conhecer precisamente o valor da velocidade instantânea de um móvel
- Na prática, o valor da amostra é inferido a partir de um intervalo de duração não nula T_p

Amostragem Prática

- O valor da amostra pode ser a simples média dos valores no intervalo ou a média com algum tipo de ponderação

$$g_1(kT_S) = \frac{1}{T_p} \int_{-T_p/2}^{T_p/2} g(kT_S + t) dt$$

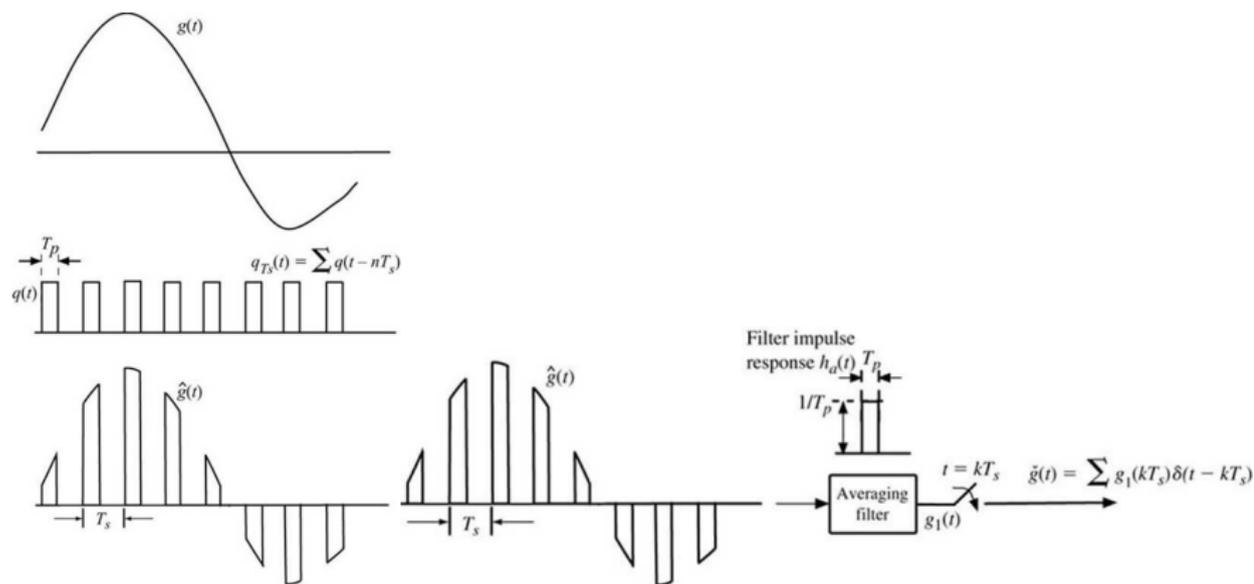
- Em termos gerais, o valor da amostra no instante kT_S pode ser representado por

$$g_1(kT_S) = \frac{1}{T_p} \int_{-T_p/2}^{T_p/2} q(t)g(kT_S + t) dt$$

- Assim, o amostrador prático gera sinais da forma

$$\check{g}(t) = \sum g_1(kT_S)\delta(t - kT_S)$$

Amostragem Prática



Amostragem Prática

- Assim como na reconstrução do sinal por pulsos, a natureza da distorção introduzida pela amostragem prática é conhecida e pode ser eliminada com o uso de filtros equalizadores
- Quando se utiliza ponderação uniforme, pode-se mostrar que um sinal de banda B é distorcido pelo termo $F_0(f)$ dado por

$$F_0(f) = \frac{1}{T_S} \sum_n Q_n \text{sinc}[\pi(f + nf_S)T_p]$$

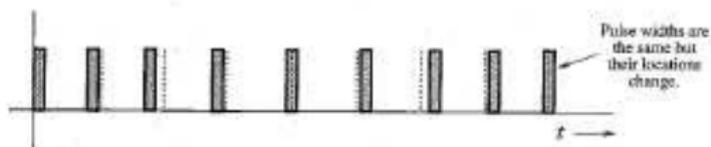
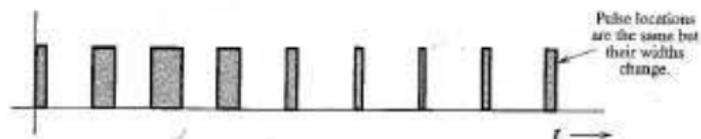
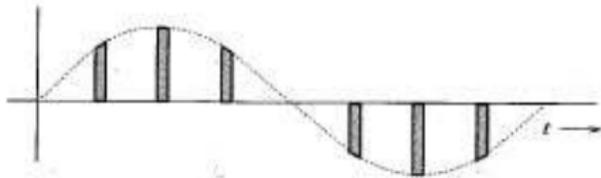
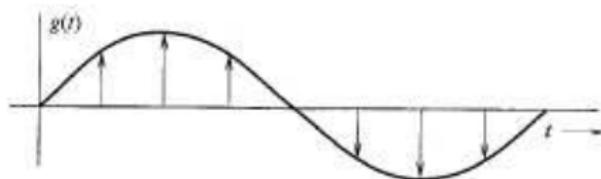
- Na reconstrução do sinal analógico $g(t)$, um equalizador $E(f)$ que corrija os efeitos da amostragem não ideal $F_0(f)$ e da reconstrução não ideal $P(f)$ deve garantir que

$$E(f)P(f)F_0(f) = 1, |f| < B$$

Aplicações do Teorema da Amostragem

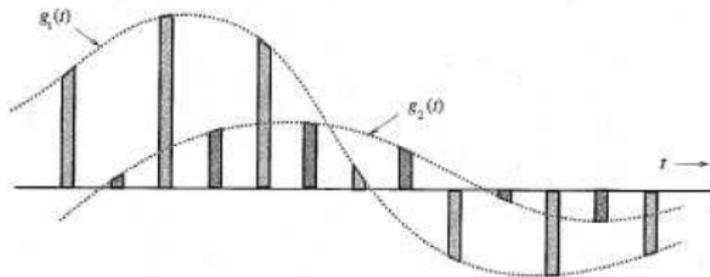
- Com a amostragem, um sinal contínuo pode ser representado por uma sequência de números
- Pode-se utilizar o valor das amostras para variar os parâmetros de um trem de pulsos periódico
 - Amplitude - (PAM - Pulse-Amplitude Modulation)
 - Largura - (PWM - Pulse-Width Modulation)
 - Posição - (PPM - Pulse-Position Modulation)
 - PCM - Pulse-Code Modulation

Sinais Modulados em Pulso



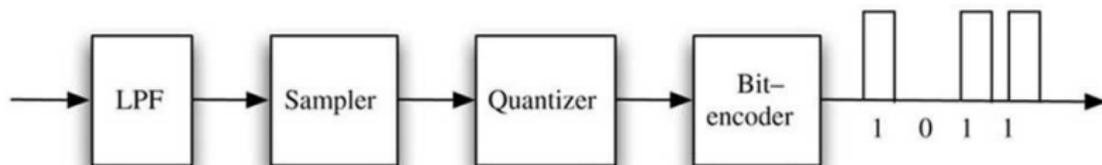
Sinais Modulados em Pulso

- Com as modulações de pulso, pode-se utilizar a multiplexação por divisão de tempo (TDM)



Pulse-Code Modulation (PCM)

- A Modulação por codificação de pulso (PCM) é uma ferramenta usada para a conversão A/D
- Com PCM, um sinal analógico contínuo no tempo é convertido em um sinal digital
- No processo de conversão, o sinal é amostrado e em seguida quantizado



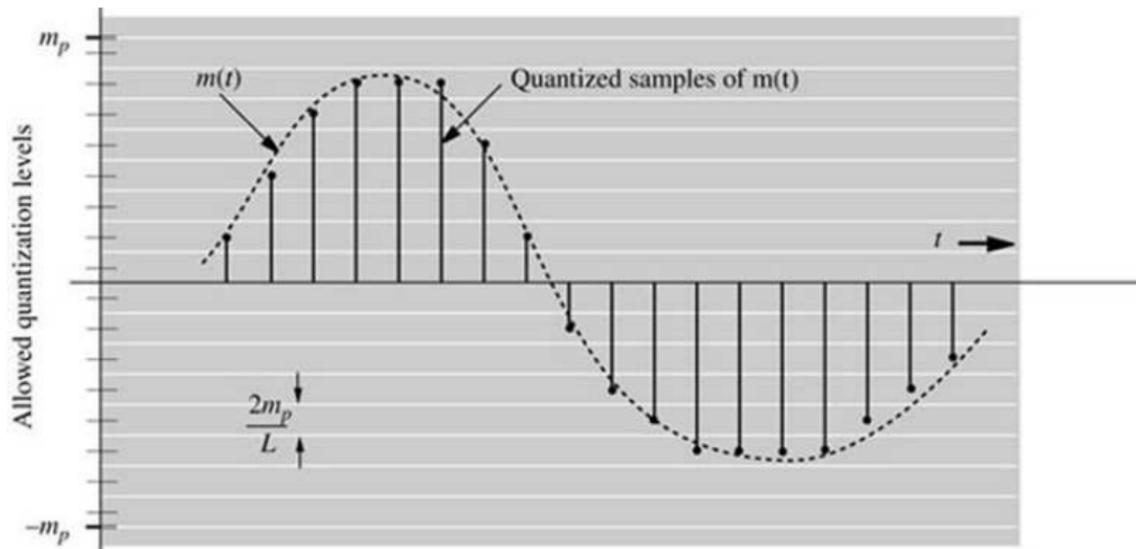
Pulse-Code Modulation (PCM)

- Em PCM, as amplitudes são arredondadas para um dentre L níveis discretos (níveis quantizados)
- Se o sinal analógico $m(t)$ possui amplitudes na faixa $(-m_p, m_p)$, o tamanho de cada intervalo é dado por:

$$\Delta v = \frac{2m_p}{L}$$

- Cada amostra é aproximada para o ponto médio do intervalo em que ela se encontra
- Um sinal desse tipo é conhecido como um sinal digital L-ário

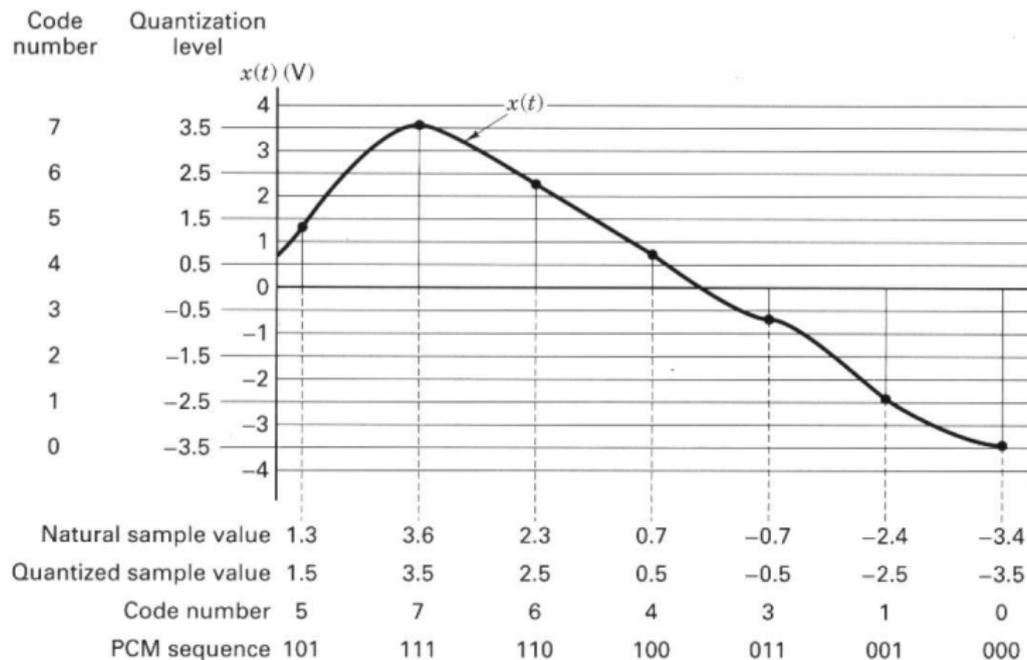
Pulse-Code Modulation (PCM)



Pulse-Code Modulation (PCM)

- Do ponto de vista prático, sinais binários são desejáveis
- Para converter um sinal digital L -ário em um sinal binário (2 níveis - 0 e 1) pode-se utilizar algum tipo de codificação
 - BCD, Gray, NBC, etc.
- L níveis correspondem a L símbolos que correspondem a $\log_2 L$ bits
- Em telefonia, tem-se:
 - $f_{min} = 300\text{Hz}$, $f_{max} = 3400\text{Hz}$ e $B = 3100\text{Hz}$
 - $f_s = 6,8\text{kHz}$, mas na prática escolhe-se $f_s = 8\text{kHz}$
 - $L = 256$ ou 8 bits por amostra
 - $R = 64\text{kbps}$

Pulse-Code Modulation (PCM)



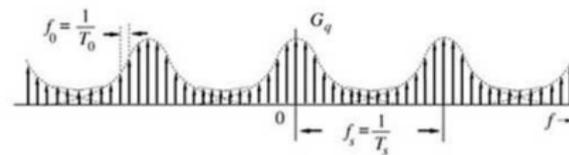
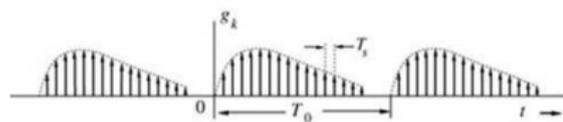
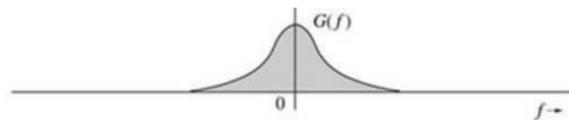
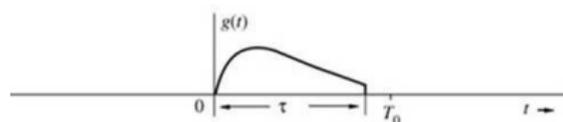
Pulse-Code Modulation (PCM)

- Em som com qualidade de CD, tem-se:
 - $B = 15\text{kHz}$
 - $f_s = 30\text{kHz}$, mas na prática escolhe-se $f_s = 44,1\text{kHz}$
 - $L = 65536$ ou 16 bits por amostra
 - $R = 705,6\text{kbps}$

Transformada de Fourier Discreta

- Em cálculos numéricos é necessário
 - Um conjunto de valores discretos de $x(t)$ (amostras)
 - Calcular um conjunto de valores discretos de $X(\omega)$ a partir das amostras de $x(t)$
- A solução está no teorema da amostragem e no seu dual (amostragem em frequência)
- Se $x(t)$ é limitado no tempo, então $X(\omega)$ é ilimitado em faixa
- O espectro de $\bar{x}(t)$, $\bar{X}(\omega)$, é a repetição de $X(\omega)$ a cada $f_s = 1/T_s$ Hz
- Na amostragem espectral, o espectro é reconstruído a partir de suas amostras

Relação entre as amostras de $x(t)$ e $X(\omega)$



Transformada de Fourier Discreta

- Seja N_0 o número de amostras de $x(t)$ em um período T_0 , então $N_0 = T_0/T_s$
- Seja N'_0 o número de amostras de $X(\omega)$ em um período f_s , então $N'_0 = f_s/f_0$

$$f_s = \frac{1}{T_s}, f_0 = \frac{1}{T_0} \implies N_0 = \frac{T_0}{T_s} = \frac{f_s}{f_0} = N'_0$$

- Definindo-se

$$x_n = T_s x(nT_s) = \frac{T_0}{N_0} x(nT_s)$$

$$X_r = X(r\omega_0), \omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

Transformada de Fourier Discreta

- O par da transformada de Fourier discreta é dado por

$$X_r = \sum_{n=0}^{N_0-1} x_n e^{-jr\Omega_0 n}$$

$$x_n = \frac{1}{N_0} \sum_{r=0}^{N_0-1} X_r e^{jr\Omega_0 n}, \Omega_0 = \omega_0 T_s = \frac{2\pi}{N_0}$$

$$x_n \iff X_r$$

- Parâmetros (N_0, T_s, T_0)

$$f_s \geq 2B, T_s = \frac{1}{f_s} \implies T_s \leq \frac{1}{2B}$$

$$f_0 = \frac{1}{T_0} \text{ (resolução na frequência), } N_0 = \frac{T_0}{T_s}$$

Exemplo

Exemplo 8.8

Utilizar a TDF para calcular a transformada de Fourier de $e^{-2t}u(t)$ e traçar o seu espectro.

Solução

O cálculo da TF leva a

$$x(t) = e^{-2t}u(t) \iff \frac{1}{2 + j\omega} = \frac{1}{\sqrt{4 + \omega^2}} e^{-j \arctan \omega/2}$$

Exemplo

Solução

Para calcular T_s , é necessário estimar B . Se $\omega' = 2\pi B$, tal que $|X(\omega')|$ corresponde a 1% do valor de pico de $|X(\omega)|$ (0,5), então:

$$\frac{1}{2\pi B} = 0,005 \iff B = \frac{100}{\pi} \text{ Hz} \iff T_s \leq \frac{1}{2B} = \frac{\pi}{200}$$

Para calcular T_0 , é necessário truncar $x(t)$, de modo que $x(T_0) \ll 1$.

$$T_0 = 4 \iff x(4) = e^{-8} = 0,00035$$

$$N_0 = \frac{T_0}{T_s} = 254,6 \iff N_0 = 256 = 2^8 \text{ (FFT)}$$

$$N_0 = 256, T_0 = 4 \iff T_s = 0,015625 = 1/64$$

Solução

```
% Exemplo 8.8 Lathi, Sinais e Sistemas
```

```
T_0 = 4; N_0 = 256;
T = T_0/N_0; t = (0:T:T*(N_0-1))';
x = T*exp(-2*t); x(1) = T*(exp(-2*T_0)+1)/2;
X_r = fft(x); r = [-N_0/2:N_0/2-1]'; omega_r = r*2*pi/T_0;

omega = linspace(-pi/T,pi/T,4097); X= 1./(j*omega+2);

subplot(211);
plot(omega,abs(X),'k',omega_r,fftshift(abs(X_r)),'ko');
xlabel('\omega'); ylabel('|X(\omega)|');
axis([-0.01 40 -0.01 0.51]);
legend('TF verdadeira', ['TFD com T_0 = ', num2str(T_0), ', N_0 = ', num2str(N_0)],0);
subplot(212);
plot(omega,angle(X),'k',omega_r,fftshift(angle(X_r)),'ko');
xlabel('\omega'); ylabel('\angle X(\omega)');
axis([-0.01 40 -pi/2-0.01 0.01]);
legend('TF verdadeira', ['TFD com T_0 = ', num2str(T_0), ', N_0 = ', num2str(N_0)],0);
```

Solução

