Análise de Sinais no Tempo Contínuo: A Transformada de Fourier

Edmar José do Nascimento
(Análise de Sinais e Sistemas)
http://www.univasf.edu.br/˜edmar.nascimento

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Elétrica

Roteiro

1. Transformada de Fourier
   - Introdução
   - Transformadas Úteis
   - Propriedades
   - Sistemas Lineares
   - Filtros
   - Energia
   - Modulação em Amplitude

Roteiro

1. Transformada de Fourier
   - Introdução
   - Transformadas Úteis
   - Propriedades
   - Sistemas Lineares
   - Filtros
   - Energia
   - Modulação em Amplitude

Introdução

- A transformada de Fourier pode ser considerada como um caso especial da transformada de Laplace com $s = j\omega$
  - No caso do sinal ser a resposta ao impulso de um determinado sistema, é necessário que o sistema seja estável para que $s = j\omega$ pertença à RDC do sistema
- Ao contrário da transformada de Laplace, a transformada de Fourier inversa pode ser calculada sem a necessidade do formalismo do cálculo de variáveis complexas
- A transformada de Fourier é bastante usada em aplicações de processamento de sinais e nas telecomunicações

Definições

- A transformada de Fourier de um sinal $x(t)$ é definida por:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$$

- A transformada de Fourier inversa de $X(\omega)$ é dada por:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

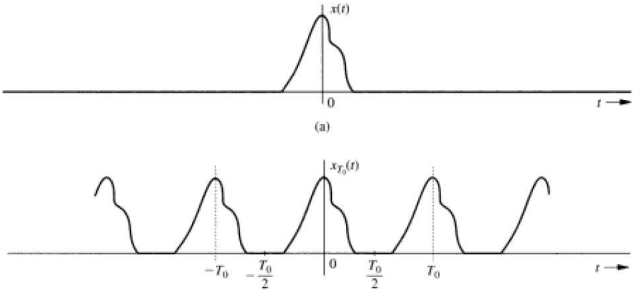
- O par de transformadas de Fourier pode ser denotado por

$$X(\omega) = \mathcal{F}[x(t)], \;\; x(t) = \mathcal{F}^{-1}[X(\omega)], \;\; x(t) \Longleftrightarrow X(\omega)$$

Definições

- A transformada de Fourier definida anteriormente pode ser obtida a partir da série de Fourier exponencial
- Para os sinais abaixo, tem-se que

$$\lim_{T_0 \longrightarrow \infty} x_{T_0}(t) \quad = \quad x(t)$$



Definições

- Mas $x_{T_0}(t)$ é um sinal periódico com período T_0 e assim pode ser representado por

$$x_{T_0}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t}, \quad D_n = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x_{T_0}(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

- Se $T_0 \longrightarrow \infty$, então

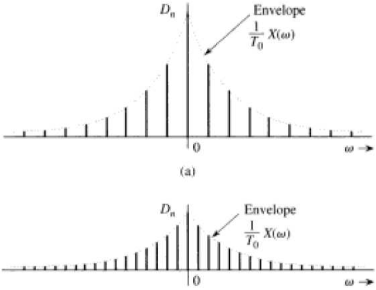
$$D_n = \frac{1}{T_0}\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

- Assim, se

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt, \quad \text{então } D_n = \frac{1}{T_0} X(n\omega_0)$$

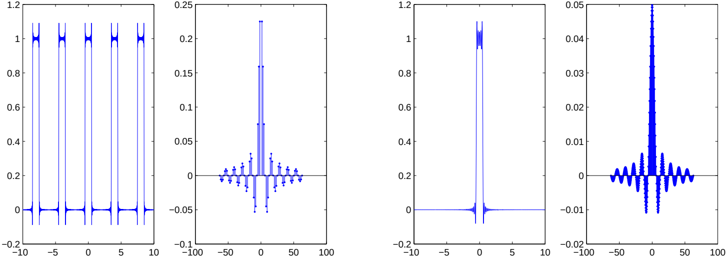
Definições

- A medida que T_0 cresce o espectro se torna mais denso (ω_0 diminui), mas a forma permanece a mesma (a do envelope $X(\omega)$)
- Quando $T_0 \longrightarrow \infty$, o espectro se torna contínuo



Definições

- Na figura abaixo, é mostrado o gráfico de D_n para dois valores de T_0



Definições

- Analogamente, a transformada de Fourier inversa pode ser obtida fazendo-se

$$x_{T_0}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{X(n\omega_0)}{T_0} e^{jn\omega_0 t}$$

- Se $T_0 \longrightarrow \infty$, então $\omega_0 \longrightarrow 0$, logo fazendo-se $\Delta\omega = 2\pi/T_0$, tem-se:

$$x_{T_0}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{X(n\omega_0)\Delta\omega}{2\pi} e^{jn\Delta\omega t}$$

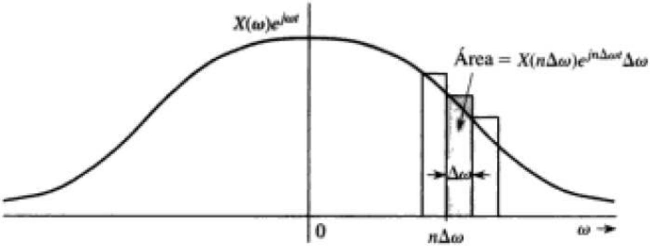
$$x(t) = \lim_{T_0 \longrightarrow \infty} x_{T_0}(t) = \lim_{T_0 \longrightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(n\omega_0) e^{jn\Delta\omega} \Delta\omega$$

Definições

- Assim,

$$x(t) \quad = \quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

- $x(t)$ pode ser interpretado como a soma dos elementos de área $X(n\Delta\omega)e^{jn\Delta\omega}\Delta\omega$



Espectro da Transformada de Fourier

- No caso geral, $X(\omega)$ é uma função complexa da variável ω, então

$$X(\omega) = |X(\omega)|e^{j\angle X(\omega)}$$

- O gráfico de $|X(\omega)| \times \omega$ é o espectro de amplitude
- O gráfico de $\angle X(\omega) \times \omega$ é o espectro de fase
- Tem-se que:

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt \Longrightarrow X(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{j\omega t}dt \\ &\Longrightarrow X^*(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)e^{-j\omega t}dt = \mathcal{F}[x^*(t)] \end{aligned}$$

Espectro da Transformada de Fourier

- Essa é a propriedade do conjugado da Transformada de Fourier, ou seja,

$$x^*(t) \quad \Longleftrightarrow \quad X^*(-\omega)$$

- Como caso particular, se $x(t)$ é um sinal real, então $x(t) = x^*(t)$, logo

$$\begin{aligned}
X^*(-\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt = X(\omega) \Longrightarrow X^*(\omega) = X(-\omega) \\
&\Longrightarrow \quad |X(\omega)|e^{-j\angle X(\omega)} = |X(-\omega)|e^{j\angle X(-\omega)} \\
&\Longrightarrow \quad |X(\omega)| = |X(-\omega)| \text{ e } \angle X(\omega) = -\angle X(-\omega)
\end{aligned}$$

Espectro da Transformada de Fourier

- Assim, quando $x(t)$ é um sinal real, o seu espectro de amplitude é uma função par e o seu espectro de fase é uma função ímpar
- Pode-se mostrar também que a transformada de Fourier é uma operação linear, ou seja:

$$\sum_k a_k x_k(t) \iff \sum_k a_k X_k(\omega)$$

Exemplo

Exemplo 7.1

Determinar a transformada de Fourier de $x(t) = e^{-at}u(t)$ e esboçar o seu espectro

Solução exemplo 7.1

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt \\ &= \int_{0}^{\infty} e^{-(a+j\omega)t}dt = \frac{1}{a+j\omega}, \text{ se } a > 0 \\ |X(\omega)| &= \frac{1}{\sqrt{a^2+\omega^2}}, \quad \angle X(\omega) = -\arctan\frac{\omega}{a} \end{aligned}$$

Exemplo

Exemplo 7.1

Determinar a transformada de Fourier de $x(t) = e^{-at}u(t)$ e esboçar o seu espectro

Solução exemplo 7.1

$$
\begin{aligned}
X(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt \\
&= \int_{0}^{\infty} e^{-(a+j\omega)t}dt = \frac{1}{a+j\omega}, \quad \text{se } a > 0 \\
|X(\omega)| &= \frac{1}{\sqrt{a^2+\omega^2}}, \quad \angle X(\omega) = -\arctan\frac{\omega}{a}
\end{aligned}
$$

Roteiro

1. Transformada de Fourier
   - Introdução
   - Transformadas Úteis
   - Propriedades
   - Sistemas Lineares
   - Filtros
   - Energia
   - Modulação em Amplitude

Principais Transformadas de Fourier

- Assim como foi feito com as transformadas de Laplace e Z, é útil obter as transformadas de Fourier para alguns modelos de sinais
- Antes de calcular as transformadas de Fourier, convém definir algumas funções bastante utilizadas na teoria de filtros: a função de porta unitária, a função triângulo unitário e a função de interpolação

Modelos de Sinais

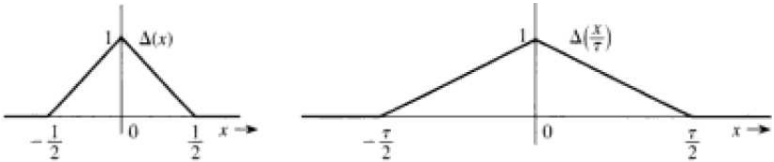
- A função de porta unitária é definida como:

$$ret\left(\frac{x}{\tau}\right) = \left\{\begin{array}{ll} 0, & |x| > \frac{\tau}{2} \\ \frac{1}{2}, & |x| = \frac{\tau}{2} \\ 1, & |x| < \frac{\tau}{2} \end{array}\right\}$$

Modelos de Sinais

- A função triângulo unitário é definida como:

$$\Delta\left(\frac{x}{\tau}\right) = \left\{ \begin{array}{cc} 0, & |x| \geq \frac{\tau}{2} \\ 1 - 2\frac{|x|}{\tau}, & |x| < \frac{\tau}{2} \end{array} \right\}$$



Modelos de Sinais

- A função de interpolação é definida como:

$$sinc(x) = \frac{\sin x}{x}$$

- Essa função possui as seguintes propriedades:
  1. $sinc(x)$ é uma função par
  2. $sinc(x) = 0 \Longrightarrow \sin x = 0,\ x \neq 0 \Longrightarrow x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}^*$
  3. $sinc(0) = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
  4. $sinc(x)$ é um seno amortecido
- A partir dessas propriedades, é possível esboçar o gráfico de $sinc(x)$

Principais Transformadas de Fourier

- Impulso unitário no tempo - $\delta(t)$

$$\delta(t) \quad \Longleftrightarrow \quad 1$$

- Impulso unitário no freqüência - $\delta(\omega)$

$$\frac{1}{2\pi} \quad \Longleftrightarrow \quad \delta(\omega) \Longrightarrow 1 \Longleftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$$

- Impulso na freqüência deslocado - $\delta(\omega \mp \omega_0)$

$$\frac{1}{2\pi} e^{\pm j\omega_0 t} \quad \Longleftrightarrow \quad \delta(\omega \mp \omega_0) \Longrightarrow e^{\pm j\omega_0 t} \Longleftrightarrow 2\pi\delta(\omega \mp \omega_0)$$

Principais Transformadas de Fourier

- Cosseno - $\cos \omega_0 t$

$$\cos \omega_0 t = \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2} \Longleftrightarrow \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$$

- Seno - $\sin \omega_0 t$

$$\sin \omega_0 t = \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j} \Longleftrightarrow j\pi[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$$

- Sinal periódico

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t} \Longleftrightarrow X(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n \delta(\omega - n\omega_0)$$

Principais Transformadas de Fourier

- Porta unitária

$$
\begin{aligned}
x(t) &= ret\left(\frac{x}{\tau}\right) \\
X(\omega) &= \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-j\omega t} dt = \frac{2}{\omega} \sin\frac{\omega\tau}{2} = \tau sinc\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)
\end{aligned}
$$

- Deve-se observar que:

$$
sinc\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) = 0 \Longrightarrow \frac{\omega\tau}{2} = k\pi \Longrightarrow \omega = \frac{2k\pi}{\tau}
$$

- Ou seja, a largura da porta é inversamente proporcional à largura do lóbulo principal da função sinc

Principais Transformadas de Fourier

- Triângulo unitário

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \Delta\left(\frac{x}{\tau}\right) \\
X(\omega) &= \int_{-\tau/2}^{\tau/2} (1 - \frac{2|t|}{\tau}) e^{-j\omega t} dt \\
&= \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-j\omega t} dt - \frac{2}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} |t| e^{-j\omega t} dt \\
&= \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-j\omega t} dt + \frac{2}{\tau} \int_{-\tau/2}^{0} t e^{-j\omega t} dt - \frac{2}{\tau} \int_{0}^{\tau/2} t e^{-j\omega t}
\end{aligned}
$$

Principais Transformadas de Fourier

- Triângulo unitário

$$\begin{aligned}
X(\omega) &= \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-j\omega t}dt + \frac{2}{\tau}\int_{-\tau/2}^{0} t\cos\omega t dt \\
&\quad - \frac{2j}{\tau}\int_{-\tau/2}^{0} t\sin\omega t dt - \frac{2}{\tau}\int_{0}^{\tau/2} t\cos\omega t dt \\
&+ \frac{2j}{\tau}\int_{0}^{\tau/2} t\sin\omega t dt \\
&= \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-j\omega t}dt + \frac{2}{\tau}[\int_{-\tau/2}^{0} t\cos\omega t dt - \int_{0}^{\tau/2} t\cos\omega t dt] \\
&\quad + \frac{2j}{\tau}[\int_{0}^{\tau/2} t\sin\omega t dt - \int_{-\tau/2}^{0} t\sin\omega t dt]
\end{aligned}$$

Principais Transformadas de Fourier

- Triângulo unitário

$$\begin{aligned}
X(\omega) &= \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-j\omega t} dt - \frac{4}{\tau}\int_{0}^{\tau/2} t\cos\omega t dt \\
&= \frac{2}{\omega}\sin\frac{\omega\tau}{2} - \frac{4}{\omega^2\tau}[\cos\omega t + \omega t\sin\omega t]\Big|_0^{\tau/2} \\
&= \frac{2}{\omega}\sin\frac{\omega\tau}{2} - \frac{4}{\omega^2\tau}[\cos\frac{\omega\tau}{2} + \frac{\omega\tau}{2}\sin\frac{\omega\tau}{2} - 1] \\
&= \frac{4}{\omega^2\tau}[1-\cos\frac{\omega\tau}{2}] = \frac{8}{\omega^2\tau}\sin^2\frac{\omega\tau}{4} = \frac{\tau}{2} sinc^2\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)
\end{aligned}$$

Conexão entre Laplace e Fourier

- A transformada de Laplace é dada por

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt$$

- Fazendo $s = j\omega$, tem-se que

$$X(s = j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$$

- Ou seja, se o eixo imaginário pertence à RDC de $X(s)$, então $X(j\omega) = X(\omega)$

Roteiro

1. Transformada de Fourier
   - Introdução
   - Transformadas Úteis
   - Propriedades
   - Sistemas Lineares
   - Filtros
   - Energia
   - Modulação em Amplitude

Propriedades da Transformada de Fourier

- Linearidade

$$\sum_k a_k x_k(t) \iff \sum_k a_k X_k(\omega)$$

- Conjugação e simetria do conjugado

$$\begin{aligned} \text{se } x(t) &\iff X(\omega) \\ \text{então } x^*(t) &\iff X^*(-\omega) \\ \text{se } x(t) \text{ for real, então} & \qquad X(-\omega) = X^*(\omega) \\ \text{ou} & \qquad X^*(-\omega) = X(\omega) \end{aligned}$$

Propriedades da Transformada de Fourier

- Dualidade

$$\begin{aligned} \text{se } x(t) &\Longleftrightarrow X(\omega) \\ \text{então } X(t) &\Longleftrightarrow 2\pi x(-\omega) \end{aligned}$$

- Prova:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega =^{(\omega=u)} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(u)e^{jut}du \\ 2\pi x(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} X(u)e^{jut}du \\ 2\pi x(-t) &= \int_{-\infty}^{\infty} X(u)e^{-jut}du, t=\omega \Longrightarrow \\ 2\pi x(-\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} X(u)e^{-ju\omega}du =^{(u=t)} \int_{-\infty}^{\infty} X(t)e^{-j\omega t}dt \end{aligned}$$

Exemplo

Exemplo

Usando a propriedade da dualidade, mostre que:

$$\frac{W}{\pi} sinc(Wt) \iff ret\left(\frac{\omega}{2W}\right)$$
$$\frac{W}{2\pi} sinc^2\left(\frac{Wt}{2}\right) \iff \Delta\left(\frac{\omega}{2W}\right)$$

Propriedades da Transformada de Fourier

- Escalamento

$$\begin{aligned} \text{se } x(t) &\iff X(\omega) \\ \text{então } x(at) &\iff \frac{1}{|a|}X\left(\frac{\omega}{a}\right) \end{aligned}$$

- Prova:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[x(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} x(at)e^{-j\omega t}dt = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} x(u)e^{-j\omega u/a}du \\ &= \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{a}X\left(\frac{\omega}{a}\right), & a > 0 \\ -\frac{1}{a}X\left(\frac{\omega}{a}\right), & a < 0 \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Exemplo

Exemplo

Usando a propriedade do escalamento, mostre que:

$$
\begin{aligned}
e^{at}u(-t) \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{1}{a - j\omega}, \quad (a > 0) \\
e^{-a|t|} \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{2a}{a^2 + \omega^2}, \quad (a > 0)
\end{aligned}
$$

Propriedades da Transformada de Fourier

- Deslocamento no tempo

$$\begin{aligned} \text{se } x(t) &\iff X(\omega) \\ \text{então } x(t-t_0) &\iff X(\omega)e^{-j\omega t_0} \end{aligned}$$

- Prova:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[x(t-t_0)] &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t-t_0)e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(u)e^{-j\omega(u+t_0)}du \\ &= e^{-j\omega t_0}\int_{-\infty}^{\infty} x(u)e^{-j\omega u}du = e^{-j\omega t_0}X(\omega) \end{aligned}$$

- O deslocamento no tempo não altera o espectro de amplitude, mas atrasa o espectro de fase

$$X(\omega)e^{-j\omega t_0} = |X(\omega)|e^{j(\angle X(\omega)-\omega t_0)}$$

Propriedades da Transformada de Fourier

- Deslocamento na frequência

$$\begin{aligned}
\text{se } x(t) &\iff X(\omega) \\
\text{então } x(t)e^{j\omega_0 t} &\iff X(\omega-\omega_0) \\
x(t)e^{-j\omega_0 t} &\iff X(\omega+\omega_0) \\
x(t)\cos\omega_0 t &\iff \frac{1}{2}[X(\omega-\omega_0)+X(\omega+\omega_0)]
\end{aligned}$$

- Prova:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[x(t)e^{j\omega_0 t}] &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{j\omega_0 t}e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j(\omega-\omega_0)t}dt \\
&= X(\omega-\omega_0)
\end{aligned}$$

Exemplo

Exemplo 7.15

Determine a transformada de Fourier de $x(t)\cos 10t$ e esboce o seu espectro para

$$x(t) = ret\left(\frac{t}{4}\right)$$

Solução exemplo 7.15

$$x(t)\cos 10t \iff 2\{sinc[2(\omega+10)] + sinc[2(\omega-10)]\}$$

Exemplo

Exemplo 7.15

Determine a transformada de Fourier de $x(t)\cos 10t$ e esboce o seu espectro para

$$x(t) = ret\left(\frac{t}{4}\right)$$

Solução exemplo 7.15

$$x(t)\cos 10t \iff 2\{sinc[2(\omega+10)] + sinc[2(\omega-10)]\}$$

Propriedades da Transformada de Fourier

- Convolução

$$\begin{aligned} \text{se } x_1(t) &\iff X_1(\omega) \text{ e } x_2(t) \iff X_2(\omega) \\ \text{então } x_1(t) * x_2(t) &\iff X_1(\omega)X_2(\omega) \\ x_1(t)x_2(t) &\iff \frac{1}{2\pi}X_1(\omega) * X_2(\omega) \end{aligned}$$

- Em sistemas LCIT

$$y(t) = x(t) * h(t) \Longrightarrow Y(\omega) = X(\omega)H(\omega)$$

Exemplo

Exemplo

Usando a propriedade da convolução, mostre que:

$$x(t)\cos\omega_0 t \iff \frac{1}{2}[X(\omega-\omega_0)+X(\omega+\omega_0)]$$

Propriedades da Transformada de Fourier

- Diferenciação e integração no tempo

$$
\begin{aligned}
\text{se } x(t) &\Longleftrightarrow X(\omega) \\
\text{então } \frac{dx(t)}{dt} &\Longleftrightarrow j\omega X(\omega) \\
\frac{d^n x(t)}{dt^n} &\Longleftrightarrow (j\omega)^n X(\omega) \\
\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau &\Longleftrightarrow \frac{X(\omega)}{j\omega} + \pi X(0)\delta(\omega)
\end{aligned}
$$

- Prova:

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega \Longrightarrow \\
\frac{dx(t)}{dt} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)j\omega e^{j\omega t}d\omega = \mathcal{F}^{-1}[j\omega X(\omega)]
\end{aligned}
$$

Exemplo

Exemplo

Usando a propriedade de diferenciação no tempo, mostre que:

$$\Delta\left(\frac{x}{\tau}\right) \iff \frac{\tau}{2} sinc^2\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)$$

Sugestão:

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

Exemplo

Exemplo

Usando a propriedade de integração no tempo, mostre que:

$$u(t) \iff \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

Roteiro

1. Transformada de Fourier
   - Introdução
   - Transformadas Úteis
   - Propriedades
   - Sistemas Lineares
   - Filtros
   - Energia
   - Modulação em Amplitude

Sistemas Lineares

- Para um sistema LIT, a relação entre a entrada e a saída é dada por

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

- No domínio da freqüência, tem-se

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= X(\omega)H(\omega) \\ &= |Y(\omega)|e^{j\angle Y(\omega)} = |X(\omega)||H(\omega)|e^{j[\angle X(\omega)+\angle H(\omega)]} \end{aligned}$$

- Portanto,

$$\begin{aligned} |Y(\omega)| &= |X(\omega)||H(\omega)| \\ \angle Y(\omega) &= \angle X(\omega) + \angle H(\omega) \end{aligned}$$

Transmissão sem Distorção

- Em uma transmissão sem distorção, a forma de onda de entrada deve ser preservada
  - Toleram-se atrasos e uma alteração uniforme na amplitude (multiplicação por um escalar)

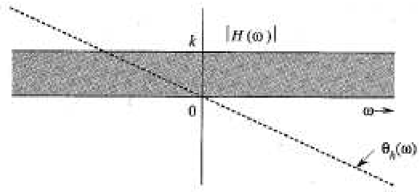
$$y(t) = G_0 x(t - t_d)$$

- No domínio da freqüência, tem-se

$$Y(\omega) = G_0 X(\omega) e^{-j\omega t_d} \rightarrow H(\omega) = G_0 e^{-j\omega t_d}$$

  - Resposta em amplitude constante - $|H(\omega)| = G_0$
  - Resposta em fase linear - $\angle H(\omega) = -\omega t_d$

Transmissão sem Distorção



- O atraso de grupo ou atraso de envelope é definido como

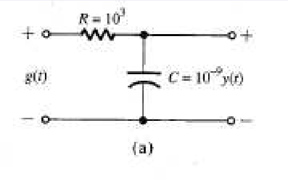
$$t_g(\omega) \quad = \quad -\frac{d\angle H(\omega)}{d\omega}$$

- $t_g(\omega)$ constante implica que todas as componentes do sinal são igualmente atrasadas por $t_g(\omega) = t_d$
- Para um sistema sem distorção, $t_g(\omega)$ deve ser pelo menos constante na banda de interesse

Exemplo

Exemplo

Para o circuito RC, determinar $H(\omega)$, esboçar $|H(\omega)|$, $\angle H(\omega)$ e $t_g(\omega)$. Para que a transmissão seja sem distorção, qual o requisito da largura de banda de $x(t)$ se a variação tolerada na resposta em amplitude é de 2% e de 5% no atraso? Qual é o atraso? Encontre $y(t)$.



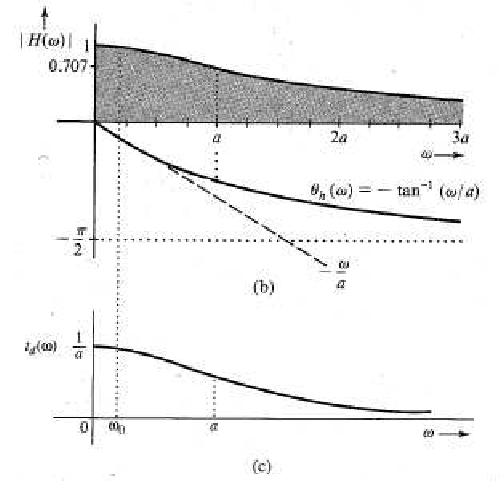
Exemplo

Solução exemplo

$$
\begin{aligned}
H(\omega) &= \frac{1}{1+j\omega RC} = \frac{a}{a+j\omega};\ a = \frac{1}{RC} = 10^6 \\
|H(\omega)| &= \frac{a}{\sqrt{a^2+\omega^2}} \simeq 1; \omega \ll a \\
\angle H(\omega) &= -\arctan\frac{\omega}{a} \simeq -\frac{\omega}{a}; \omega \ll a \\
t_g(\omega) &= -\frac{d\angle H(\omega)}{d\omega} = \frac{a}{\omega^2+a^2} \simeq \frac{1}{a} = 10^{-6}; \omega \ll a
\end{aligned}
$$

Exemplo

Solução exemplo



Exemplo

Solução exemplo

- Como $H(0) = 1$ e $t_g(0) = 1/a$, a região de transmissão sem distorção é calculada como

$$
\begin{aligned}
|H(\omega_0)| &= \frac{a}{\sqrt{a^2+\omega_0^2}} \geq 0,98 \rightarrow \omega_0 \leq 203.000 \\
t_g(\omega_0) &= \frac{a}{\omega_0^2+a^2} \geq \frac{0,95}{a} \rightarrow \omega_0 \leq 229.400
\end{aligned}
$$

- Assim, a banda de x(t) deve ser menor que 203.000 rad/s ou 32,31 kHz

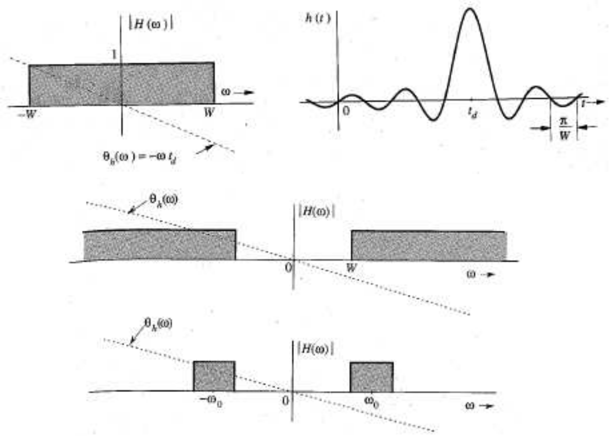
Roteiro

1. Transformada de Fourier
   - Introdução
   - Transformadas Úteis
   - Propriedades
   - Sistemas Lineares
   - Filtros
   - Energia
   - Modulação em Amplitude

Filtros Ideais

- Em muitas situações práticas é necessário limitar o espectro de freqüências de um sinal
  - Melhor aproveitamento do espectro
  - Componentes de alta freqüência de pouca relevância na aplicação considerada
- Os filtros ideais permitem que a transmissão ocorra sem distorção em uma determinada banda e suprimem as freqüências fora dessa banda
- Os principais tipos de filtros são:
  - Passa-baixas (*Low-pass*)
  - Passa-altas (*High-pass*)
  - Passa-faixas (*Band-pass*)
  - Rejeita-faixas

Filtros Ideais



Filtros Ideais

- Os filtros ideais não são fisicamente realizáveis

$$H(\omega) \quad = \quad rect\left(\frac{\omega}{2W}\right)e^{-j\omega t_d} \rightarrow h(t) = \frac{W}{\pi} sinc[W(t - t_d)]$$

- $h(t)$ é não causal e portanto não é fisicamente realizável
- Outra forma de verificar se um filtro é fisicamente realizável é verificar se ele atende o critério de Paley-Wiener

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\ln |H(\omega)||}{1+\omega^2} d\omega \quad < \quad \infty$$

Filtros Realizáveis

- Filtros fisicamente realizáveis podem ser obtidos truncando-se a parte negativa de $h(t)$, resultando em $\hat{h}(t) = h(t)u(t)$
- Se t_d é grande, $h(t)$ e $\hat{h}(t)$ são bastante próximos
  - $\hat{H}(\omega)$ é uma boa aproximação

Roteiro

1. Transformada de Fourier
   - Introdução
   - Transformadas Úteis
   - Propriedades
   - Sistemas Lineares
   - Filtros
   - Energia
   - Modulação em Amplitude

Energia de um Sinal

- A energia de um sinal $x(t)$ pode ser calculada no domínio do tempo a partir da seguinte expressão

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

- No domínio da freqüência, de acordo com o teorema de Parseval, a energia de $x(t)$ pode ser calculada como

$$E_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df$$

Densidade Espectral de Energia

- A partir da expressão de Parseval verifica-se que a energia pode ser obtida através da área do gráfico de $|X(\omega)|^2$
  - $|X(\omega)|^2$ é chamado de densidade espectral de energia (DEE - ESD em inglês)
- Para sinais reais, $|X(\omega)|^2$ é uma função par de ω e assim, a energia pode ser calculada como

$$E_x = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega$$

- A contribuição de energia do intervalo de frequências (ω_1, ω_2) é calculada como

$$\Delta E_x = \frac{1}{\pi}\int_{\omega_1}^{\omega_2} |X(\omega)|^2 d\omega$$

Largura de Banda Essencial

- O espectro da maioria dos sinais se estende até o infinito
- Entretanto, como a energia é em geral finita, o espectro de amplitude tende a zero quando $\omega \to \infty$
- Pode-se então suprimir as componentes acima de B Hz ($2\pi B$ rad/s) com pouco efeito no sinal original
- Segundo esse critério, a largura de banda B é chamada de largura de banda essencial
- O critério para estimar B depende da aplicação considerada
    - Faixa de freqüência que contém uma certa percentagem da energia (total) do sinal

Exemplo

Exemplo 7.20

Estime a largura de banda essencial W em rad/s do sinal $e^{-at}u(t)$, $a > 0$, sendo que essa banda deve conter 95% da energia do sinal.

Solução exemplo 7.20

$$
\begin{aligned}
x(t) &= e^{-at}u(t) \leftrightarrow X(\omega) = \frac{1}{j\omega + a} \\
E_x &= \int_0^{\infty} e^{-2at} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\omega^2 + a^2} d\omega = \frac{1}{2a} \\
0,95\frac{1}{2a} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-W}^{W} \frac{1}{\omega^2 + a^2} d\omega \rightarrow W = (12,706.a) rad/s
\end{aligned}
$$

Exemplo

Exemplo 7.20

Estime a largura de banda essencial W em rad/s do sinal $e^{-at}u(t),\ a > 0$, sendo que essa banda deve conter 95% da energia do sinal.

Solução exemplo 7.20

$$
\begin{aligned}
x(t) &= e^{-at}u(t) \leftrightarrow X(\omega) = \frac{1}{j\omega + a} \\
E_x &= \int_0^{\infty} e^{-2at} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\omega^2 + a^2} d\omega = \frac{1}{2a} \\
0,95\frac{1}{2a} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-W}^{W} \frac{1}{\omega^2 + a^2} d\omega \rightarrow W = (12,706.a) rad/s
\end{aligned}
$$

Roteiro

1. Transformada de Fourier
   - Introdução
   - Transformadas Úteis
   - Propriedades
   - Sistemas Lineares
   - Filtros
   - Energia
   - Modulação em Amplitude

Modulação

- Um sinal proveniente de uma fonte de informação ou de um transdutor é chamado de sinal em banda básica
- Os sinais em banda básica podem ser transmitidos através de cabos ou fibras ópticas
- Por outro lado, esse tipo de sinal não é adequado para transmissão através de um enlace de rádio
  - Freqüências mais altas são necessárias para garantir maior eficiência na propagação
  - Antenas menores podem ser utilizadas aumentando-se a freqüência
- A comunicação em que o espectro em banda básica é deslocado para freqüências maiores é conhecida como comunicação com portadora

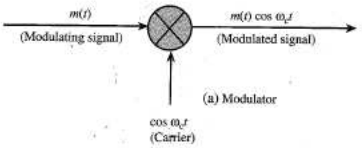
Modulação

- Na comunicação com portadora, um sinal senoidal tem a sua amplitude, fase ou freqüência modificada pelo sinal em banda básica $m(t)$
- Para os sinais em banda básica analógicos, as modulações principais são:
  - Modulação em Amplitude (AM, AM-DSB-SC, AM-SSB-SC, QAM e AM-VSB)
  - Modulação em Ângulo (FM e PM)
- Para os sinais digitais, há uma infinidade de tipos de modulação
  - ASK, FSK, PSK, DPSK, GMSK, OOSK, etc.

Modulação AM-DSB-SC

- Seja $m(t)$ um sinal em banda básica com largura de banda igual a B Hz e $c(t) = \cos\omega_c t$ uma portadora senoidal
- Na modulação em amplitude com banda lateral dupla e portadora suprimida (AM-DSB-SC), o sinal modulado é dado por

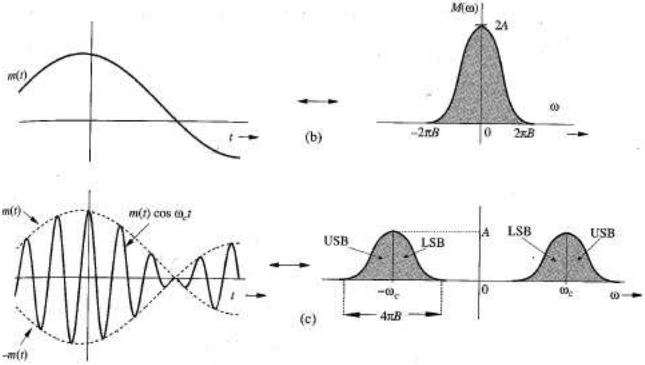
$$s(t) = m(t)c(t) = m(t)\cos\omega_c t$$



Modulação AM-DSB-SC

- Se $m(t) \Longleftrightarrow M(\omega)$, então

$$m(t)\cos\omega_c t \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{2}[M(\omega+\omega_c)+M(\omega-\omega_c)]$$



Espectro da Modulação AM-DSB-SC

- Sendo $m(t)$ um sinal real, o espectro de amplitude $|M(\omega)|$ é uma função par
- Quando o sinal é modulado, a sua largura de banda passa a ser de $2B$ Hz
- A parte superior do espectro (freqüências acima de ω_c) possui a mesma informação que a parte inferior do espectro (freqüências abaixo de ω_c)
  - Banda lateral superior (Upper SideBand - USB) - $\omega_c < |\omega| < (\omega_c + 2\pi B)$
  - Banda lateral inferior (Lower SideBand - LSB) - $(\omega_c - 2\pi B) < |\omega| < \omega_c$
- Observa-se que o sinal da portadora não aparece no espectro do sinal modulado (impulso em $\pm\omega_c$)

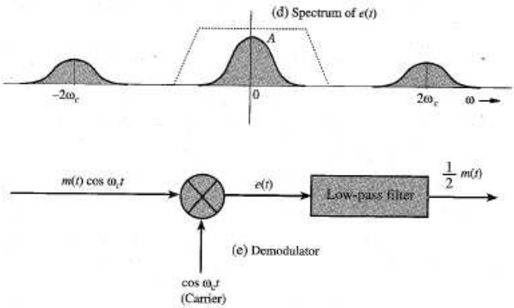
Demodulação de um sinal AM-DSB-SC

- O processo de recuperação do sinal em banda básica é chamado de demodulação
- Na demodulação, o espectro é transladado de volta para a origem e as componentes indesejadas são eliminadas por filtragem
- Seja $s(t)$ o sinal modulado, então:

$$\begin{aligned} e(t) &= s(t)\cos\omega_c t = m(t)\cos^2\omega_c t \\ &= \frac{1}{2}[m(t) + m(t)\cos 2\omega_c t] \\ E(\omega) &\Longleftrightarrow \frac{1}{2}M(\omega) + \frac{1}{4}[M(\omega + 2\omega_c) + M(\omega - 2\omega_c)] \end{aligned}$$

Demodulação de um sinal AM-DSB-SC

- Passando o sinal $e(t)$ através de um filtro passa-baixas, o sinal $1/2m(t)$ é recuperado
- Este processo é conhecido como demodulação síncrona ou coerente
  - É necessário na demodulação uma senóide com a mesma fase e freqüência usada na modulação



Modulação em Amplitude (AM)

- Na demodulação de um sinal AM-DSB-SC, é necessário gerar uma portadora na recepção com a mesma freqüência e fase usadas na modulação
  - Demodulação síncrona
- Na prática, isso exige que o transmissor possua circuitos de recuperação da portadora (PLL), tornando a sua construção mais complexa
- Em algumas situações, é de interesse que os receptores sejam mais simples e conseqüentemente mais baratos
  - Comunicação por difusão (*broadcast*)

Modulação em Amplitude (AM)

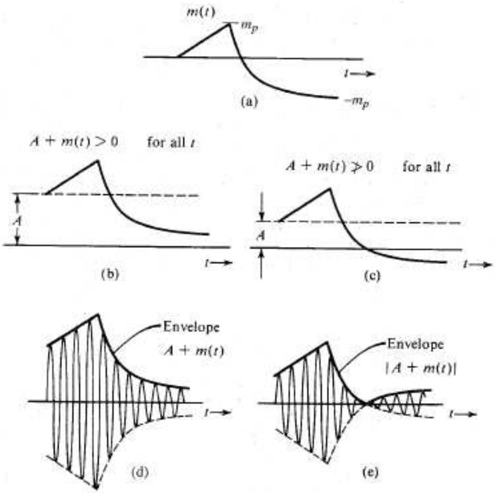
- Uma alternativa é enviar o sinal da portadora junto com o sinal modulado
    - Receptor mais simples
    - O transmissor precisa gastar mais potência na transmissão
- Na modulação em Amplitude tradicional, o sinal modulado é dado por:

$$\varphi_{AM}(t) = A\cos\omega_c t + m(t)\cos\omega_c t = (A + m(t))\cos\omega_c t$$

- O espectro do sinal modulado é dado por:

$$\varphi_{AM}(t) \iff \frac{1}{2}[M(\omega+\omega_c) + M(\omega-\omega_c)] + \pi A[\delta(\omega+\omega_c) + \delta(\omega-\omega_c)]$$

Modulação em Amplitude (AM)



Modulação em Amplitude (AM)

- Desde que $A + m(t) \geq 0$ para todo t, é possível demodular $\varphi_{AM}(t)$ através da detecção de envelope
- Admitindo-se que o sinal $m(t)$ assume valores negativos para determinados valores de t e sendo m_{p-} o módulo do valor de pico negativo, então

$$A \geq m_{p-}$$

- Definindo-se o índice de modulação AM μ como

$$\mu = \frac{m_{p-}}{A}$$

- Então a condição seguinte assegura que o sinal possa ser demodulado por detecção de envelope

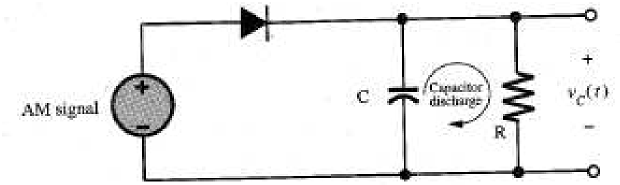
$$0 \leq \mu \leq 1$$

Modulação em Amplitude (AM)

- Quando $\mu > 1 \rightarrow A < m_{p-}$, então o sinal AM não pode ser demodulado por detecção de envelope
  - Essa condição é chamada de sobremodulação
  - Nesse caso, só é possível realizar a demodulação síncrona
- Para todos os casos é possível realizar a demodulação síncrona

Detector de Envelope

- No detector de envelope, o capacitor é carregado durante o ciclo positivo e descarrega quando o diodo é cortado



- Para reduzir as ondulações, é necessário que $RC \gg 1/\omega_c$
- Entretanto, se RC for muito grande, a tensão no capacitor pode não seguir o envelope

Detector de Envelope