

Edmar José do Nascimento
(Análise de Sinais e Sistemas)
<http://www.univasf.edu.br/~edmar.nascimento>

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ▶ ↺ 🔍 ↻

Roteiro

1

Séries de Fourier

- Série Trigonométrica
- Série Trigonométrica Compacta
- Série Exponencial de Fourier
- Exemplos
- Miscelânea
- Série de Fourier Generalizada

Introdução

- A análise de Fourier (séries e transformadas) é utilizada na análise de sinais
- As séries de Fourier são usadas para analisar sinais periódicos
- A transformada de Fourier pode ser utilizada tanto na análise de sinais aperiódicos quanto periódicos
- A representação de um sinal em séries de Fourier pode ser comparada com a representação de um vetor em componentes de uma base de um espaço vetorial
 - Nas séries de Fourier, um sinal é representado como a soma de componentes em uma base de funções ortogonais (senos, cossenos ou exponenciais)

Introdução

- Seja $x(t)$ um sinal periódico com período T_0 , ou seja, $x(t) = x(t + T_0)$, $\forall t$
- O menor valor de T_0 é chamado de período fundamental de $x(t)$
- Verifica-se para um determinado período fundamental T_0 que:

$$\int_a^{a+T_0} x(t)dt = \int_b^{b+T_0} x(t)dt = \int_{T_0} x(t)dt$$

- Define-se ainda:
 - $f_0 = 1/T_0$ - frequência fundamental em Hertz
 - $\omega_0 = 2\pi/T_0 = 2\pi f_0$ - frequência fundamental em radianos por segundo

Introdução

- Senóides com frequências múltiplas da frequência fundamental são chamadas de harmônicas
 - $\cos(\omega_0 t) = \cos(2\pi f_0 t)$ - primeira harmônica
 - $\cos(2\omega_0 t) = \cos(4\pi f_0 t)$ - segunda harmônica
 - $\cos(n\omega_0 t) = \cos(2\pi n f_0 t)$ - n-ésima harmônica
- As séries de Fourier possuem três representações equivalentes:
 - Série trigonométrica em $\sin(n\omega_0 t)$ e $\cos(n\omega_0 t)$
 - Série trigonométrica compacta em $\cos(n\omega_0 t + \theta_n)$
 - Série exponencial em $e^{jn\omega_0 t}$
- Para as duas últimas representações pode-se definir o espectro de um sinal periódico

1 Séries de Fourier

- **Série Trigonométrica**
- Série Trigonométrica Compacta
- Série Exponencial de Fourier
- Exemplos
- Miscelânea
- Série de Fourier Generalizada

- Para determinar os coeficientes a_0 , a_n e b_n , verifica-se que:

$$\begin{aligned} \int_{T_0} \cos n\omega_0 t \cos m\omega_0 t dt &= \frac{1}{2} \left[\int_{T_0} \cos (n+m)\omega_0 t dt \right. \\ &\quad \left. + \int_{T_0} \cos (n-m)\omega_0 t dt \right] \\ &= \begin{cases} 0, & n \neq m \\ T_0/2, & n = m \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} \int_{T_0} \sin n\omega_0 t \sin m\omega_0 t dt &= \frac{1}{2} \left[\int_{T_0} \cos (n-m)\omega_0 t dt \right. \\ &\quad \left. - \int_{T_0} \cos (n+m)\omega_0 t dt \right] \\ &= \begin{cases} 0, & n \neq m \\ T_0/2, & n = m \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} \int_{T_0} \sin n\omega_0 t \cos m\omega_0 t dt &= \frac{1}{2} \left[\int_{T_0} \sin(n-m)\omega_0 t dt \right. \\ &\quad \left. + \int_{T_0} \sin(n+m)\omega_0 t dt \right] \\ &= 0, \quad \forall m, n \end{aligned}$$

- A partir dessas três expressões, verifica-se que os termos $\cos(n\omega_0 t)$ e $\sin(n\omega_0 t)$ são ortogonais para diferentes valores de $n \neq 0$

- $$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)$$

- Logo,

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) dt$$

Série Trigonométrica

- Para se obter a_n (a componente de $\cos(n\omega_0 t)$), faz-se o seguinte:

$$\begin{aligned} \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \cos n\omega_0 t dt &= \frac{2}{T_0} \int_{T_0} a_0 \cos n\omega_0 t dt + \\ &\frac{2}{T_0} \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \int_{T_0} \cos(k\omega_0 t) \cos(n\omega_0 t) dt \right. \\ &\left. + b_k \int_{T_0} \sin(k\omega_0 t) \cos(n\omega_0 t) dt \right] = a_n \end{aligned}$$

- Logo,

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \cos n\omega_0 t dt$$

Série Trigonométrica

- Para se obter b_n (a componente de $\sin(n\omega_0 t)$), faz-se o seguinte:

$$\begin{aligned} \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \sin n\omega_0 t dt &= \frac{2}{T_0} \int_{T_0} a_0 \sin n\omega_0 t dt + \\ &\frac{2}{T_0} \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \int_{T_0} \cos(k\omega_0 t) \sin(n\omega_0 t) dt \right. \\ &\left. + b_k \int_{T_0} \sin(k\omega_0 t) \sin(n\omega_0 t) dt \right] = b_n \end{aligned}$$

- Logo,

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \sin n\omega_0 t dt$$

Série Trigonométrica

- Assim, a série trigonométrica de Fourier é dada por:

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)$$

- Sendo,

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \cos n\omega_0 t dt$$

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \sin n\omega_0 t dt$$

Simetrias

- Se $x(t)$ é um sinal par, então:

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) dt = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) dt = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0/2} x(t) dt$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \cos n\omega_0 t dt = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \cos n\omega_0 t dt \\ &= \frac{4}{T_0} \int_0^{T_0/2} x(t) \cos n\omega_0 t dt \end{aligned}$$

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \sin n\omega_0 t dt = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \sin n\omega_0 t dt = 0$$

Simetrias

- Se $x(t)$ é um sinal ímpar, então:

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) dt = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) dt = 0$$

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \cos n\omega_0 t dt = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \cos n\omega_0 t dt = 0$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \sin n\omega_0 t dt = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \sin n\omega_0 t dt \\ &= \frac{4}{T_0} \int_0^{T_0/2} x(t) \sin n\omega_0 t dt \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} C_0 &= a_0 \\ C_n &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \\ \theta_n &= \arctan\left(\frac{-b_n}{a_n}\right) \end{aligned}$$

Série Trigonométrica Compacta

- Alguns casos especiais podem ser enfatizados:
- $b_n = 0$
 - Neste caso, tem-se que:

$$\begin{aligned}
 x(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) \\
 &= C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n)
 \end{aligned}$$

- Em que

$$C_0 = a_0, \quad C_n = |a_n| \quad \text{e} \quad \theta_n = \begin{cases} 0, & a_n > 0 \\ -\pi, & a_n < 0 \end{cases}$$

Série Trigonométrica Compacta

- $a_n = 0$
 - Neste caso, tem-se que:

$$\begin{aligned}
 x(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega_0 t) \\
 &= C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n)
 \end{aligned}$$

- Em que

$$C_0 = a_0, \quad C_n = |b_n| \quad \text{e} \quad \theta_n = \begin{cases} -\pi/2, & b_n > 0 \\ \pi/2, & b_n < 0 \end{cases}$$

Espectro da Série Compacta

- A partir da série compacta é possível obter o espectro da expansão em séries de Fourier
- O espectro consiste nos gráficos discretos de:
 - C_n versus $\omega = n\omega_0$ - espectro de amplitude
 - θ_n versus $\omega = n\omega_0$ - espectro de fase
- O espectro permite verificar a contribuição de cada harmônica para o sinal periódico $x(t)$
- Enquanto $x(t)$ é uma representação no domínio do tempo, o espectro é o seu equivalente no domínio da frequência

1 Séries de Fourier

- Série Trigonométrica
- Série Trigonométrica Compacta
- **Série Exponencial de Fourier**
- Exemplos
- Miscelânea
- Série de Fourier Generalizada

Série Exponencial de Fourier

- A partir da fórmula de Euler, sabe-se que:

$$\cos n\omega_0 t = \frac{e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}}{2}, \quad \sin n\omega_0 t = \frac{e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t}}{2j}$$

- Assim, $x(t)$ pode ser representado como:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t}$$

- Essa expressão é a série exponencial de Fourier

- $$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t} \longrightarrow x(t) e^{-jm\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{j(n-m)\omega_0 t}$$
- $$\int_{T_0} x(t) e^{-jm\omega_0 t} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n \int_{T_0} e^{j(n-m)\omega_0 t} dt$$

- $$\int_{T_0} e^{j(n-m)\omega_0 t} dt = \begin{cases} T_0, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases}$$

Série Exponencial de Fourier

- Assim, a série exponencial é dada por:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t}$$

$$D_n = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

- A relação entre a série exponencial é obtida expandindo-se $x(t)$

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{n=-\infty}^{-1} D_n e^{jn\omega_0 t} + D_0 + \sum_{n=1}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t} \\ &= D_0 + \sum_{n=1}^{\infty} D_{-n} e^{-jn\omega_0 t} + \sum_{n=1}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t} \end{aligned}$$

Série Exponencial de Fourier

- Logo,

$$x(t) = D_0 + \sum_{n=1}^{\infty} D_{-n} e^{-jn\omega_0 t} + D_n e^{jn\omega_0 t}$$

- Mas,

$$\begin{aligned} D_n &= \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \\ &= \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) \cos n\omega_0 t dt - \frac{j}{T_0} \int_{T_0} x(t) \sin n\omega_0 t dt \\ &= \frac{a_n - jb_n}{2} \end{aligned}$$

Série Exponencial de Fourier

- De modo análogo,

$$\begin{aligned}
 D_{-n} &= \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{jn\omega_0 t} dt \\
 &= \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) \cos n\omega_0 t dt + \frac{j}{T_0} \int_{T_0} x(t) \sin n\omega_0 t dt \\
 &= \frac{a_n + jb_n}{2}
 \end{aligned}$$

- Assim, tem-se que:

$$\begin{aligned}
 D_n &= \frac{a_n - jb_n}{2} = \frac{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{2} e^{j \arctan(-b_n/a_n)} = \frac{C_n}{2} e^{j\theta_n} \\
 D_{-n} &= \frac{a_n + jb_n}{2} = \frac{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{2} e^{j \arctan(b_n/a_n)} = \frac{C_n}{2} e^{-j\theta_n}
 \end{aligned}$$

Série Exponencial de Fourier

- Além disso,

$$D_0 = a_0 = C_0$$

$$|D_n| = |D_{-n}| = \frac{C_n}{2}, \quad n \neq 0$$

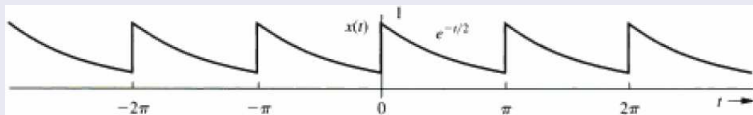
$$\angle D_n = \theta_n, \quad \angle D_{-n} = -\theta_n, \quad n \neq 0$$

- O espectro da série exponencial consiste nos gráficos discretos de:
 - $|D_n|$ versus $\omega = n\omega_0$ - espectro de amplitude (função par)
 - $\angle D_n$ versus $\omega = n\omega_0$ - espectro de fase (função ímpar)
- Deve-se observar que o espectro da série exponencial possui tanto frequências negativas quanto positivas

1 Séries de Fourier

- Série Trigonométrica
- Série Trigonométrica Compacta
- Série Exponencial de Fourier
- **Exemplos**
- Miscelânea
- Série de Fourier Generalizada

Determinar as três séries de Fourier para o sinal $x(t)$ abaixo e esboçar os espectros de amplitude e fase das séries compacta e exponencial



Sugestão:

$$\int e^{ax} \cos bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cos bx + b \sin bx)$$

$$\int e^{ax} \sin bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin bx - b \cos bx)$$

Exemplo

Solução exemplos 6.1 e 6.5

$$T_0 = \pi \longrightarrow \omega_0 = 2$$

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{-t/2} dt = \frac{2(1 - e^{-\pi/2})}{\pi} = 0,504$$

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \cos n\omega_0 t dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} e^{-t/2} \cos 2nt dt$$

$$= \frac{4(1 - e^{-\pi/2})}{\pi(1 + 16n^2)} = 0,504 \frac{2}{1 + 16n^2}$$

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \sin n\omega_0 t dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} e^{-t/2} \sin 2nt dt$$

$$= \frac{16n(1 - e^{-\pi/2})}{\pi(1 + 16n^2)} = 0,504 \frac{8n}{1 + 16n^2}$$

Exemplo

Solução exemplos 6.1 e 6.5

$$x(t) = 0,504 + 0,504 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{1+16n^2} (\cos(2nt) + 4n \sin(2nt))$$

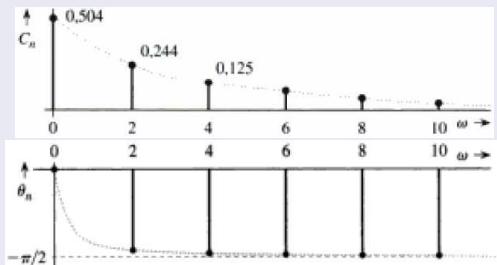
$$C_0 = a_0 = 0,504$$

$$C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = 0,504 \frac{2}{\sqrt{1+16n^2}}$$

$$\theta_n = \arctan\left(\frac{-b_n}{a_n}\right) = -\arctan(4n)$$

$$x(t) = 0,504 + 0,504 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{1+16n^2}} \cos(2nt - \arctan(4n))$$

O espectro da série compacta é representado nos dois gráficos abaixo:



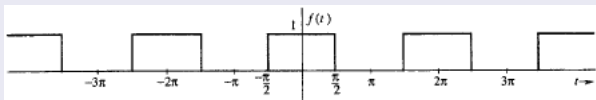
Exemplo

Solução exemplos 6.1 e 6.5

$$\begin{aligned}
 D_n &= \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{-t/2} e^{-j2nt} dt \\
 &= \frac{2(1 - e^{-\pi/2})}{\pi(1 + j4n)} = \frac{0,504}{1 + j4n} = 0,504 \frac{1 - j4n}{1 + 16n^2} \\
 &= \frac{1}{2} \underbrace{\frac{0,504 \cdot 2}{1 + 16n^2}}_{a_n} - j \frac{1}{2} \underbrace{\frac{8n}{1 + 16n^2}}_{b_n}
 \end{aligned}$$

$$x(t) = 0,504 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1 - j4n}{1 + 16n^2} e^{j2nt}$$

Determinar as três séries de Fourier para o sinal $x(t)$ abaixo e esboçar os espectros de amplitude e fase das séries compacta e exponencial



Exemplo

Solução exemplo 6.4

Observa-se que $x(t)$ é par

$$T_0 = 2\pi \longrightarrow \omega_0 = 1$$

$$a_0 = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0/2} x(t) dt = \frac{2}{2\pi} \int_0^{\pi/2} dt = \frac{1}{2}$$

$$a_n = \frac{4}{T_0} \int_0^{T_0/2} x(t) \cos n\omega_0 t dt = \frac{4}{2\pi} \int_0^{\pi/2} \cos nt dt$$

$$= \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} = \left\{ \begin{array}{ll} 0, & n \text{ par} \\ 2/(n\pi), & n = 1, 5, 9, \dots \\ -2/(n\pi), & n = 3, 7, 11, \dots \end{array} \right\}$$

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \sin n\omega_0 t dt = 0$$

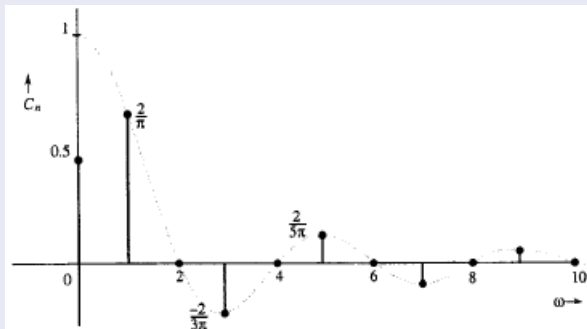
Exemplo

Solução exemplo 6.4

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} \cos nt \\
 &= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left(\cos t - \frac{1}{3} \cos 3t + \frac{1}{5} \cos 5t - \frac{1}{7} \cos 7t + \dots \right) \\
 x(t) &= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left[\cos t + \frac{1}{3} \cos (3t - \pi) + \frac{1}{5} \cos 5t + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{7} \cos (7t - \pi) + \dots \right]
 \end{aligned}$$

Exemplo

Solução exemplo 6.4



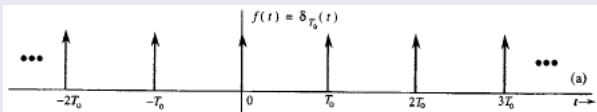
Exemplo

Solução exemplo 6.4

$$\begin{aligned}
 D_n &= \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-jnt} dt \\
 &= -\frac{1}{2jn\pi} (e^{-jn\pi/2} - e^{jn\pi/2}) = \frac{1}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2}
 \end{aligned}$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} e^{jnt}$$

Determinar as três séries de Fourier para o sinal $x(t)$ abaixo e esboçar os espectros de amplitude e fase das séries compacta e exponencial



Exemplo

Solução exemplo 6.7

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) dt = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \delta(t) dt = \frac{1}{T_0}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \cos n\omega_0 t dt = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \delta(t) \cos n\omega_0 t dt \\ &= \frac{2}{T_0} \end{aligned}$$

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \sin n\omega_0 t dt = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \delta(t) \sin n\omega_0 t dt = 0$$

Exemplo

Solução exemplo 6.7

$$x(t) = \frac{1}{T_0} + \frac{2}{T_0} \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{2\pi n t}{T_0}$$

$$D_n = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \delta(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0}$$

$$x(t) = \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi n t / T_0}$$

Roteiro

- 1 Séries de Fourier
 - Série Trigonométrica
 - Série Trigonométrica Compacta
 - Série Exponencial de Fourier
 - Exemplos
 - **Miscelânea**
 - Série de Fourier Generalizada

- $$\int_{T_0}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$$

Convergência

- O critério de convergência usado nas séries de Fourier é a "convergência na média"
- Considere uma série infinita para um sinal periódico $x(t)$ e sua versão truncada (aproximada) $x_N(t)$ dadas por

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} z_n(t)$$

$$x_N(t) = \sum_{n=1}^N z_n(t)$$

- O erro de aproximação devido ao truncamento é dado por

$$e(t) = x(t) - x_N(t)$$

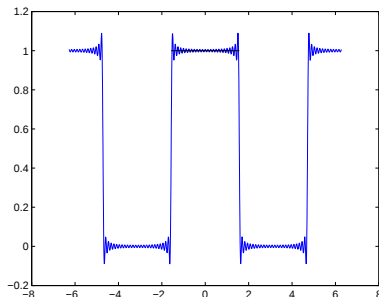
- $$\int_0^{T_0} |e(t)|^2 dt = \int_0^{T_0} |x(t) - x_N(t)|^2 dt \longrightarrow 0 \text{ se } N \longrightarrow \infty$$

- Ou seja, a energia do erro em um período tende a zero quando N tende a infinito
- Um outro critério mais simples para a convergência na média é verificar se o sinal tem energia finita em um período
- Um sinal periódico $x(t)$ possui uma série de Fourier que converge na média se

$$\int_{T_0} |x(t)|^2 dt < \infty$$

- ◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ 🔍 ↺

- O fenômeno de Gibbs ocorre quando o sinal periódico $x(t)$ apresenta descontinuidades
- Ao se considerar uma série de Fourier truncada, há a presença de um sobre-sinal de amplitude aproximadamente igual a 9% do valor da descontinuidade nas vizinhanças dos pontos de descontinuidade



Teorema de Parseval

- O teorema de Parseval permite calcular a potência de um sinal a partir do espectro de amplitude do sinal
- Segundo o teorema de Parseval, a potência de um sinal periódico é igual a soma das potências das componentes da série, ou seja:

$$P_x = C_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} C_n^2$$

$$P_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |D_n|^2 = D_0^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} |D_n|^2$$

- Fazer o problema 6.3-10

Resposta de um Sistema LCIT a Entradas Periódicas

- Vimos que um sinal periódico $x(t)$ pode ser representado como

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t}$$

- Se um sistema LCIT com função de transferência é estável, então

$$e^{j\omega t} \longrightarrow H(j\omega) e^{j\omega t}$$

- Aplicando a propriedade da linearidade, tem-se que:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t} \longrightarrow y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n H(jn\omega_0) e^{jn\omega_0 t}$$

Resposta de um Sistema LCIT a Entradas Periódicas

- Ou seja, uma entrada periódica resulta em uma saída periódica com o mesmo período da entrada
- As componentes do espectro do sinal periódico são afetadas diferentemente pela função de transferência do sistema

Roteiro

1

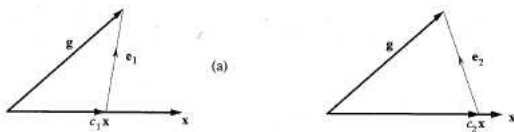
Séries de Fourier

- Série Trigonométrica
- Série Trigonométrica Compacta
- Série Exponencial de Fourier
- Exemplos
- Miscelânea
- Série de Fourier Generalizada

-

- $$\begin{aligned}\vec{g} \cdot \vec{x} &= |\vec{g}| |\vec{x}| \cos \theta \\ |\vec{g}|^2 &= \vec{g} \cdot \vec{g} \\ \vec{g} &= c \vec{x} + \vec{e}\end{aligned}$$

- $$c = \frac{|\vec{g}| \cos \theta}{|\vec{x}|} = \frac{\vec{g} \cdot \vec{x}}{|\vec{x}|^2}$$



- Além disso, se $\vec{q} \cdot \vec{x} = 0$, então $\vec{q}$ e $\vec{x}$ são ortogonais

- $$e(t) = \begin{cases} g(t) - cx(t), & t_1 < t < t_2 \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

- $$E_e = \int_{t_1}^{t_2} e^2(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} [g(t) - cx(t)]^2 dt$$

- $$c = \frac{1}{E_x} \int_{t_1}^{t_2} g(t)x(t)dt$$

- $$\vec{g} \cdot \vec{x} \iff \int_{t_1}^{t_2} g(t)x(t)dt$$

$$|\vec{x}|^2 \longleftrightarrow E_x$$

- $$\int_{t_1}^{t_2} g(t)x(t)dt = 0$$

- $$c = \frac{1}{E_x} \int_{t_1}^{t_2} g(t)x^*(t)dt$$

- Além disso, para dois vetores ortogonais $\vec{x}$ e $\vec{y}$, tem-se que $\vec{z} = \vec{x} + \vec{y}$ resulta em $|\vec{z}|^2 = |\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2$
- Pode-se mostrar que para dois sinais $x(t)$ e $y(t)$ ortogonais, tem-se que $z(t) = x(t) + y(t)$ possui energia $E_z = E_x + E_y$

- $$\begin{aligned}\vec{x} &\simeq c_1\vec{x}_1 + c_2\vec{x}_2 \\ \vec{x} &= \vec{x} - (c_1\vec{x}_1 + c_2\vec{x}_2)\end{aligned}$$

- ◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ◻ ↺ 🔍 ↻

Série de Fourier Generalizada

- O erro é minimizado se

$$c_i = \frac{1}{E_{x_i}} \int_{t_1}^{t_2} x(t) x_i^*(t) dt, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

- Quando $N \rightarrow \infty$, então $E_e \rightarrow 0$ e

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n(t), \quad t_1 < t < t_2$$

é a série de Fourier generalizada