

Análise de Sistemas em Tempo Discreto usando a Transformada Z

<http://www.univasf.edu.br/~edmar.nascimento>

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Elétrica

Roteiro

1 Transformada Z

- Introdução
- Propriedades
- Equações de Diferenças
- Estabilidade de Sistemas
- Resposta em Frequência
- Conexão entre as Transformadas de Laplace e Z

Transformada Z

- **Introdução**
- Propriedades
- Equações de Diferenças
- Estabilidade de Sistemas
- Resposta em Frequência
- Conexão entre as Transformadas de Laplace e Z

- $$X[z] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

- $$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint X[z] z^{n-1} dz$$

- Essa integral é uma integral de contorno na direção anti-horária em um caminho fechado no plano complexo

- $$x_1[n] \iff X_1[z], \quad x_2[n] \iff X_2[z]$$

- $$a_1x_1[n] + a_2x_2[n] \iff a_1X_1[z] + a_2X_2[z]$$

- z é uma variável complexa e a transformada pode não existir para todos os valores de z
 - Região de Convergência (RDC) é o nome da região do plano complexo para a qual a transformada Z existe

- A região de convergência é importante para a determinação da transformada Z inversa
- Dois sinais diferentes podem ter a mesma transformada, mas com RDCs diferentes
- Assim como foi feito para a transformada de Laplace inversa, o procedimento usual para se determinar a transformada Z inversa é utilizar uma tabela com os pares de transformadas mais comuns

- $$X[z] = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

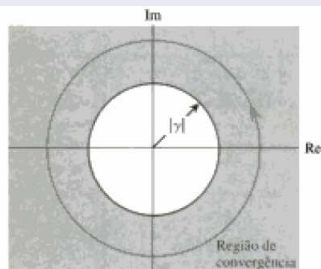
- ◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ≡ ≡ ≡ ↺ 🔍 ↻

Calcular a transformada Z e a RDC para um sinal $x[n] = \gamma^n u[n]$

Calcular a transformada Z e a RDC para um sinal $x[n] = \gamma^n u[n]$

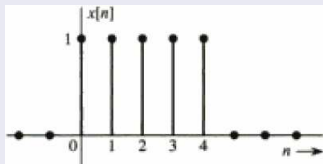
Solução exemplo 5.1

$$\begin{aligned} X[z] &= \sum_{n=0}^{\infty} \gamma^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\gamma}{z}\right)^n \\ &= \frac{1}{1 - \frac{\gamma}{z}} = \frac{z}{z - \gamma}, \text{ se } \left|\frac{\gamma}{z}\right| < 1 \\ x[n] = \gamma^n u[n] &\iff X[z] = \frac{z}{z - \gamma}, \quad |z| > |\gamma| \end{aligned}$$



Calcular a transformada Z e a RDC para os sinais indicados abaixo:

- 1 $\delta[n]$
- 2 $u[n]$
- 3 $\cos(\beta n)u[n]$
- 4 O sinal $x[n]$ mostrado abaixo



Exemplo

Solução exemplo 5.2

$$\delta[n] \iff 1, \quad \forall z \neq 0$$

$$u[n] \iff \frac{z}{z-1}, \quad |z| > 1$$

$$\underbrace{\cos(\beta n)u[n]}_{\frac{(e^{j\beta n} + e^{-j\beta n})}{2}u[n]} \iff \frac{z(z - \cos \beta)}{z^2 - 2z \cos \beta + 1}, \quad |z| > 1$$

$$X[z] = \sum_{n=0}^4 z^{-n} = \sum_{n=0}^4 \frac{1}{z^n} = \frac{\frac{1}{z^5} - 1}{\frac{1}{z} - 1} = \frac{z}{z-1}(1 - z^{-5})$$

- O procedimento para a obtenção da transformada Z inversa é similar ao usado na transformada de Laplace
- Entretanto, deve-se observar que

$$\gamma^{n-1}u[n-1] \iff \frac{1}{z-\gamma}$$

- Ou seja, a expansão em frações parciais usual leva ao aparecimento de termos em $u[n - 1]$ e não em $u[n]$
- Para se obter uma expressão em termos de $u[n]$ é necessário modificar o procedimento
 - Expandir em frações parciais $X[z]/z$
 - Isolar $X[z]$ e utilizar a tabela

Calcular a transformada Z inversa de:

$$X_4[z] = \frac{5z(z-1)}{z^2-1,6z+0,8}$$

Exemplo

Solução exercício E5.2

$$\frac{X_1[z]}{z} = \frac{2z - 1}{(z - 1)(z + 0,5)} = \frac{k_1}{z - 1} + \frac{k_2}{z + 0,5}$$

$$\frac{X_1[z]}{z} = \frac{2/3}{z - 1} + \frac{4/3}{z + 0,5}$$

$$X_1[z] = \frac{2}{3} \frac{z}{z - 1} + \frac{4}{3} \frac{z}{z + 0,5}$$

$$x_1[n] = \frac{1}{3} [2 + 4(-0,5)^n] u[n]$$

$$\frac{X_2[z]}{z} = \frac{1}{z(z-1)(z+0,5)} = \frac{k_1}{z} + \frac{k_2}{z-1} + \frac{k_3}{z+0,5}$$

$$\frac{X_2[z]}{z} = \frac{-2}{z} + \frac{2/3}{z-1} + \frac{4/3}{z+0.5}$$

$$X_2[z] = -2 + \frac{2}{3} \frac{z}{z-1} + \frac{4}{3} \frac{z}{z+0,5}$$

$$x_2[n] = -2\delta[n] + \frac{1}{3}[2 + 4(-0,5)^n]u[n]$$

Exemplo

Solução exercício E5.2

$$\begin{aligned}
 \frac{X_3[z]}{z} &= \frac{9}{z(z+2)(z-0,5)^2} \\
 &= \frac{k_1}{z} + \frac{k_2}{z+2} + \frac{k_3}{z-0,5} + \frac{k_4}{(z-0,5)^2} \\
 &= \frac{18}{z} + \frac{-0,72}{z+2} + \frac{-17,28}{z-0,5} + \frac{7,2}{(z-0,5)^2} \\
 X_3[z] &= 18 - 0,72 \frac{z}{z+2} - 17,28 \frac{z}{z-0,5} + 7,2 \frac{z}{(z-0,5)^2} \\
 x_3[n] &= 18\delta[n] - [0,72(-2)^n + 17,28(0,5)^n - 14,4n(0,5)^n]u[n]
 \end{aligned}$$

Exemplo

Solução exercício E5.2

$$\begin{aligned}
 \frac{X_4[z]}{z} &= \frac{5(z-1)}{z^2 - 1,6z + 0,8} = \frac{5(z-1)}{(z-0,8+j0,4)(z-0,8-j0,4)} \\
 &= \frac{k_1}{z-0,8+j0,4} + \frac{k_1^*}{z-0,8-j0,4} \\
 &= \frac{1,25\sqrt{5}e^{-j0,4636}}{z-0,8+j0,4} + \frac{1,25\sqrt{5}e^{j0,4636}}{z-0,8-j0,4} \\
 X_4[z] &= \frac{0,5 \cdot 2,5\sqrt{5}e^{-j0,4636}}{z-0,4\sqrt{5}e^{-j0,4636}} + \frac{0,5 \cdot 2,5\sqrt{5}e^{j0,4636}}{z-0,4\sqrt{5}e^{j0,4636}} \\
 x_4[n] &= 2,5\sqrt{5}(0,4\sqrt{5})^n \cos(0,4636n + 0,4636)u[n] \\
 &= \frac{5\sqrt{5}}{2} \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^n \cos(0,4636n + 0,4636)u[n]
 \end{aligned}$$

Função de Transferência

- Considere um sistema LDIT com resposta ao impulso $h[n]$
- Se a entrada desse sistema é z^n , então:

$$x[n] = z^n \longrightarrow y[n] = h[n] * z^n$$

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]z^{n-m} = z^n \underbrace{\sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]z^{-m}}_{H[z]} = z^n H[z]$$

$$H[z] = \mathcal{Z}\{h[n]\}$$

- $H[z]$ é a função de transferência do sistema discreto com resposta ao impulso $h[n]$
- Se o sistema LDIT é da forma $Q[E]y[n] = P[E]x[n]$, então

$$H[z] = \frac{P[z]}{Q[z]}$$

Transformada Z

- Introdução
- **Propriedades**
- Equações de Diferenças
- Estabilidade de Sistemas
- Resposta em Frequência
- Conexão entre as Transformadas de Laplace e Z

Propriedades da Transformada Z

- As propriedades da transformada Z são úteis no cálculo de algumas transformadas, bem como na resolução de sistemas de equações de diferenças
- Deslocamento para a direita (atraso)

$$\begin{aligned}
 &\text{se } x[n]u[n] \iff X[z] \\
 &\text{então } x[n-1]u[n-1] \iff \frac{X[z]}{z} = z^{-1}X[z] \\
 &x[n-m]u[n-m] \iff \frac{X[z]}{z^m} = z^{-m}X[z]
 \end{aligned}$$

Propriedades da Transformada Z

- Deslocamento para a direita (atraso)
 - Uma outra versão dessa propriedade pode ser obtida notando-se que:

$$\begin{aligned}
 x[n-1]u[n-1] &= x[n-1](u[n] - \delta[n]) \\
 &= x[n-1]u[n] - \delta[n]x[n-1] \\
 &= x[n-1]u[n] - \delta[n]x[-1]
 \end{aligned}$$

- Então

$$\begin{aligned}
 \text{se } x[n]u[n] &\iff X[z] \\
 \text{então } x[n-1]u[n] &\iff \frac{X[z]}{z} + x[-1] \\
 x[n-m]u[n] &\iff z^{-m}X[z] + z^{-m} \sum_{k=1}^m x[-k]z^k
 \end{aligned}$$

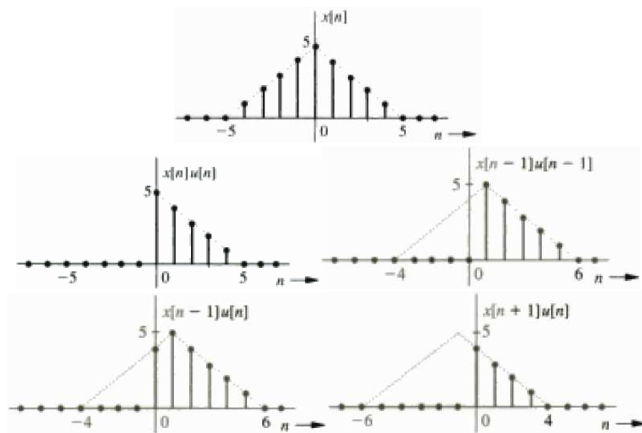
Propriedades da Transformada Z

- Deslocamento para a esquerda (avanço)

$$\text{se } x[n]u[n] \iff X[z]$$

$$\text{então } x[n+1]u[n] \iff zX[z] - zx[0]$$

$$x[n+m]u[n] \iff z^m X[z] - z^m \sum_{k=0}^{m-1} x[k]z^{-k}$$



- $$\begin{aligned} \text{se } x_1[n] &\iff X_1[z] \text{ e } x_2[n] \iff X_2[z] \\ \text{então } x_1[n] * x_2[n] &\iff X_1[z]X_2[z] \\ x_1[n]x_2[n] &\iff \frac{1}{2\pi j} \oint X_1[u]X_2\left[\frac{z}{u}\right]u^{-1}du \end{aligned}$$

- $$y[n] = x[n] * h[n] \iff Y[z] = X[z]H[z]$$

- $$\begin{aligned} \text{se } x[n]u[n] &\iff X[z] \\ \text{então } \gamma^n x[n]u[n] &\iff X\left[\frac{z}{\gamma}\right] \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} \text{se } x[n]u[n] &\iff X[z] \\ \text{então } nx[n]u[n] &\iff -z \frac{dX[z]}{dz} \end{aligned}$$

Propriedades da Transformada Z

- Valor inicial

$$\begin{aligned} &\text{se } x[n] \text{ é causal} \\ &\text{então } x[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} X[z] \end{aligned}$$

- Valor final

se $(z - 1)X[z]$ não possuir pólos fora do círculo unitário

$$\text{então } \lim_{N \rightarrow \infty} x[N] = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)X[z]$$

Roteiro

1

Transformada Z

- Introdução
- Propriedades
- **Equações de Diferenças**
- Estabilidade de Sistemas
- Resposta em Frequência
- Conexão entre as Transformadas de Laplace e Z

Solução de Equações de Diferenças

- Vimos que:

$$x[n - m]u[n] \iff z^{-m}X[z] + z^{-m} \sum_{k=1}^m x[-k]z^k$$

$$x[n + m]u[n] \iff z^mX[z] - z^m \sum_{k=0}^{m-1} x[k]z^{-k}$$

- Para calcular a transformada Z de $x[n - m]u[n]$ é necessário dispor dos valores $x[-1], x[-2], \dots, x[-m]$
- Para calcular a transformada Z de $x[n + m]u[n]$ é necessário dispor dos valores $x[0], x[1], \dots, x[m - 1]$

Exemplo

Exercício E5.10

Resolver a equação

$$y[n+2] - \frac{5}{6}y[n+1] + \frac{1}{6}y[n] = 5x[n+1] - x[n]$$

com $y[-1] = 2$, $y[-2] = 0$ e $x[n] = u[n]$.

Exemplo

Solução exercício E5.10

Colocando a equação na forma de atraso

$$y[n] - \frac{5}{6}y[n-1] + \frac{1}{6}y[n-2] = 5x[n-1] - x[n-2]$$

com $y[-1] = 2$, $y[-2] = 0$ e $x[n] = u[n]$. Tomando $n = 0$ como a referência de tempo, tem-se que:

$$y[n] = y[n]u[n]$$

$$y[n-1] = y[n-1]u[n]$$

$$y[n-2] = y[n-2]u[n]$$

$$x[n-1] = x[n-1]u[n]$$

$$x[n-2] = x[n-2]u[n]$$

Exemplo

Solução exercício E5.10

A transformada Z de cada um dos termos vale

$$y[n]u[n] \iff Y[z]$$

$$y[n-1]u[n] \iff \frac{1}{z}Y[z] + 2$$

$$y[n-2]u[n] \iff \frac{1}{z^2}Y[z] + \frac{2}{z}$$

$$x[n] = u[n] \iff X[z] = \frac{z}{z-1}$$

$$x[n-1]u[n] \iff \frac{1}{z-1}$$

$$x[n-2]u[n] \iff \frac{1}{z(z-1)}$$

Exemplo

Solução exercício E5.10

Aplicando-se a transformada Z à equação de diferenças, tem-se:

$$\begin{aligned}
 Y[z] - \frac{5}{6} \left(\frac{1}{z} Y[z] + 2 \right) + \frac{1}{6} \left(\frac{1}{z^2} Y[z] + \frac{2}{z} \right) \\
 &= 5 \left(\frac{1}{z-1} \right) - \left(\frac{1}{z(z-1)} \right) \\
 Y[z] \left(1 - \frac{5}{6z} + \frac{1}{6z^2} \right) + \frac{1-5z}{3z} &= \frac{5z-1}{z(z-1)} \\
 Y[z] \left(1 - \frac{5}{6z} + \frac{1}{6z^2} \right) &= \frac{5z-1}{3z} + \frac{5z-1}{z(z-1)}
 \end{aligned}$$

Exemplo

Solução exercício E5.10

$$Y[z] \left(z^2 - \frac{5}{6}z + \frac{1}{6} \right) = \frac{5z^2 - z}{3} + \frac{5z^2 - z}{z - 1}$$

$$Y[z] \left(z^2 - \frac{5}{6}z + \frac{1}{6} \right) = \frac{(5z^2 - z)(z + 2)}{3(z - 1)}$$

$$Y[z] = \frac{z(5z - 1)(z + 2)}{3(z - 1) \left(z - \frac{1}{2} \right) \left(z - \frac{1}{3} \right)}$$

$$\frac{Y[z]}{z} = \frac{12}{z - 1} - \frac{15}{z - \frac{1}{2}} + \frac{14/3}{z - \frac{1}{3}}$$

Exemplo

Solução exercício E5.10

$$Y[z] = 12 \frac{z}{z-1} - 15 \frac{z}{z-\frac{1}{2}} + \frac{14}{3} \frac{z}{z-\frac{1}{3}}$$

$$y[n] = \left[12 - 15 \left(\frac{1}{2} \right)^n + \frac{14}{3} \left(\frac{1}{3} \right)^n \right] u[n]$$

Exemplo

Exercício E5.11

Resolver a equação

$$y[n] + 3y[n - 1] + 2y[n - 2] = x[n - 1] + 3x[n - 2]$$

com $y[0] = 1$, $y[1] = 2$ e $x[n] = u[n]$.

Exemplo

Solução exercício E5.11

Colocando a equação na forma de avanço

$$y[n+2] + 3y[n+1] + 2y[n] = x[n+1] + 3x[n]$$

com $y[0] = 1$, $y[1] = 2$ e $x[n] = u[n]$. Tomando $n = 0$ como a referência de tempo, tem-se que:

$$y[n] = y[n]u[n]$$

$$y[n+1] = y[n+1]u[n]$$

$$y[n+2] = y[n+2]u[n]$$

$$x[n] = x[n]u[n]$$

$$x[n+1] = x[n+1]u[n]$$

Exemplo

Solução exercício E5.11

A transformada Z de cada um dos termos vale

$$y[n]u[n] \iff Y[z]$$

$$y[n+1]u[n] \iff zY[z] - z$$

$$y[n+2]u[n] \iff z^2Y[z] - z^2 - 2z$$

$$x[n] = u[n] \iff X[z] = \frac{z}{z-1}$$

$$x[n+1]u[n] \iff \frac{z}{z-1}$$

Exemplo

Solução exercício E5.11

Aplicando-se a transformada Z à equação de diferenças, tem-se:

$$z^2 Y[z] - z^2 - 2z + 3(zY[z] - z) + 2Y[z] = \frac{z}{z-1} + 3\left(\frac{z}{z-1}\right)$$

$$Y[z](z^2 + 3z + 2) - (z^2 + 5z) = \frac{4z}{z-1}$$

$$Y[z](z^2 + 3z + 2) = (z^2 + 5z) + \frac{4z}{z-1}$$

Exemplo

Solução exercício E5.11

$$Y[z](z^2 + 3z + 2) = (z^2 + 5z) + \frac{4z}{z - 1}$$

$$Y[z](z^2 + 3z + 2) = \frac{z(z^2 + 4z - 1)}{z - 1}$$

$$Y[z] = \frac{z(z^2 + 4z - 1)}{(z - 1)(z + 1)(z + 2)}$$

$$\frac{Y[z]}{z} = \frac{2}{3} \frac{1}{z - 1} + 2 \frac{1}{z + 1} - \frac{5}{3} \frac{1}{z + 2}$$

Exemplo

Solução exercício E5.11

$$Y[z] = \frac{2}{3} \frac{z}{z-1} + 2 \frac{z}{z+1} - \frac{5}{3} \frac{z}{z+2}$$

$$y[n] = \left[\frac{2}{3} + 2(-1)^n - \frac{5}{3}(-2)^n \right] u[n]$$

Solução de Equações de Diferenças

- Assim como foi feito com a transformada de Laplace, é possível separar as componentes da resposta total
- A resposta de estado nulo depende apenas da entrada, enquanto que a resposta de entrada nula depende apenas do estado (condições iniciais)
- No exercício E5.10, os termos da equação em $Y[z]$ podem ser reagrupados da seguinte maneira

$$Y[z] \left(z^2 - \frac{5}{6}z + \frac{1}{6} \right) = \underbrace{\frac{5z^2 - z}{3}}_{\text{cond. iniciais}} + \underbrace{\frac{5z^2 - z}{z - 1}}_{\text{entrada}}$$

- $$Y[z] = \underbrace{\frac{5z^2 - z}{3\left(z^2 - \frac{5}{6}z + \frac{1}{6}\right)}}_{\text{comp. entrada nula: } Y_0[z]} + \underbrace{\frac{5z^2 - z}{\left(z^2 - \frac{5}{6}z + \frac{1}{6}\right)(z - 1)}}_{\text{comp. estado nulo: } Y_{FSN}[z]}$$

$$\frac{Y_0[z]}{z} = \frac{5z - 1}{3\left(z - \frac{1}{2}\right)\left(z - \frac{1}{3}\right)} = \frac{3}{z - \frac{1}{2}} - \frac{4/3}{z - \frac{1}{3}}$$

$$Y_0[z] = 3 \frac{z}{z - \frac{1}{2}} - \frac{4}{3} \frac{z}{z - \frac{1}{3}}$$

$$y_0[n] = \left[3\left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{4}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n \right] u[n]$$

$$y_{ESN}[n] = 6 \left[2 - 3 \left(\frac{1}{2} \right)^n + \left(\frac{1}{3} \right)^n \right] u[n]$$

Resposta de Estado Nulo

- Vimos que um sistema LDIT de ordem N pode ser escrito na forma de avanço como

$$y[n + N] + a_1 y[n + N - 1] + \cdots + a_N y[n] = b_0 x[n + N] + b_1 x[n + N - 1] + \cdots + b_N x[n]$$

- Na forma de atraso, essa equação é escrita como

$$y[n] + a_1 y[n - 1] + \cdots + a_N y[n - N] = b_0 x[n] + b_1 x[n - 1] + \cdots + b_N x[n - N]$$

Resposta de Estado Nulo

- Quando o estado é nulo, tem-se que:

$$y[-1] = y[-2] = \cdots = y[-N] = 0$$

- Se $x[n]$ for causal, então:

$$x[-1] = x[-2] = \cdots = x[-N] = 0$$

- Assim, quando o estado é nulo e o sinal de entrada é causal, então:

$$y[n - m]u[n] \iff \frac{1}{z^m} Y[z]$$

$$x[n - m]u[n] \iff \frac{1}{z^m} X[z], \quad m = 1, 2, \dots, N$$

Resposta de Estado Nulo

- A transformada Z da equação de diferenças é

$$\left(1 + \frac{a_1}{z} + \dots + \frac{a_N}{z^N}\right) Y[z] = \left(b_0 + \frac{b_1}{z} + \dots + \frac{b_N}{z^N}\right) X[z]$$

$$(z^N + a_1 z^{N-1} + \dots + a_N) Y[z] = (b_0 z^N + b_1 z^{N-1} + \dots + b_N) X[z]$$

- Portanto,

$$Y[z] = \frac{b_0 z^N + b_1 z^{N-1} + \dots + b_N}{z^N + a_1 z^{N-1} + \dots + a_N} X[z] = \underbrace{\frac{P[z]}{Q[z]}}_{H[z]} X[z]$$

$$H[z] \equiv \frac{Y[z]}{X[z]} = \frac{\mathcal{Z}[\text{resp. estado nulo}]}{\mathcal{Z}[\text{entrada}]}$$

Exemplo

Exercício E5.13

Para um sistema LIT com função de transferência

$$H[z] = \frac{z - 0,5}{(z + 0,5)(z - 1)}$$

- 1 Determine $y[n]$ se $x[n] = 3^{-(n+1)}u[n]$ e o sistema estiver em estado nulo.
- 2 Dê a equação de diferenças que relaciona a entrada e a saída.

Exemplo

Solução exercício E5.13

$$x[n] = 3^{-(n+1)}u[n] = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n \iff X[z] = \frac{1}{3} \frac{z}{z - \frac{1}{3}}$$

$$Y[z] = X[z]H[z] = \frac{z(z - 0,5)/3}{(z + 0,5)(z - 1)(z - \frac{1}{3})}$$

$$\begin{aligned} \frac{Y[z]}{z} &= \frac{(z - 0,5)/3}{(z + 0,5)(z - 1)(z - \frac{1}{3})} \\ &= \frac{-0,8/3}{z + 0,5} + \frac{0,5/3}{z - 1} + \frac{0,1}{z - \frac{1}{3}} \end{aligned}$$

$$Y[z] = \frac{1}{3} \left[0,5 \frac{z}{z - 1} - 0,8 \frac{z}{z + 0,5} + 0,3 \frac{z}{z - \frac{1}{3}} \right]$$

Exemplo

Solução exercício E5.13

$$y[n] = \frac{1}{3} \left[0,5 - 0,8(-0,5)^n + 0,3 \left(\frac{1}{3} \right)^n \right] u[n]$$

A equação de diferenças é obtida fazendo-se:

$$\frac{Y[z]}{X[z]} = H[z] = \frac{z - 0,5}{z^2 - 0,5z - 0,5}$$

$$z^2 Y[z] - 0,5z Y[z] - 0,5 Y[z] = z X[z] - 0,5 X[z]$$

$$y[n+2] - 0,5y[n+1] - 0,5y[n] = x[n+1] - 0,5x[n]$$

Transformada Z

- Introdução
- Propriedades
- Equações de Diferenças
- **Estabilidade de Sistemas**
- Resposta em Frequência
- Conexão entre as Transformadas de Laplace e Z

- A estabilidade de um sistema LDIT pode ser analisada segundo os critérios
 - BIBO (estabilidade externa)
 - Assintótica (estabilidade interna)
- A estabilidade BIBO pode ser determinada a partir da análise dos pólos da função de transferência do sistema $H[z]$
- A estabilidade assintótica pode ser determinada a partir das raízes do polinômio $Q[z]$

- ◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡

Transformada Z

- Introdução
- Propriedades
- Equações de Diferenças
- Estabilidade de Sistemas
- **Resposta em Frequência**
- Conexão entre as Transformadas de Laplace e Z

Resposta em Frequência

- A resposta em frequência de sistemas discretos é obtida de modo similar à obtida para os sistemas contínuos
- Vimos que para um sistema LDIT, tem-se que:

$$z^n \implies H[z]z^n$$

- Fazendo $z = e^{j\Omega}$

$$e^{j\Omega n} \implies H[e^{j\Omega}]e^{j\Omega n}$$

$$\operatorname{Re}\{e^{j\Omega n}\} = \cos \Omega n \implies \operatorname{Re}\{H[e^{j\Omega}]e^{j\Omega n}\}$$

Resposta em Frequência

- Como

$$H[e^{j\Omega}] = |H[e^{j\Omega}]| e^{j\angle H[e^{j\Omega}]}$$

- Tem-se que

$$\cos \Omega n \implies |H[e^{j\Omega}]| \cos (\Omega n + \angle H[e^{j\Omega}])$$

- Sendo assim, a saída $y[n]$ para uma entrada $x[n] = \cos \Omega n$ é dada por

$$y[n] = |H[e^{j\Omega}]| \cos (\Omega n + \angle H[e^{j\Omega}])$$

- Para $x[n] = \cos (\Omega n + \theta)$, $y[n]$ é dado por

$$y[n] = |H[e^{j\Omega}]| \cos (\Omega n + \theta + \angle H[e^{j\Omega}])$$

Resposta em Frequência

- $H[e^{j\Omega}]$ só pode ser calculado se $z = e^{j\Omega}$ estiver na RDC de $H[z]$, ou seja, o sistema deve ser BIBO estável
- A amplitude da senóide de saída é amplificada ou atenuada por $|H[e^{j\Omega}]|$
- A fase da senóide de saída é deslocada por $\angle H[e^{j\Omega}]$
- O gráfico de $|H[e^{j\Omega}]|$ versus Ω é chamado de resposta de amplitude
- O gráfico de $\angle H[e^{j\Omega}]$ versus Ω é chamado de resposta de fase
- A resposta em frequência de um sistema consiste nas respostas de amplitude e de fase

Resposta em Frequência

- Senóides práticas são de duração finita, ou seja, começam em algum instante de tempo
- Se o sistema for BIBO estável, os modos naturais desaparecem e assim, a resposta de regime permanente senoidal para a entrada $x[n] = \cos(\Omega n)u[n]$ é dada por

$$y_{ss}[n] = |H[e^{j\Omega}]| \cos(\Omega n + \angle H[e^{j\Omega}])u[n]$$

- A resposta para uma senóide contínua amostrada a cada T segundos com ωnT é obtida fazendo-se $\Omega = \omega T$ nas equações anteriores

Resposta em Frequência

- A resposta em frequência $H[e^{j\Omega}]$ é uma função periódica de Ω com período 2π , já que

$$H[e^{j\Omega}] = H[e^{j(\Omega+2\pi m)}], \quad m \in \mathbb{Z}$$

- Dessa forma, senóide discretas separadas por múltiplos de 2π são idênticas
- Por essa razão, se considera em geral uma *faixa fundamental* de $-\pi$ a π a fim de evitar ambiguidades

$$\Omega_a = \Omega - 2\pi m, \quad -\pi \leq \Omega_a \leq \pi$$

Exemplo

Exercício E5.18

Para um sistema especificado pela equação

$$y[n + 1] - 0,5y[n] = x[n]$$

Determine a resposta em frequência deste sistema. Determine a resposta do sistema à entrada senoidal $\cos(1000t - \pi/3)$ amostrada a cada $T = 0,5ms$

Exemplo

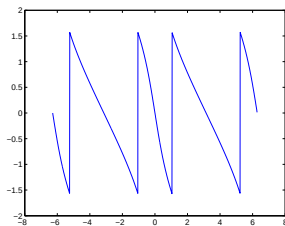
Solução exercício E5.18

$$H[z] = \frac{1}{z - 0,5} \Rightarrow H[e^{j\Omega}] = \frac{1}{e^{j\Omega} - 0,5}$$

$$H[e^{j\Omega}] = \frac{1}{\cos \Omega - 0,5 + j \sin \Omega}$$

$$|H[e^{j\Omega}]| = \frac{1}{\sqrt{(\cos \Omega - 0,5)^2 + \sin^2 \Omega}} = \frac{1}{\sqrt{1,25 - \cos \Omega}}$$

$$\angle H[e^{j\Omega}] = -\arctan \left[\frac{\sin \Omega}{\cos \Omega - 0,5} \right]$$



Exemplo

Solução exercício E5.18

Para $T = 0,5ms$, a frequência discreta é

$\Omega = \omega T = 1000 \cdot 0,5 \cdot 10^{-3} = 0,5 rad / amostra$. Assim,

$$\begin{aligned} H[e^{j0,5}] &= \frac{1}{\cos 0,5 - 0,5 + j \sin 0,5} = \frac{1}{0,3776 + j0,4794} \\ &= 1,639e^{-j0,904} \end{aligned}$$

Logo,

$$y[n] = 1,639 \cos \left(0,5n - \frac{\pi}{3} - 0,904 \right)$$

Transformada Z

- Introdução
- Propriedades
- Equações de Diferenças
- Estabilidade de Sistemas
- Resposta em Frequência
- Conexão entre as Transformadas de Laplace e Z

-
- Figure 1.1 illustrates the relationship between discrete-time and continuous-time signals and systems. The top row shows two plots: on the left, a discrete-time signal $f[k]$ is represented by vertical stems with circular markers at the top, and a dashed curve connects the markers; on the right, a continuous-time signal $\tilde{f}(t)$ is represented by a dashed curve with vertical stems indicating samples at regular intervals. The bottom row shows two system blocks: on the left, a discrete-time system block labeled $H[z]$ takes an input $f[k]$ and produces an output $y[k]$; on the right, a continuous-time system block labeled $H[e^{j\omega}]$ takes an input $\tilde{f}(t)$ and produces an output $\tilde{y}(t)$. The bottom row also includes two plots: on the left, a discrete-time signal $y[k]$ is shown as vertical stems with circular markers, and a dashed curve connects the markers; on the right, a continuous-time signal $\tilde{y}(t)$ is shown as a dashed curve with vertical stems indicating samples at regular intervals.

Conexão entre as Transformadas de Laplace e Z

- No lado esquerdo, tem-se um sistema discreto com entrada $x[n]$, função de transferência $H[z]$ e saída $y[n]$
- No lado direito, tem-se a operação realizada por um sistema contínuo equivalente
- A relação entre os dois sistemas pode ser obtida considerando-se que os sinais contínuos equivalentes são:

$$\bar{x}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] \delta(t - nT)$$

$$\bar{y}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} y[n] \delta(t - nT)$$

Conexão entre as Transformadas de Laplace e Z

- O sistema discreto produz a sua saída a partir de deslocamentos, somas e multiplicações por escalares
- A estrutura de $H[z]$ contém as informações dessas operações
- Um atraso no sistema discreto equivale a um termo $1/z$, enquanto que o seu equivalente contínuo vale e^{-sT}
- Sendo assim, o sistema contínuo procurado é obtido a partir de $H[z]$, fazendo-se $H[z = e^{sT}] = H(s)$
- Como

$$\bar{x}(t) \iff \bar{X}(s) \text{ e } \bar{y}(t) \iff \bar{Y}(s)$$

Conexão entre as Transformadas de Laplace e Z

- Então,

$$\overline{Y}(s) = H[e^{sT}] \overline{X}(s)$$

- Mas,

$$\overline{X}(s) = \mathcal{L} \left[\sum_{n=0}^{\infty} x[n] \delta(t - nT) \right] = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] e^{-snT}$$

$$\overline{Y}(s) = \mathcal{L} \left[\sum_{n=0}^{\infty} y[n] \delta(t - nT) \right] = \sum_{n=0}^{\infty} y[n] e^{-snT}$$

Conexão entre as Transformadas de Laplace e Z

- A substituição resulta em

$$\sum_{n=0}^{\infty} y[n]e^{-snT} = H[e^{sT}] \sum_{n=0}^{\infty} x[n]e^{-snT}$$

- Fazendo $z = e^{sT}$, tem-se que:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} y[n]z^{-n} &= H[z] \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n} \\ Y[z] &= H[z]X[z] \end{aligned}$$

- Assim, a transformada z pode ser considerada como sendo a transformada de Laplace com a mudança de variável $z = e^{sT}$ ou $s = (1/T) \ln z$