Análise no Domínio do Tempo de Sistemas em Tempo Discreto

Edmar José do Nascimento
(Análise de Sinais e Sistemas)
http://www.univasf.edu.br/˜edmar.nascimento

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Elétrica

Roteiro

Introdução

- Sinais discretos são sinais definidos em instantes discretos de tempo
  - Representados por $x[n], \; n \in \mathbb{Z}$
  - Podem ser discretos por natureza ou resultado de uma operação de discretização (passagem do tempo contínuo para o tempo discreto)
- Sistemas discretos são aqueles que processam sinais discretos, resultando em um sinal de saída também discreto
- Sinais contínuos também podem ser processados por sistemas discretos desde que eles sejam discretizados previamente

$$x(t) \;=\; e^{-t} \rightarrow x(nT_s) = e^{-nT_s} \rightarrow x[n] = e^{-0,1n} \; (T_s = 0,1)$$

Roteiro

Modelos de Sinais Discretos

- Impulso discreto

$$\delta[n] = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{array} \right\}$$

- Degrau unitário

$$u[n] = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{array} \right\}$$

- O degrau unitário é útil para representar sinais discretos causais, bem como abreviar notações

Exponencial Discreta

- A exponencial discreta $e^{\lambda n}$ é representada frequentemente na forma γ^n, sendo

$$\gamma^n = e^{\lambda n} \; (\gamma = e^{\lambda} \text{ ou } \lambda = \ln \gamma)$$

- O plano λ pode ser mapeado para o plano γ
  - Eixo imaginário (λ) - Círculo unitário (γ)

$$\lambda = j\omega \rightarrow \gamma = e^{j\omega} \rightarrow |\gamma| = |e^{j\omega}| = 1$$

  - SPE (λ) - Interior do círculo unitário (γ)

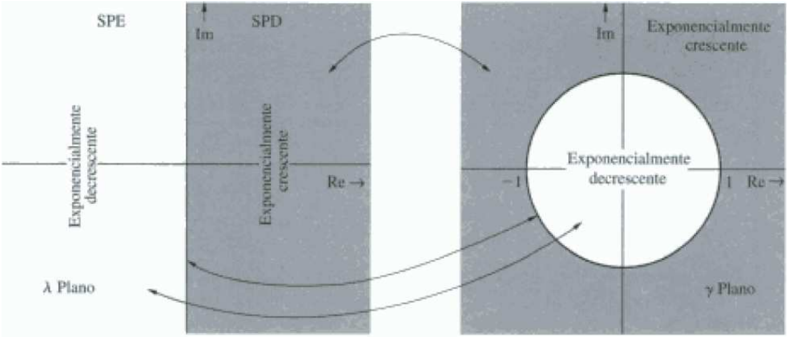
$$\lambda = a + j\omega \rightarrow \gamma = e^a e^{j\omega} \rightarrow |\gamma| = |e^a| < 1 \; (a < 0)$$

  - SPD (λ) - Exterior do círculo unitário (γ)

$$\lambda = a + j\omega \rightarrow \gamma = e^a e^{j\omega} \rightarrow |\gamma| = |e^a| > 1 \; (a > 0)$$

Exponencial Discreta

- Mapeamento do plano λ para o plano γ



Senóide Discreta

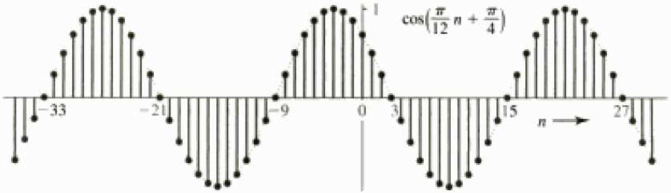
- Uma senóide discreta no tempo é representada por

$$x[n] = C\cos(\Omega n + \theta) = C\cos(2\pi \mathcal{F} n + \theta)$$

  - $C \rightarrow$ amplitude
  - $\theta \rightarrow$ fase em radianos
  - $\Omega \rightarrow$ frequência em radianos/amostra
  - $\Omega n \rightarrow$ ângulo em radianos
  - $\mathcal{F} = \frac{1}{N_0} \rightarrow$ frequência em ciclos/amostra
  - $N_0 \rightarrow$ período

Senóide Discreta

- Senóide discreta $\cos(\frac{\pi}{12}n + \frac{\pi}{4})$



Exponencial Complexa Discreta

- Uma exponencial complexa discreta é representada por $e^{j\Omega n}$
- A sua relação com a senóide discreta é dada por

$$
\begin{aligned}
e^{j\Omega n} &= (\cos \Omega n + j \sin \Omega n) \\
e^{-j\Omega n} &= (\cos \Omega n - j \sin \Omega n) \\
\cos \Omega n &= \frac{e^{j\Omega n} + e^{-j\Omega n}}{2} \\
\sin \Omega n &= \frac{e^{j\Omega n} - e^{-j\Omega n}}{2j}
\end{aligned}
$$

Roteiro

Energia e Potência de Sinais Discretos

- A energia de um sinal discreto $x[n]$ é dada por

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$$

- Se $0 < E_x < \infty$ o sinal é dito ser de energia
- A potência de um sinal $x[n]$ é dada por

$$P_x = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2$$

- Se $0 < P_x < \infty$ o sinal é dito ser de potência
- Se $x[n]$ for periódico, a potência pode ser calculada dividindo-se a energia de um período pelo tamanho do período

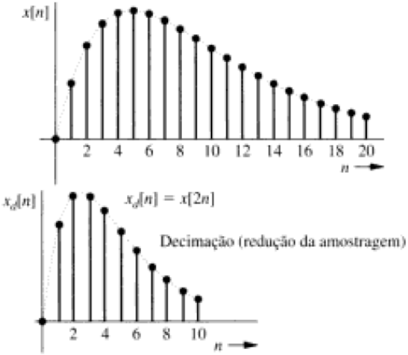
Operações com Sinais

- Deslocamento $x_s[n] = x[n - M], M \in \mathbb{Z}$
  - $M > 0 \rightarrow$ deslocamento para a direita (atraso)
  - $M < 0 \rightarrow$ deslocamento para a esquerda (avanço)
- Reversão no tempo $x_r[n] = x[-n]$
- Alteração na taxa de amostragem: Decimação e Interpolação
- Decimação (compressão) $x_d[n] = x[Mn], M \in \mathbb{Z}$
  - Reduz a quantidade de amostras por um fator de M
  - Há uma perda de informação
- Interpolação (expansão): 2 etapas (expansão e interpolação)
  - Amostras são criadas a partir de outras amostras

$$x_e[n] = \left\{ \begin{array}{cc} x[n/L]; & n = kL \ (k \in \mathbb{Z}) \\ 0; & c.c. \end{array} \right\}$$

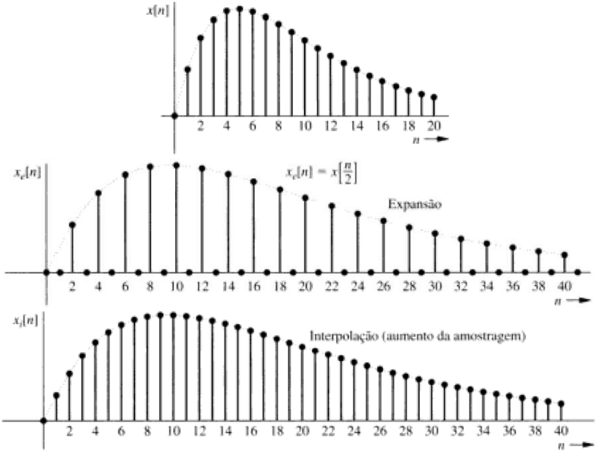
Decimação

- $x_d[n] = x[2n]$



Interpolação

- $x_d[n] = x[n/2]$



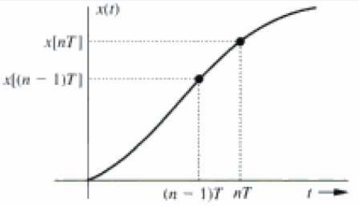
Sistemas Discretos

- Um sistema discreto é um sistema que processa sinais discretos resultando em saídas discretas
- Sistemas discretos podem ser expressados através de equações de diferença
- Esses sistemas podem ser inerentemente discretos ou podem ser obtidos a partir da discretização de sistemas contínuos no tempo
- Os softwares de simulação transformam os sistemas contínuos em discretos
  - O usuário tem a "ilusão"de estar trabalhando com um sistema contínuo

Sistemas Discretos

Exemplo 3.6

Projetar um sistema discreto para diferenciar sinais contínuos



Sistemas Discretos

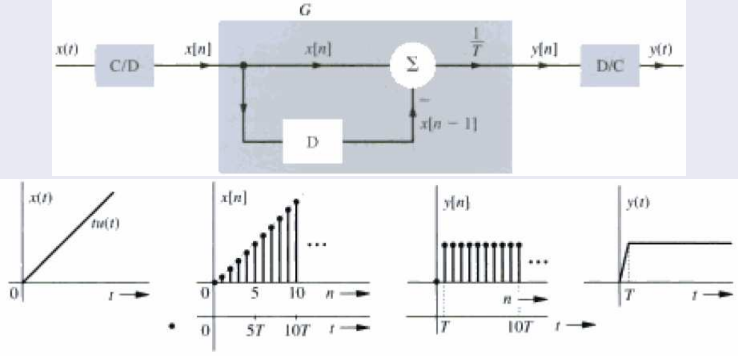
Solução

$$
\begin{aligned}
y(nT) &= \frac{dx(t)}{dt}\Big|_{t=nT} = \lim_{T\to 0} \frac{x(nT) - x((n-1)T)}{T} \\
y[n] &= \lim_{T\to 0} \frac{x[n] - x[n-1]}{T} \\
y[n] &= \frac{x[n] - x[n-1]}{T} = \frac{x[n]}{T} - \frac{x[n-1]}{T} \quad (T \text{ pequeno})
\end{aligned}
$$

T é escolhido de acordo com o sinal a ser diferenciado.

Sistemas Discretos

Solução



Sistemas Discretos

- Em geral, uma equação diferencial qualquer pode ser convertida em uma equação de diferenças
- Considere o exemplo da equação diferencial de primeira ordem abaixo

$$\frac{dy(t)}{dt} + cy(t) = x(t) \rightarrow \lim_{T \rightarrow 0} \frac{y[n] - y[n-1]}{T} + cy[n] = x[n]$$

- Se T é pequeno, então pode-se ter a aproximação

$$\frac{y[n] - y[n-1]}{T} + cy[n] = x[n] \rightarrow$$
$$y[n] + \alpha y[n-1] = \beta x[n] \text{ ou}$$
$$y[n+1] + \alpha y[n] = \beta x[n+1]$$

Classificação de Sistemas Discretos

- A classificação dos sistemas discretos segue a mesma linha dos sistemas contínuos
- Sendo assim, os sistemas discretos podem ser
  - Lineares ou não lineares
  - Variantes ou invariantes no tempo
  - Causais ou não causais
  - Inversíveis ou não inversíveis
  - Estáveis ou instáveis
  - Com memória ou sem memória

Roteiro

Equações de Diferença

- Uma equação de diferenças pode ser escrita usando operações de avanço ou de atraso
  - As duas formulações são equivalentes
  - A formulação com avanços é similar à obtida para as equações diferenciais contínuas
- Uma equação de diferenças de ordem $\max(N, M)$ na forma de avanço pode ser escrita como

$$y[n+N] + a_1 y[n+N-1] + \cdots + a_N y[n] =$$
$$b_{N-M} x[n+M] + b_{N-M+1} x[n+M-1] + \cdots + b_N x[n]$$

Equações de Diferença

- Se o sistema discreto for causal, então $N \geq M$, logo um sistema causal genérico de ordem N pode ser escrito fazendo-se $M = N$

$$y[n+N] + a_1 y[n+N-1] + \cdots + a_N y[n] =$$
$$b_0 x[n+N] + b_1 x[n+N-1] + \cdots + b_N x[n]$$

- A equação de diferenças acima pode ser escrita na forma de atraso fazendo-se a transformação $n \to n - N$, resultando em

$$y[n] + a_1 y[n-1] + \cdots + a_N y[n-N] =$$
$$b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + \cdots + b_N x[n-N]$$

Solução Iterativa

- O método mais simples de solução de uma equação de diferenças é o recursivo ou iterativo
- Nesse método, os valores de $y[n]$ são obtidos seqüencialmente a partir da entrada $x[n]$ e das condições iniciais
- Esse tipo de solução é adequada para computadores

$$
\begin{aligned}
y[n] &= -a_1 y[n-1] + \cdots - a_N y[n-N] \\
&+ b_0 x[n] + \cdots + b_N x[n-N]
\end{aligned}
$$

Solução Iterativa

Exemplo

Resolver recursivamente a equação $y[n+1] + 2y[n] = x[n+1]$ para $x[n] = e^{-n}u[n]$ e $y[-1] = 0$

Solução

$$
\begin{aligned}
y[n] + 2y[n-1] &= x[n] \rightarrow y[n] = -2y[n-1] + e^{-n}u[n] \\
y[0] &= -2y[-1] + e^{0} = 1 \\
y[1] &= -2y[0] + e^{-1} = -1,6321 \\
y[2] &= -2y[1] + e^{-2} = 3,3996 \\
\vdots &= \vdots
\end{aligned}
$$

Solução Iterativa

Exemplo

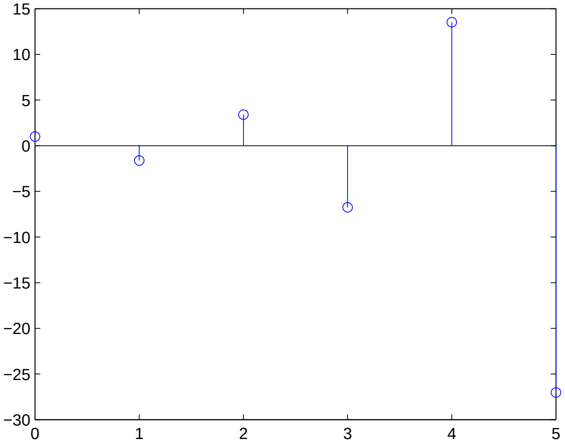
Resolver recursivamente a equação $y[n+1] + 2y[n] = x[n+1]$ para $x[n] = e^{-n}u[n]$ e $y[-1] = 0$

Solução

$$
\begin{aligned}
y[n] + 2y[n-1] &= x[n] \to y[n] = -2y[n-1] + e^{-n}u[n] \\
y[0] &= -2y[-1] + e^{0} = 1 \\
y[1] &= -2y[0] + e^{-1} = -1,6321 \\
y[2] &= -2y[1] + e^{-2} = 3,3996 \\
\vdots &= \vdots
\end{aligned}
$$

Solução Iterativa

- $y[n+1] + 2y[n] = x[n+1]$



Solução Geral

- Assim como foi feito para as equações diferenciais, é útil representar uma equação de diferença usando operadores
- O operador de avanço é definido por

$$E^i x[n] = x[n+i]$$

- Assim, um sistema causal genérico pode ser escrito como

$$\underbrace{(E^N + a_1 E^{N-1} \cdots + a_N)}_{Q[E]} y[n] = \underbrace{(b_0 E^N + b_1 E^{N-1} \cdots + b_N)}_{P[E]} x[n]$$

$$Q[E] y[n] = P[E] x[n]$$

Solução Geral

- A solução geral consiste em uma expressão para $y[n]$ em função de n que verifique a equação de diferenças $Q[E]y[n] = P[E]x[n]$
- Assim como foi verificado para o caso contínuo, a solução geral (resposta total) de um sistema discreto é dada por

$$\begin{aligned} y[n] &= \underbrace{\text{resposta de estado nulo}}_{\text{devido à entrada}} + \\ &\quad \underbrace{\text{resposta de entrada nula}}_{\text{devido às condições iniciais}} \end{aligned}$$

Roteiro

Resposta de Entrada Nula

- A resposta de entrada nula $y_0[n]$ é a resposta do sistema quando $x[n] = 0$, ou seja

$$\begin{aligned} y_0[n+N] + a_1 y_0[n+N-1] + \cdots + a_N y_0[n] &= 0 \\ Q[E]y_0[n] &= 0 \end{aligned}$$

- A solução é obtida a partir da equação característica

$$Q[\gamma] = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} &\gamma^N + a_1\gamma^{N-1} + \cdots + a_N = 0 \\ &(\gamma-\gamma_1)(\gamma-\gamma_2)\cdots(\gamma-\gamma_N) = 0 \end{aligned}$$

- As raízes $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_N$ são chamadas de raízes características

Resposta de Entrada Nula

- Três casos podem ser possíveis
- As N raízes são distintas

$$y_0[n] = c_1\gamma_1^n + c_2\gamma_2^n + \cdots c_N\gamma_N^n$$

- Há raízes repetidas $(\gamma - \gamma_1)^r(\gamma - \gamma_{r+1})\cdots(\gamma - \gamma_N) = 0$

$$y_0[n] = (c_1 + c_2 n + \cdots + c_r n^{r-1})\gamma_1^n + c_{r+1}\gamma_{r+1}^n + \cdots c_N\gamma_N^n$$

- Há raízes complexas $\gamma = |\gamma|e^{j\beta}$ e $\gamma^* = |\gamma|e^{-j\beta}$

$$y_0[n] = c_1\gamma^n + c_2\gamma^{*n} = c|\gamma|^n \cos(\beta n + \theta)$$

- As N constantes são determinadas a partir das N condições iniciais

Resposta de Entrada Nula

Exercício E3.12

Determinar a resposta de entrada nula de $y[n] + 0,3y[n-1] - 0,1y[n-2] = x[n] + 2x[n-1]$ com $y_0[-1] = 1$ e $y_0[-2] = 33$.

Solução

$$y[n+2] + 0,3y[n+1] - 0,1y[n] = x[n+2] + 2x[n+1]$$
$$Q[E] = E^2 + 0,3E - 0,1$$
$$Q[\gamma] = \gamma^2 + 0,3\gamma - 0,1 = 0 \rightarrow \gamma_1 = -0,5; \gamma_2 = 0,2$$
$$y_0[n] = c_1(-0,5)^n + c_2(0,2)^n$$
$$y_0[n] = 2(-0,5)^n + (0,2)^n$$

Resposta de Entrada Nula

Exercício E3.12

Determinar a resposta de entrada nula de $y[n] + 0,3y[n-1] - 0,1y[n-2] = x[n] + 2x[n-1]$ com $y_0[-1] = 1$ e $y_0[-2] = 33$.

Solução

$$y[n+2] + 0,3y[n+1] - 0,1y[n] = x[n+2] + 2x[n+1]$$
$$Q[E] = E^2 + 0,3E - 0,1$$
$$Q[\gamma] = \gamma^2 + 0,3\gamma - 0,1 = 0 \rightarrow \gamma_1 = -0,5; \gamma_2 = 0,2$$
$$y_0[n] = c_1(-0,5)^n + c_2(0,2)^n$$
$$y_0[n] = 2(-0,5)^n + (0,2)^n$$

Resposta de Entrada Nula

Exercício E3.13

Determinar a resposta de entrada nula de $y[n] + 4y[n-2] = 2x[n]$ com $y_0[-1] = -1/(2\sqrt{2})$ e $y_0[-2] = 1/(4\sqrt{2})$.

Solução

$$y[n+2] + 4y[n] = 2x[n+2]$$
$$Q[E] = E^2 + 4$$
$$Q[\gamma] = \gamma^2 + 4 = 0 \rightarrow \gamma_1 = 2j = 2e^{j\frac{\pi}{2}}; \gamma_2 = -2j = 2e^{-j\frac{\pi}{2}}$$
$$y_0[n] = c2^n \cos(n\frac{\pi}{2} + \theta)$$
$$y_0[n] = 2^n \cos(n\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{4}) = -2^n \cos(n\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4})$$

Resposta de Entrada Nula

Exercício E3.13

Determinar a resposta de entrada nula de $y[n] + 4y[n-2] = 2x[n]$ com $y_0[-1] = -1/(2\sqrt{2})$ e $y_0[-2] = 1/(4\sqrt{2})$.

Solução

$$y[n+2] + 4y[n] = 2x[n+2]$$

$$Q[E] = E^2 + 4$$

$$Q[\gamma] = \gamma^2 + 4 = 0 \rightarrow \gamma_1 = 2j = 2e^{j\frac{\pi}{2}}; \gamma_2 = -2j = 2e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

$$y_0[n] = c2^n \cos\left(n\frac{\pi}{2} + \theta\right)$$

$$y_0[n] = 2^n \cos\left(n\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{4}\right) = -2^n \cos\left(n\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$$

Roteiro

Resposta ao Impulso

- Para determinar a resposta de estado nulo é necessário primeiramente determinar a resposta ao impulso
- A resposta ao impulso denotada por $h[n]$ é a solução da equação

$$\begin{aligned} Q[E]h[n] &= P[E]\delta[n], \text{com } h[-1] = h[-2] = \cdots h[-N] = 0 \\ Q[E] &= E^N + a_1 E^{N-1} \cdots + a_N \\ P[E] &= b_0 E^N + b_1 E^{N-1} \cdots + b_N \end{aligned}$$

- Quando $a_N \neq 0$, a resposta ao impulso é dada por

$$h[n] = \frac{b_N}{a_N}\delta[n] + y_c[n]u[n]$$

Resposta ao Impulso

- $y_c[n]$ consiste em uma combinação linear dos modos característicos γ_i do sistema
- As N constantes presentes em $h[n]$ são determinadas a partir de N valores de $h[n]$ ($h[0], h[1], \cdots, h[N-1]$)
  - Esses valores são obtidos iterativamente a partir dos valores iniciais $h[-1] = h[-2] = \cdots = h[-N] = 0$
- Quando $a_N = 0$, a expressão da resposta ao impulso é diferente
  - Esse caso é abordado na seção 3.12 do livro texto

Resposta ao Impulso

Exercício E3.14a

Determinar a resposta ao impulso de $y[n+1] - y[n] = x[n]$.

Solução

$$Q[E] = E - 1$$
$$Q[\gamma] = \gamma - 1 = 0 \rightarrow \gamma_1 = 1$$
$$y_c[n] = c_1 1^n = c_1$$
$$h[n] = -\delta[n] + c_1 u[n]$$
$$h[0] = 0 \rightarrow c_1 = 1$$
$$h[n] = -\delta[n] + u[n] = u[n-1]$$

Resposta ao Impulso

Exercício E3.14a

Determinar a resposta ao impulso de $y[n+1] - y[n] = x[n]$.

Solução

$$
\begin{aligned}
Q[E] &= E - 1 \\
Q[\gamma] = \gamma - 1 = 0 \rightarrow \gamma_1 &= 1 \\
y_c[n] = c_1 1^n &= c_1 \\
h[n] &= -\delta[n] + c_1 u[n] \\
h[0] = 0 \rightarrow c_1 &= 1 \\
h[n] = -\delta[n] + u[n] &= u[n-1]
\end{aligned}
$$

Resposta ao Impulso

Exercício E3.14b

Determinar a resposta ao impulso de
$y[n]-5y[n-1]+6y[n-2]=8x[n-1]-19x[n-2]$.

Solução

$$y[n+2]-5y[n+1]+6y[n]=8x[n+1]-19x[n]$$

$$Q[E]=E^2-5E+6, Q[\gamma]=\gamma^2-5\gamma+6=0 \rightarrow \gamma_1=2, \gamma_2=3$$

$$y_c[n]=c_1 2^n+c_2 3^n, h[n]=-\frac{19}{6}\delta[n]+(c_1 2^n+c_2 3^n)u[n]$$

$$h[0]=0, h[1]=8 \rightarrow c_1=\frac{3}{2}, c_2=\frac{5}{3}$$

$$h[n]=-\frac{19}{6}\delta[n]+(\frac{3}{2}2^n+\frac{5}{3}3^n)u[n]$$

Resposta ao Impulso

Exercício E3.14b

Determinar a resposta ao impulso de
$y[n] - 5y[n-1] + 6y[n-2] = 8x[n-1] - 19x[n-2]$.

Solução

$$y[n+2] - 5y[n+1] + 6y[n] = 8x[n+1] - 19x[n]$$

$$Q[E] = E^2 - 5E + 6, Q[\gamma] = \gamma^2 - 5\gamma + 6 = 0 \rightarrow \gamma_1 = 2, \gamma_2 = 3$$

$$y_c[n] = c_1 2^n + c_2 3^n, h[n] = -\frac{19}{6}\delta[n] + (c_1 2^n + c_2 3^n)u[n]$$

$$h[0] = 0, h[1] = 8 \rightarrow c_1 = \frac{3}{2}, c_2 = \frac{5}{3}$$

$$h[n] = -\frac{19}{6}\delta[n] + (\frac{3}{2}2^n + \frac{5}{3}3^n)u[n]$$

Resposta de Estado Nulo

- Um sinal discreto qualquer $x[n]$ pode ser expressado como uma combinação linear de impulsos deslocados

$$x[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\delta[n-m]$$

- Alguns exemplos

$$u[n] = \sum_{m=0}^{\infty} \delta[n-m]$$

$$\gamma^n u[n] = \sum_{m=0}^{\infty} \gamma^m \delta[n-m]$$

Resposta de Estado Nulo

- Se o sistema é linear e invariante no tempo, então:

$$
\begin{aligned}
\text{entrada} \quad &\Longrightarrow \quad \text{saída} \\
\delta[n] \quad &\Longrightarrow \quad h[n] \\
\delta[n-m] \quad &\Longrightarrow \quad h[n-m] \\
x[m]\delta[n-m] \quad &\Longrightarrow \quad x[m]h[n-m] \\
\underbrace{\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\delta[n-m]}_{x[n]} \quad &\Longrightarrow \quad \underbrace{\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]h[n-m]}_{y[n]}
\end{aligned}
$$

- $y[n]$ é a resposta de estado nulo e se deve unicamente à entrada $x[n]$

Resposta de Estado Nulo

- Define-se

$$x[n] * h[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]h[n-m]$$

- $x[n] * h[n]$ é chamado de somatório de convolução
- As propriedades do somatório de convolução são similares às da integral de convolução
- Comutatividade

$$x_1[n] * x_2[n] = x_2[n] * x_1[n]$$

- Distributividade

$$x_1[n] * (x_2[n] + x_3[n]) = x_1[n] * x_2[n] + x_1[n] * x_3[n]$$

Somatório de Convolução

- Associatividade

$$x_1[n] * (x_2[n] * x_3[n]) = (x_1[n] * x_2[n]) * x_3[n]$$

- Deslocamento

$$\begin{aligned} x_1[n] * x_2[n] &= c[n] \\ x_1[n-m] * x_2[n-p] &= c[n-m-p] \end{aligned}$$

- Convolução com o impulso

$$x[n] * \delta[n] = x[n]$$

- Largura
    - Se $x_1[n]$ tem largura W_1 e L_1 elementos e $x_2[n]$ tem largura W_2 e L_2 elementos, então $x_1[n] * x_2[n]$ tem largura $W_1 + W_2$ e $L_1 + L_2 - 1$ elementos não nulos

Somatório de Convolução

- Se $x[n]$ e $h[n]$ forem causais, então tem-se que:

$$\begin{aligned} x[m] &= 0 \text{ se } m < 0 \\ h[n-m] &= 0 \text{ se } m > n \\ y[n] &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]h[n-m] = \sum_{m=0}^{n} x[m]h[n-m] \end{aligned}$$

Somatório de Convolução

Exercício E3.15

Mostrar que $(0,8)^n u[n] * u[n] = 5[1 - (0,8)^{n+1}]u[n]$. Use o fato que

$$\sum_{k=m}^{n} r^k = \frac{r^{n+1} - r^m}{r - 1} \text{ para } r \neq 1$$

Resposta de Estado Nulo

Exemplo 3.14

Determinar a resposta de estado nulo de um sistema LDIT descrito por $y[n+2] - 0,6y[n+1] - 0,16y[n] = 5x[n+2]$ se $x[n] = 4^{-n}u[n]$.

Solução

$$
\begin{aligned}
h[n] &= [(-0,2)^n + 4(0,8)^n]u[n] \\
y[n] &= x[n] * h[n] \\
&= [-1,26(4)^{-n} + 0,444(-0,2)^n + 5,81(0,8)^n]u[n]
\end{aligned}
$$

Resposta de Estado Nulo

Exemplo 3.14

Determinar a resposta de estado nulo de um sistema LDIT descrito por $y[n+2] - 0,6y[n+1] - 0,16y[n] = 5x[n+2]$ se $x[n] = 4^{-n}u[n]$.

Solução

$$\begin{aligned} h[n] &= [(-0,2)^n + 4(0,8)^n]u[n] \\ y[n] &= x[n] * h[n] \\ &= [-1,26(4)^{-n} + 0,444(-0,2)^n + 5,81(0,8)^n]u[n] \end{aligned}$$

Função de Transferência

- Seja z^n uma exponencial com duração infinita e com parâmetro complexo z
- A resposta do sistema com resposta ao impulso $h[n]$ à entrada z^n é dada por

$$\begin{aligned} y[n] &= h[n] * z^n \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m] z^{n-m} \\ &= z^n \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m] z^{-m} = H[z] z^n \end{aligned}$$

- Sendo que,

$$H[z] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m] z^{-m}$$

Função de Transferência

- $H[z]$ é chamada de função de transferência do sistema
- $H[z]$ pode ser também definido da seguinte maneira:

$$H[z] = \frac{\text{Sinal de saída}}{\text{Sinal de entrada}}\Big|_{\text{entrada}=z^n}$$

- Um sistema LDIT pode ser escrito na forma:

$$Q[E]y[n] = P[E]x[n]$$

- Logo

$$Q[E]H[z]z^n = H[z](Q[E]z^n) = P[E]z^n$$

Função de Transferência

- Como

$$E^k z^n = z^{n+k} = z^n z^k \Rightarrow P[E]z^n = P[z]z^n \text{ e } Q[E]z^n = Q[z]z^n$$

- Logo

$$H[z] = \frac{P[z]}{Q[z]}$$

Roteiro

Estabilidade de Sistemas Discretos

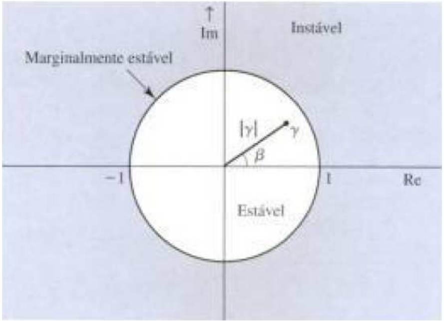
- Assim como foi feito para os sistemas contínuos, a estabilidade dos sistemas discretos pode ser avaliada segundo dois critérios
  - Estabilidade BIBO (externa)
  - Estabilidade assintótica (interna)
- Um sistema LDIT é BIBO estável se uma entrada limitada resulta sempre em uma saída limitada
- Essa condição é sempre verificada se

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < K < \infty$$

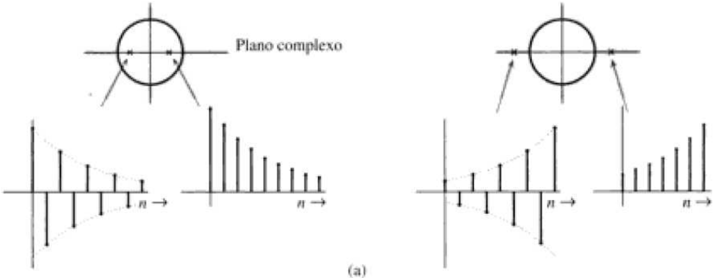
Estabilidade de Sistemas Discretos

- As condições de estabilidade assintótica para sistemas LDIT causais são análogas às dos sistemas contínuos quando se faz a correspondência entre os planos λ e γ
- Assim, um sistema LDIT é assintoticamente estável se todas as raízes γ_i estão dentro do círculo unitário
- Um sistema LDIT é assintoticamente instável se
  - Ao menos uma raiz estiver fora do círculo
  - Ou se houverem raízes repetidas no círculo
- Um sistema LDIT é marginalmente estável se não existirem raízes fora do círculo e se existirem algumas raízes não repetidas no círculo unitário

Estabilidade de Sistemas Discretos

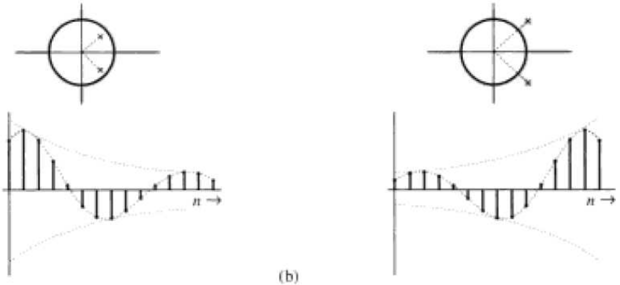


Estabilidade de Sistemas Discretos



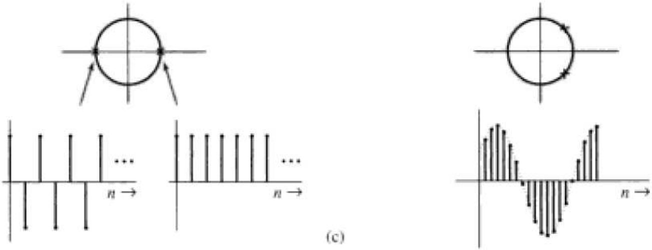
(a)

Estabilidade de Sistemas Discretos



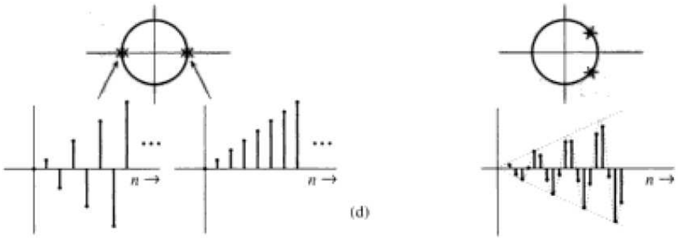
(b)

Estabilidade de Sistemas Discretos



(c)

Estabilidade de Sistemas Discretos



Estabilidade de Sistemas Discretos

- Os critérios de estabilidade estão relacionados da seguinte forma
  - Assintoticamente estável $\longrightarrow$ BIBO estável
  - Assintoticamente instável e marginalmente estável $\longrightarrow$ BIBO instável
- O inverso nem sempre é verdadeiro
  - Só quando o sistema é controlável e observável (ver tansformada Z)