Análise de Sistemas em Tempo Contínuo usando a Transformada de Laplace

Edmar José do Nascimento
(Análise de Sinais e Sistemas)
http://www.univasf.edu.br/˜edmar.nascimento

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Elétrica

Roteiro

Roteiro

Definições

- A transformada de Laplace de um sinal $x(t)$ é definida por:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt$$

- A transformada inversa de Laplace de $X(s)$ é dada por:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(s)e^{st}dt$$

- A integração na primeira expressão é de $-\infty$ a ∞
- Por essa razão, essa expressão é conhecida como transformada de Laplace Bilateral
- A transformada e sua inversa são chamados de par de transformada

Definições

- Simbolicamente, o par de transformadas é representado por:

$$X(s) = \mathcal{L}[x(t)], \quad x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)]$$

- Combinando-se estas expressões, tem-se que:

$$\mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{L}[x(t)]\} = x(t), \quad \mathcal{L}\{\mathcal{L}^{-1}[X(s)]\} = X(s)$$

- Uma representação bastante comum é dada por:

$$x(t) \Longleftrightarrow X(s)$$

Definições

- A transformada de Laplace é uma operação linear, ou seja, se

$$x_1(t) \iff X_1(s), \quad x_2(t) \iff X_2(s)$$

- Então

$$a_1x_1(t) + a_2x_2(t) \iff a_1X_1(s) + a_2X_2(s)$$

- s é uma variável complexa e a transformada pode não existir para todos os valores de s
  - Região de Convergência (RDC) é o nome da região do plano complexo para a qual a transformada de Laplace existe

Exemplo

Exemplo

Calcular a transformada de Laplace e a RDC para um sinal $x(t) = e^{-at}u(t)$

Resposta

$$X(s) = \frac{1}{s+a}, Re(s) > -a$$

Exemplo

Exemplo

Calcular a transformada de Laplace e a RDC para um sinal $x(t) = e^{-at}u(t)$

Resposta

$$X(s) = \frac{1}{s+a}, Re(s) > -a$$

Exemplo

Exemplo

Calcular a transformada de Laplace e a RDC para um sinal
$x(t) = -e^{-at}u(-t)$

Resposta

$$X(s) = \frac{1}{s+a}, Re(s) < -a$$

Exemplo

Exemplo

Calcular a transformada de Laplace e a RDC para um sinal $x(t) = -e^{-at}u(-t)$

Resposta

$$X(s) = \frac{1}{s+a}, Re(s) < -a$$

Região de Convergência

- A região de convergência é importante para a determinação da transformada de Laplace inversa
- Dois sinais diferentes podem ter a mesma transformada, mas com RDCs diferentes
- A transformada inversa é obtida calculando-se uma integral ao longo de um caminho no plano complexo
  - Procedimento complicado, pois exige conhecimentos de funções de variáveis complexas (disciplina: Métodos Matemáticos)
- O procedimento usual é utilizar uma tabela com os pares de transformadas para os sinais mais comuns

Transformada Unilateral

- Como os sinais de interesse prático são causais, define-se a Transformada de Laplace Unilateral
  - A transformada unilateral não apresenta ambigüidade
  - A correspondência entre um sinal e uma transformada é um-a-um
- A transformada de Laplace (unilateral) é definida como:

$$X(s) = \int_{0^-}^{\infty} x(t) e^{-st} dt$$

- Como a correspondência é um-a-um, geralmente se omite a RDC da transformada unilateral

Tabela dos Pares de Transformadas

$\delta(t)$	1
$u(t)$	$\frac{1}{s}$
$tu(t)$	$\frac{1}{s^2}$
$t^n u(t)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$e^{\lambda t}u(t)$	$\frac{1}{s-\lambda}$
$te^{\lambda t}u(t)$	$\frac{1}{(s-\lambda)^2}$
$t^n e^{\lambda t}u(t)$	$\frac{n!}{(s-\lambda)^{n+1}}$
$\cos bt\, u(t)$	$\frac{s}{s^2+b^2}$
$\sin bt\, u(t)$	$\frac{b}{s^2+b^2}$
$e^{-at}\cos bt\, u(t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+b^2}$
$e^{-at}\sin bt\, u(t)$	$\frac{b}{(s+a)^2+b^2}$
$re^{-at}\cos(bt+\theta)\, u(t)$	$\frac{(r\cos\theta)s+(ar\cos\theta-br\sin\theta)}{s^2+2as+(a^2+b^2)}$
$re^{-at}\cos(bt+\theta)\, u(t)$	$\frac{0.5re^{j\theta}}{s+a-jb}+\frac{0.5re^{-j\theta}}{s+a+jb}$
$re^{-at}\cos(bt+\theta)\, u(t)$	$\frac{As+B}{s^2+2as+c}$
$r=\sqrt{\frac{A^2c+B^2-2ABa}{c-a^2}},\ \theta=\tan^{-1}\frac{Aa-B}{A\sqrt{c-a^2}}$	
$b=\sqrt{c-a^2}$	
$e^{-at}\left[A\cos bt+\frac{B-Aa}{b}\sin bt\right]u(t)$	$\frac{As+B}{s^2+2as+c}$
$b=\sqrt{c-a^2}$	

Transformada Inversa

- A maioria das transformadas de interesse prático são funções racionais, ou seja:

$$X(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

- O procedimento para a obtenção da transformada inversa consiste então em:
  - Representar $X(s)$ em frações parciais
  - Aplicar os pares de transformada da tabela

Exemplo

Exemplo

Calcular a transformada de Laplace inversa de $X(s) = \frac{7s-6}{s^2-s-6}$

Solução

Deve-se primeiramente expandir $X(s)$ em frações parciais:

$$X(s) = \frac{k_1}{s+2} + \frac{k_2}{s-3}$$

$$X(s) = \frac{4}{s+2} + \frac{3}{s-3}$$

$$x(t) = (4e^{-2t} + 3e^{3t})u(t)$$

Exemplo

Exemplo

Calcular a transformada de Laplace inversa de $X(s) = \frac{7s-6}{s^2-s-6}$

Solução

Deve-se primeiramente expandir $X(s)$ em frações parciais:

$$
\begin{aligned}
X(s) &= \frac{k_1}{s+2} + \frac{k_2}{s-3} \\
X(s) &= \frac{4}{s+2} + \frac{3}{s-3} \\
x(t) &= (4e^{-2t} + 3e^{3t})u(t)
\end{aligned}
$$

Exemplo

Exemplo

Calcular a transformada de Laplace inversa de $X(s) = \frac{2s^2+5}{s^2+3s+2}$

Solução

Deve-se primeiramente expandir $X(s)$ em frações parciais:

$$
\begin{aligned}
X(s) &= 2 + \frac{k_1}{s+1} + \frac{k_2}{s+2} \\
X(s) &= 2 + \frac{7}{s+1} - \frac{13}{s+2} \\
x(t) &= 2\delta(t) + (7e^{-t} - 13e^{-2t})u(t)
\end{aligned}
$$

Exemplo

Exemplo

Calcular a transformada de Laplace inversa de $X(s) = \frac{2s^2+5}{s^2+3s+2}$

Solução

Deve-se primeiramente expandir $X(s)$ em frações parciais:

$$
\begin{aligned}
X(s) &= 2 + \frac{k_1}{s+1} + \frac{k_2}{s+2} \\
X(s) &= 2 + \frac{7}{s+1} - \frac{13}{s+2} \\
x(t) &= 2\delta(t) + (7e^{-t} - 13e^{-2t})u(t)
\end{aligned}
$$

Exemplo

Exemplo

Calcular a transformada de Laplace inversa de
$X(s) = \frac{6(s+34)}{s(s^2+10s+34)}$

Solução

Deve-se primeiramente expandir $X(s)$ em frações parciais:

$$
\begin{aligned}
X(s) &= \frac{k_1}{s} + \frac{k_2}{s+5-j3} + \frac{k_2^*}{s+5+j3} \\
X(s) &= \frac{6}{s} + \frac{-3+j4}{s+5-j3} + \frac{-3-j4}{s+5+j3} \\
X(s) &= \frac{6}{s} + \frac{5e^{j126,9^o}}{s+5-j3} + \frac{5e^{-j126,9^o}}{s+5+j3} \\
x(t) &= [6 + 10e^{-5t}\cos(3t + 126,9^o)]u(t)
\end{aligned}
$$

Exemplo

Exemplo

Calcular a transformada de Laplace inversa de
$X(s) = \frac{6(s+34)}{s(s^2+10s+34)}$

Solução

Deve-se primeiramente expandir $X(s)$ em frações parciais:

$$\begin{aligned}
X(s) &= \frac{k_1}{s} + \frac{k_2}{s+5-j3} + \frac{k_2^*}{s+5+j3} \\
X(s) &= \frac{6}{s} + \frac{-3+j4}{s+5-j3} + \frac{-3-j4}{s+5+j3} \\
X(s) &= \frac{6}{s} + \frac{5e^{j126,9^o}}{s+5-j3} + \frac{5e^{-j126,9^o}}{s+5+j3} \\
x(t) &= [6 + 10e^{-5t}\cos(3t + 126,9^o)]u(t)
\end{aligned}$$

Exemplo

Exemplo

Calcular a transformada de Laplace inversa de
$X(s) = \frac{8s+10}{(s+1)(s+2)^3}$

Solução

Deve-se primeiramente expandir $X(s)$ em frações parciais:

$$
\begin{aligned}
X(s) &= \frac{k_1}{s+1} + \frac{a_0}{(s+2)^3} + \frac{a_1}{(s+2)^2} + \frac{a_2}{s+2} \\
X(s) &= \frac{2}{s+1} + \frac{6}{(s+2)^3} - \frac{2}{(s+2)^2} - \frac{2}{s+2} \\
x(t) &= [2e^{-t} + (3t^2 - 2t - 2)e^{-2t}]u(t)
\end{aligned}
$$

Exemplo

Exemplo

Calcular a transformada de Laplace inversa de
$X(s) = \frac{8s+10}{(s+1)(s+2)^3}$

Solução

Deve-se primeiramente expandir $X(s)$ em frações parciais:

$$
\begin{aligned}
X(s) &= \frac{k_1}{s+1} + \frac{a_0}{(s+2)^3} + \frac{a_1}{(s+2)^2} + \frac{a_2}{s+2} \\
X(s) &= \frac{2}{s+1} + \frac{6}{(s+2)^3} - \frac{2}{(s+2)^2} - \frac{2}{s+2} \\
x(t) &= [2e^{-t} + (3t^2 - 2t - 2)e^{-2t}]u(t)
\end{aligned}
$$

Roteiro

Propriedades da Transformada de Laplace

- As transformadas que não estão tabeladas podem ser calculadas com o auxílio de algumas propriedades
- Linearidade

$$\begin{aligned} \text{se } x_1(t) &\iff X_1(s) \text{ e } x_2(t) \iff X_2(s) \\ \text{então } a_1x_1(t) + a_2x_2(t) &\iff a_1X_1(s) + a_2X_2(s) \end{aligned}$$

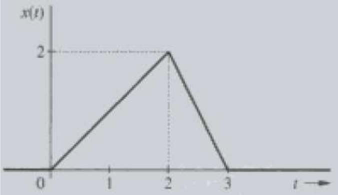
- Deslocamento no tempo

$$\begin{aligned} \text{se } x(t) &\iff X(s) \\ \text{então } x(t - t_0) &\iff X(s)e^{-st_0} \ (t_0 \geq 0) \end{aligned}$$

Exemplo

Exercício E4.3

Determinar a transformada de Laplace do sinal $x(t)$ dado por



Exemplo

Solução exercício E4.3

$$
\begin{aligned}
x(t) &= t[u(t)-u(t-2)]+(-2t+6)[u(t-2)-u(t-3)] \\
&= -3(t-2)u(t-2)+tu(t)+2(t-3)u(t-3) \\
tu(t) &\Longleftrightarrow \frac{1}{s^2} \\
X(s) &= (1+2e^{-3s}-3e^{-2s})\frac{1}{s^2}
\end{aligned}
$$

Propriedades da Transformada de Laplace

- Deslocamento em frequência

$$\begin{aligned} \text{se } x(t) &\Longleftrightarrow X(s) \\ \text{então } x(t)e^{s_0 t} &\Longleftrightarrow X(s - s_0) \end{aligned}$$

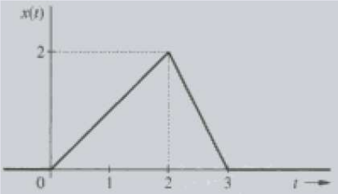
- Diferenciação no tempo

$$\begin{aligned} \text{se } x(t) &\Longleftrightarrow X(s) \\ \text{então } \frac{dx(t)}{dt} &\Longleftrightarrow sX(s) - x(0^-) \\ \frac{d^2x(t)}{dt^2} &\Longleftrightarrow s^2X(s) - sx(0^-) - \dot{x}(0^-) \\ \frac{d^nx(t)}{dt^n} &\Longleftrightarrow s^nX(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k}x^{(k-1)}(0^-) \end{aligned}$$

Exemplo

Exemplo 4.7

Determinar a transformada de Laplace do sinal $x(t)$ usando as propriedades de diferenciação no tempo e de deslocamento no tempo



Exemplo

Solução exemplo 4.7

$$
\begin{aligned}
x(t) &= -3(t-2)u(t-2) + tu(t) + 2(t-3)u(t-3) \\
\frac{dx(t)}{dt} &= -3u(t-2) + u(t) + 2u(t-3) \\
\frac{d^2x(t)}{dt^2} &= -3\delta(t-2) + \delta(t) + 2\delta(t-3) \\
\mathcal{L}\left\{\frac{d^2x(t)}{dt^2}\right\} &= \mathcal{L}\left\{-3\delta(t-2) + \delta(t) + 2\delta(t-3)\right\} \\
s^2X(s) &- sx(0^-) - \dot{x}(0^-) = 1 - 3e^{-2s} + 2e^{-3s} \\
X(s) &= (1 + 2e^{-3s} - 3e^{-2s})\frac{1}{s^2}
\end{aligned}
$$

Propriedades da Transformada de Laplace

- Diferenciação na frequência

$$\begin{aligned} \text{se } x(t) &\iff X(s) \\ \text{então } tx(t) &\iff -\frac{dX(s)}{ds} \end{aligned}$$

- Integração no tempo

$$\begin{aligned} \text{se } x(t) &\iff X(s) \\ \text{então } \int_{0^-}^{t} x(\tau)d\tau &\iff \frac{X(s)}{s} \\ \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau &\iff \frac{X(s)}{s} + \frac{\int_{-\infty}^{0^-} x(\tau)d\tau}{s} \end{aligned}$$

Propriedades da Transformada de Laplace

- Escalonamento

$$
\begin{aligned}
\text{se } x(t) &\iff X(s)\\
\text{então } x(at) &\iff \frac{1}{a}X\left(\frac{s}{a}\right)
\end{aligned}
$$

- Convolução no tempo e na frequência

$$
\begin{aligned}
\text{se } x_1(t) &\iff X_1(s) \text{ e } x_2(t) \iff X_2(s)\\
\text{então } x_1(t) * x_2(t) &\iff X_1(s)X_2(s)\\
x_1(t)x_2(t) &\iff \frac{1}{2\pi j}[X_1(s) * X_2(s)]
\end{aligned}
$$

Exemplo

Exemplo 4.8

Usando a propriedade da convolução, determine $c(t) = e^{at}u(t) * e^{bt}u(t)$.

Solução exemplo 4.8

$$
\begin{aligned}
C(s) &= \mathcal{L}\{e^{at}u(t)\}\mathcal{L}\{e^{bt}u(t)\} = \frac{1}{s-a}.\frac{1}{s-b} = \frac{1}{(s-a)(s-b)} \\
C(s) &= \frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s-b}\right) \Longleftrightarrow c(t) = \frac{(e^{at} - e^{bt})u(t)}{a-b}
\end{aligned}
$$

Exemplo

Exemplo 4.8

Usando a propriedade da convolução, determine
$c(t) = e^{at}u(t) * e^{bt}u(t)$.

Solução exemplo 4.8

$$
\begin{aligned}
C(s) &= \mathcal{L}\{e^{at}u(t)\}\mathcal{L}\{e^{bt}u(t)\} = \frac{1}{s-a}.\frac{1}{s-b} = \frac{1}{(s-a)(s-b)} \\
C(s) &= \frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s-b}\right) \Longleftrightarrow c(t) = \frac{(e^{at} - e^{bt})u(t)}{a-b}
\end{aligned}
$$

Propriedades da Transformada de Laplace

- Aplicação da convolução em sistemas lineares

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau = \mathcal{L}\{h(t)\}$$

- Ou seja, a função de transferência $H(s)$ é a transformada de Laplace da resposta ao impulso $h(t)$
- Para a resposta de estado nulo, tem-se

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) * h(t) \Longleftrightarrow Y(s) = X(s)H(s) \\ H(s) &= \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\mathcal{L}[\text{resp. estado nulo}]}{\mathcal{L}[\text{entrada}]} \end{aligned}$$

Propriedades da Transformada de Laplace

- Teorema do valor inicial
  - O objetivo é conhecer o valor inicial de $x(t)$ a partir de $X(s)$
  - Se $x(t)$ e $dx(t)/dt$ possuem transformada de Laplace, então

$$x(0^+) = \lim_{s\to\infty} sX(s)$$

  - Esse teorema se aplica se $X(s)$ for estritamente própria $(M < N)$

Propriedades da Transformada de Laplace

- Teorema do valor final
  - O objetivo é conhecer o valor final de $x(t)$ a partir de $X(s)$
  - Se $x(t)$ e $dx(t)/dt$ possuem transformada de Laplace, então

$$x(\infty) = \lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} sX(s)$$

  - Esse teorema se aplica se os pólos de $X(s)$ estiverem no SPE (incluindo também o pólo $s = 0$)

Exemplo

Exemplo 4.9

Determinar os valores inicial e final de $y(t)$ se $Y(s)$ é dado por

$$Y(s) = \frac{10(2s+3)}{s(s^2+2s+5)}$$

Solução exemplo 4.9

$$\begin{aligned} y(0^+) &= \lim_{s\to\infty} sY(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{10(2s+3)}{(s^2+2s+5)} = \frac{20}{\infty} = 0 \\ y(\infty) &= \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} \frac{10(2s+3)}{(s^2+2s+5)} = \frac{30}{5} = 6 \\ y(t) &= 6u(t) + \sqrt{85}e^{-t}\cos(2t + 229,398^o)u(t) \end{aligned}$$

Exemplo

Exemplo 4.9

Determinar os valores inicial e final de $y(t)$ se $Y(s)$ é dado por

$$Y(s) = \frac{10(2s+3)}{s(s^2+2s+5)}$$

Solução exemplo 4.9

$$\begin{aligned}
y(0^+) &= \lim_{s\to\infty} sY(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{10(2s+3)}{(s^2+2s+5)} = \frac{20}{\infty} = 0 \\
y(\infty) &= \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} \frac{10(2s+3)}{(s^2+2s+5)} = \frac{30}{5} = 6 \\
y(t) &= 6u(t) + \sqrt{85}e^{-t}\cos(2t + 229,398^o)u(t)
\end{aligned}$$

Roteiro

Solução de Equações Diferenciais

- Vimos que

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \iff s^n X(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k} x^{(k-1)}(0^-)$$

- Além disso, a transformada de Laplace é uma operação linear de modo que

$$\sum_k a_k x_k(t) \iff \sum_k a_k X_k(s)$$

- Usando essas duas propriedades é possível resolver uma equação diferencial usando a transformada de Laplace

Exemplo

Exercício E4.6

Resolver

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) \quad = \quad 2\frac{dx(t)}{dt} + x(t)$$

para a entrada $x(t) = u(t)$ com $y(0^-) = 1$ e $\dot{y}(0^-) = 2$.

Solução exercício E4.6

$$\begin{aligned} y(t) &\iff Y(s) \\ \frac{dy(t)}{dt} &\iff sY(s) - y(0^-) = sY(s) - 1 \\ \frac{d^2y(t)}{dt^2} &\iff s^2Y(s) - sy(0^-) - \dot{y}(0^-) = s^2Y(s) - s - 2 \end{aligned}$$

Exemplo

Exercício E4.6

Resolver

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) \quad = \quad 2\frac{dx(t)}{dt} + x(t)$$

para a entrada $x(t) = u(t)$ com $y(0^-) = 1$ e $\dot{y}(0^-) = 2$.

Solução exercício E4.6

$$\begin{aligned}
y(t) &\iff Y(s) \\
\frac{dy(t)}{dt} &\iff sY(s) - y(0^-) = sY(s) - 1 \\
\frac{d^2y(t)}{dt^2} &\iff s^2Y(s) - sy(0^-) - \dot{y}(0^-) = s^2Y(s) - s - 2
\end{aligned}$$

Exemplo

Solução exercício E4.6

$$x(t) = u(t) \iff X(s) = \frac{1}{s}$$
$$\frac{dx(t)}{dt} \iff sX(s) - x(0^-) = sX(s) = 1$$

Logo, temos que:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2y(t)}{dt^2}\right\} + 4\mathcal{L}\left\{\frac{dy(t)}{dt}\right\} + 3\mathcal{L}\left\{y(t)\right\} = 2\mathcal{L}\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} + \mathcal{L}\left\{x(t)\right\}$$
$$s^2Y(s) - s - 2 + 4(sY(s) - 1) + 3Y(s) = 2.1 + \frac{1}{s}$$
$$(s^2 + 4s + 3)Y(s) = \frac{s^2 + 8s + 1}{s}$$

Exemplo

Solução exercício E4.6

$$
\begin{aligned}
Y(s) &= \frac{s^2+8s+1}{s(s^2+4s+3)} = \frac{s^2+8s+1}{s(s+1)(s+3)} \\
Y(s) &= \frac{k_1}{s} + \frac{k_2}{s+1} + \frac{k_3}{s+3} \\
Y(s) &= \frac{1}{3}.\frac{1}{s} + 3.\frac{1}{s+1} - \frac{7}{3}.\frac{1}{s+3} \\
y(t) &= \frac{1}{3}u(t) + 3e^{-t}u(t) - \frac{7}{3}e^{-3t}u(t) \\
y(t) &= \frac{1}{3}(1 + 9e^{-t} - 7e^{-3t})u(t)
\end{aligned}
$$

Solução de Equações Diferenciais

- É possível separar as componentes de entrada nula e de estado nulo na solução total
- Os termos da resposta de entrada nula dependem apenas das condições iniciais
- Os termos da resposta de estado nulo dependem apenas da entrada $x(t)$
- No exemplo anterior, a partir da aplicação da transformada de Laplace obteve-se

$$s^2Y(s) - s - 2 + 4(sY(s) - 1) + 3Y(s) = 2 + \frac{1}{s}$$

Solução de Equações Diferenciais

- Essa equação algébrica pode ser escrita como

$$(s^2 + 4s + 3)Y(s) = \underbrace{(s+6)}_{\text{cond. iniciais}} + \underbrace{2 + \frac{1}{s}}_{\text{entrada}}$$

- Assim,

$$Y(s) = \underbrace{\frac{s+6}{s^2+4s+3}}_{\text{comp. entrada nula}} + \underbrace{\frac{2s+1}{s(s^2+4s+3)}}_{\text{comp. estado nulo}}$$

Solução de Equações Diferenciais

- A expansão em frações parciais resulta em

$$\frac{s+6}{s^2+4s+3} = \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{s+1} - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{s+3}$$
$$\frac{2s+1}{s(s^2+4s+3)} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{s} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+1} - \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{s+3}$$

- Finalmente, tem-se

$$y(t) = \underbrace{\frac{1}{2}(5e^{-t} - 3e^{-3t})u(t)}_{\text{resp. entrada nula}} + \underbrace{\frac{1}{6}(2 + 3e^{-t} - 5e^{-3t})u(t)}_{\text{resp. estado nulo}}$$

Roteiro

Resposta de Estado Nulo

- Vimos que um sistema LCIT de ordem N pode ser escrito como

$$\begin{aligned} Q(D)y(t) &= P(D)x(t) \\ Q(D) &= D^N + a_1 D^{N-1} + \cdots a_{N-1} D + a_N \\ P(D) &= b_0 D^N + b_1 D^{N-1} + \cdots + b_{N-1} D + b_N \end{aligned}$$

- Quando o estado é nulo, tem-se que:

$$y(0^-) = \dot{y}(0^-) = \cdots = y^{(N-1)}(0^-) = 0$$

- Se $x(t)$ for causal, então:

$$x(0^-) = \dot{x}(0^-) = \cdots = x^{(N-1)}(0^-) = 0$$

Resposta de Estado Nulo

- Sendo assim, tem-se que:

$$D^r y(t) = \frac{d^r}{dt^r} y(t) \quad \Longleftrightarrow \quad s^r Y(s)$$
$$D^k x(t) = \frac{d^k}{dt^k} x(t) \quad \Longleftrightarrow \quad s^k X(s)$$

- Logo a transformada de Laplace da equação do sistema é dada por

$$\begin{aligned} (\quad s^N & + a_1 s^{N-1} + \cdots a_{N-1} s + a_N) Y(s) \\ = & \ (b_0 s^N + b_1 s^{N-1} + \cdots + b_{N-1} s + b_N) X(s) \end{aligned}$$

Resposta de Estado Nulo

$$
\begin{aligned}
Y(s) &= \frac{(b_0 s^N + b_1 s^{N-1} + \cdots + b_{N-1} s + b_N)}{(s^N + a_1 s^{N-1} + \cdots a_{N-1} s + a_N)} X(s) \\
&= \frac{P(s)}{Q(s)} X(s) = H(s) X(s) \\
H(s) &= \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{P(s)}{Q(s)}
\end{aligned}
$$

- As raízes do denominador de $H(s)$ são chamadas de pólos do sistema
- As raízes do numerador de $H(s)$ são chamadas de zéros do sistema

Exemplo

Exemplo 4.12

Determinar a resposta $y(t)$ para o sistema

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 5\frac{dy(t)}{dt} + 6y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + x(t)$$

se $x(t) = 3e^{-5t}u(t)$ com todas as condições iniciais nulas.

Solução exemplo 4.12

$$H(s) = \frac{s+1}{s^2+5s+6}$$

Exemplo

Exemplo 4.12

Determinar a resposta $y(t)$ para o sistema

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 5\frac{dy(t)}{dt} + 6y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + x(t)$$

se $x(t) = 3e^{-5t}u(t)$ com todas as condições iniciais nulas.

Solução exemplo 4.12

$$H(s) = \frac{s+1}{s^2+5s+6}$$

Exemplo

Solução exemplo 4.12

$$
\begin{aligned}
Y(s) &= H(s)X(s) = \frac{s+1}{s^2+5s+6} \cdot \frac{3}{s+5} \\
Y(s) &= \frac{3(s+1)}{(s+2)(s+3)(s+5)} \\
Y(s) &= -\frac{1}{s+2} + 3.\frac{1}{s+3} - 2.\frac{1}{s+5} \\
y(t) &= (3e^{-3t} - e^{-2t} - 2e^{-5t})u(t)
\end{aligned}
$$

Exemplo

Exercício E4.7

Para um sistema LIT com função de transferência

$$H(s) = \frac{s+5}{s^2+4s+3}$$

1. Dê a equação diferencial que relaciona a entrada e a saída.
2. Determine $y(t)$ se $x(t) = e^{-2t}u(t)$ e o sistema estiver em estado nulo.

Exemplo

Solução exercício E4.7

$$Y(s) = H(s)X(s) = \frac{s+5}{s^2+4s+3}X(s)$$
$$(s^2+4s+3)Y(s) = (s+5)X(s)$$
$$s^2Y(s) + 4sY(s) + 3Y(s) = sX(s) + 5X(s)$$
$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 5x(t)$$
$$X(s) = \frac{1}{s+2} \implies Y(s) = \frac{s+5}{(s+2)(s^2+4s+3)}$$
$$y(t) = (2e^{-t} - 3e^{-2t} + e^{-3t})u(t)$$

Roteiro

Estabilidade de Sistemas Contínuos

- A estabilidade de um sistema linear pode ser analisada segundo os critérios
  - BIBO (estabilidade externa)
  - Assintótica (estabilidade interna)
- A estabilidade BIBO pode ser determinada a partir da análise dos pólos da função de transferência do sistema
- A estabilidade assintótica pode ser determinada a partir das raízes do polinômio $Q(s)$

Estabilidade BIBO

- Dois casos podem ser analisados
- 1^{o} caso: $M > N$
  - $H(s)$ pode ser escrita como $H(s) = R(s) + H'(s)$, em que $R(s)$ é um polinômio de ordem $M - N$
  - A ação de $R(s)$ é a de um diferenciador de ordem $M - N$ e portanto o sistema é BIBO instável
- 2^{o} caso: $M \leq N$
  - O sistema é BIBO estável se todos os pólos de $H(s)$ estão no semi plano esquerdo (SPE)
  - Caso contrário, o sistema é BIBO instável

Estabilidade Assintótica

- A estabilidade assintótica é determinada a partir das raízes de $Q(s)$ ou a partir dos pólos de $H(s)$, se $P(s)$ e $Q(s)$ não possuírem fatores em comum (cancelamento de pólos)
  - O sistema é assintoticamente estável se todas as raízes estão no SPE
  - O sistema é assintoticamente instável se ao menos uma raiz estiver no SPD ou se existirem raízes repetidas no eixo imaginário
  - O sistema é marginalmente estável se não existirem raízes no SPD e existirem uma ou mais raízes não repetidas sobre o eixo imaginário

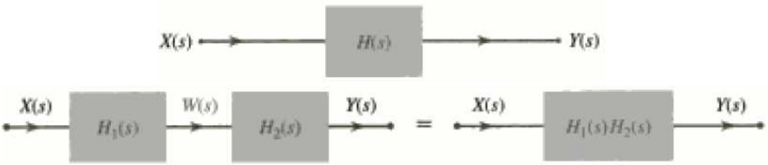
Roteiro

Diagramas de Bloco

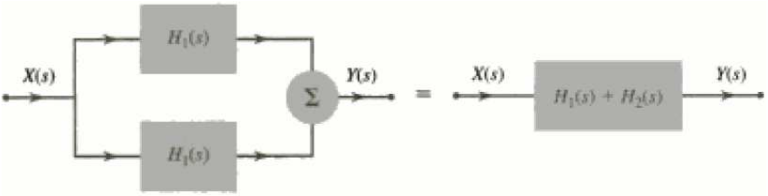
- Sistemas complexos podem ser representados através da interconexão de subsistemas
- Cada subsistema é representado por sua função de transferência
- Os tipos elementares de interconexão de subsistemas são:
  - Cascata (série)
  - Paralelo
  - Realimentação (feedback)

Diagramas de Bloco

- Interconexão em série

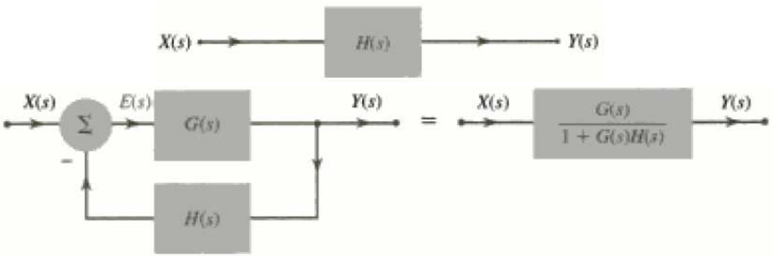


- Interconexão em paralelo



Diagramas de Bloco

- Interconexão com realimentação



- Alguns blocos elementares podem ser usados para construir (realizar) funções de transferências complexas
  - Atrasador ideal: $H(s) = e^{-sT}$
  - Diferenciador ideal: $H(s) = s$
  - Integrador ideal: $H(s) = \frac{1}{s}$

Roteiro

Transformada de Laplace Bilateral

- Vimos que para sinais não causais, o par de transformadas de Laplace é definido como

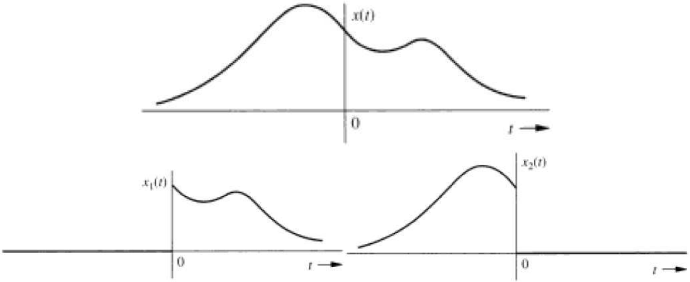
$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt, \quad x(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(s)e^{st}dt$$

- Vimos também que a transformada bilateral não é única, já que

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-at}u(t) \Longleftrightarrow X(s) = \frac{1}{s+a}, Re(s) > -a \\ x(t) &= -e^{-at}u(-t) \Longleftrightarrow X(s) = \frac{1}{s+a}, Re(s) < -a \end{aligned}$$

Transformada de Laplace Bilateral

- A transformada de Laplace bilateral pode ser calculada diretamente pela definição ou através de um procedimento que usa a tabela de transformadas unilaterais
- Um sinal não causal $x(t)$ pode ser decomposto na soma de um sinal causal $x_1(t)$ e de um sinal anticausal $x_2(t)$



Transformada de Laplace Bilateral

- Com essa decomposição, tem-se que:

$$\begin{aligned} X(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt \\ &= \int_{-\infty}^{0^-} x_2(t)e^{-st}dt + \int_{0^-}^{\infty} x_1(t)e^{-st}dt = X_2(s) + X_1(s) \end{aligned}$$

- $X_1(s)$ é a transformada unilateral de $x_1(t)$ e portanto, pode ser obtida a partir de uma tabela

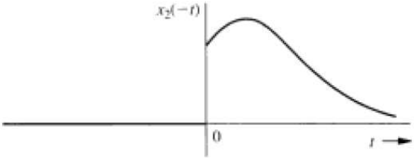
$$\begin{aligned} X_2(s) &= \int_{-\infty}^{0^-} x_2(t)e^{-st}dt = -\int_{\infty}^{0^+} x_2(-u)e^{su}du \\ &= \int_{0^+}^{\infty} x_2(-t)e^{st}dt \end{aligned}$$

Transformada de Laplace Bilateral

- Então

$$X_2(-s) \;=\; \int_{0^+}^{\infty} x_2(-t)e^{-st}dt = \int_{0^-}^{\infty} x_2(-t)e^{-st}dt$$

- Ou seja, $X_2(-s)$ é a transformada unilateral de $x_2(-t)$ e portanto, pode ser obtida a partir de uma tabela

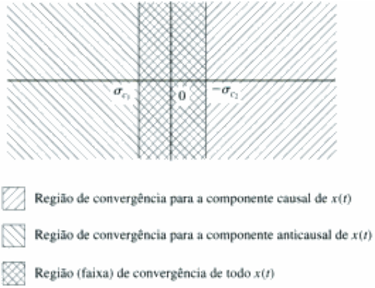


Transformada de Laplace Bilateral

- O procedimento para se obter a transformada de Laplace bilateral é o seguinte
  1. Dividir $x(t)$ em $x_1(t)$(causal) e $x_2(t)$(anticausal)
  2. Determinar $X_1(s) \Longleftrightarrow x_1(t)$
  3. Determinar $X_2(s)$ calculando $x_2(-t) \Longleftrightarrow X_2(-s)$ e em seguida trocando s por $-s$
  4. Fazer $X(s) = X_1(s) + X_2(s)$
- A RDC de um sinal causal é da forma $Re\{s\} > \sigma$, sendo assim
  - $X_1(s)$ tem RDC $Re\{s\} > \sigma_{c_1}$
  - $X_2(-s)$ tem RDC $Re\{s\} > \sigma_{c_2}$

Transformada de Laplace Bilateral

- Assim,
  - $X_2(s)$ tem RDC $Re\{s\} < -\sigma_{c_2}$
  - $X(s) = X_1(s) + X_2(s)$ tem RDC $\sigma_{c_1} < Re\{s\} < -\sigma_{c_2}$
- Os pólos de $X_1(s)$ estão localizados à esquerda da RDC
- Os pólos de $X_2(s)$ estão localizados à direita da RDC



Exemplo

Exemplo

Determinar a transformada de Laplace bilateral de
$x(t) = e^{bt}u(-t) + e^{at}u(t)$

Solução exemplo

$$
\begin{aligned}
x_1(t) &= e^{at}u(t) \Longleftrightarrow X_1(s) = \frac{1}{s-a}, \quad Re\{s\} > a \\
x_2(t) &= e^{-bt}u(t) \Longleftrightarrow X_2(-s) = \frac{1}{s+b}, \quad Re\{s\} > -b \\
X_2(s) &= -\frac{1}{s-b}, \quad Re\{s\} < b \\
X(s) &= \frac{a-b}{(s-a)(s-b)}, \quad a < Re\{s\} < b
\end{aligned}
$$

Exemplo

Exemplo

Determinar a transformada de Laplace bilateral de
$x(t) = e^{bt}u(-t) + e^{at}u(t)$

Solução exemplo

$$
\begin{aligned}
x_1(t) &= e^{at}u(t) \Longleftrightarrow X_1(s) = \frac{1}{s-a}, \quad Re\{s\} > a \\
x_2(t) &= e^{-bt}u(t) \Longleftrightarrow X_2(-s) = \frac{1}{s+b}, \quad Re\{s\} > -b \\
X_2(s) &= -\frac{1}{s-b}, \quad Re\{s\} < b \\
X(s) &= \frac{a-b}{(s-a)(s-b)}, \quad a < Re\{s\} < b
\end{aligned}
$$

Exemplo

Exemplo 4.28

Determinar a transformada de Laplace bilateral inversa de

$$X(s) = \frac{-3}{(s+2)(s-1)}$$

se a RDC for

1. $-2 < Re\{s\} < 1$
2. $Re\{s\} > 1$
3. $Re\{s\} < -2$

Exemplo

Solução exemplo 4.28

$$X(s) = \frac{-3}{(s+2)(s-1)} = \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s-1}$$

1. $x(t) = e^{-2t}u(t) + e^{t}u(-t)$
2. $x(t) = (e^{-2t} + e^{t})u(t)$
3. $x(t) = (e^{t} - e^{-2t})u(-t)$

Propriedades da Transformada Bilateral

- As propriedades da transformada de Laplace bilateral são semelhantes às da unilateral
- Deve-se, contudo, prestar atenção à RDC
- Linearidade

$$\begin{aligned} \text{se } x_1(t) &\iff X_1(s) \text{ e } x_2(t) \iff X_2(s) \\ \text{então } a_1x_1(t) + a_2x_2(t) &\iff a_1X_1(s) + a_2X_2(s) \end{aligned}$$

  - A RDC de $a_1X_1(s) + a_2X_2(s)$ é a intersecção das RDCs de $X_1(s)$ e $X_2(s)$

Propriedades da Transformada Bilateral

- Deslocamento no tempo

$$x(t - t_0) \quad \Longleftrightarrow \quad X(s)e^{-st_0}$$

  - A RDC de $X(s)e^{-st_0}$ é idêntica à RDC de $X(s)$

- Deslocamento em frequência

$$\begin{aligned} \text{se } x(t) \quad &\Longleftrightarrow \quad X(s), \quad a < Re\{s\} < b \\ \text{então } x(t)e^{s_0 t} \quad &\Longleftrightarrow \quad X(s - s_0) \end{aligned}$$

  - A RDC de $X(s - s_0)$ é $a + c < Re\{s\} < b + c$, com $c = Re\{s_0\}$

Propriedades da Transformada Bilateral

- Convolução no tempo

$$\begin{aligned} \text{se } x_1(t) &\Longleftrightarrow X_1(s) \text{ e } x_2(t) \Longleftrightarrow X_2(s) \\ \text{então } x_1(t) * x_2(t) &\Longleftrightarrow X_1(s)X_2(s) \end{aligned}$$

  - A RDC de $X_1(s)X_2(s)$ é a intersecção das RDCs de $X_1(s)$ e $X_2(s)$

- Reversão no tempo

$$\begin{aligned} \text{se } x(t) &\Longleftrightarrow X(s), \quad a < Re\{s\} < b \\ \text{então } x(-t) &\Longleftrightarrow X(-s) \end{aligned}$$

  - A RDC de $X(-s)$ é $-b < Re\{s\} < -a$

Transformada de Laplace Bilateral

- A transformada de Laplace bilateral pode ser utilizada para analisar sistemas LCIT não causais ou quando a entrada é não causal
- Desde que a RDC de $X(s)H(s)$ exista, pode-se calcular

$$y(t) = \mathcal{L}\{X(s)H(s)\}$$

Exemplo

Exemplo 4.30

Determinar a resposta $y(t)$ para um sistema LCIT não causal cuja função de transferência é dada por

$$H(s) = \frac{-1}{s-1}, \quad Re\{s\} < 1$$

para a entrada $x(t) = e^{-2t}u(t)$

Exemplo

Solução exemplo 4.30

$$\begin{aligned}
x(t) &= e^{-2t}u(t) \Longleftrightarrow X(s) = \frac{1}{s+2}, \quad Re\{s\} > -2 \\
Y(s) &= X(s)H(s) = \frac{-1}{(s-1)(s+2)}, \quad -2 < Re\{s\} < 1 \\
Y(s) &= \frac{-1/3}{s-1} + \frac{1/3}{s+2}, \quad -2 < Re\{s\} < 1 \\
y(t) &= \frac{1}{3}[e^{t}u(-t) + e^{-2t}u(t)]
\end{aligned}$$

Exemplo

Exemplo 4.31

Determinar a resposta $y(t)$ para um sistema LCIT cuja função de transferência é dada por

$$H(s) = \frac{1}{s+5}, \quad Re\{s\} > -5$$

para a entrada $x(t) = e^{-t}u(t) + e^{-2t}u(-t)$

Exemplo

Solução exemplo 4.31

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \underbrace{e^{-t}u(t)}_{x_1(t)} + \underbrace{e^{-2t}u(-t)}_{x_2(t)} \\
x_1(t) &= e^{-t}u(t) \Longleftrightarrow X_1(s) = \frac{1}{s+1}, \quad Re\{s\} > -1 \\
x_2(t) &= e^{-2t}u(-t) \Longleftrightarrow X_2(s) = \frac{-1}{s+2}, \quad Re\{s\} < -2
\end{aligned}
$$

Como $X_1(s)$ e $X_2(s)$ não possuem uma RDC comum, a resposta deve ser obtida separadamente

Exemplo

Solução exemplo 4.31

$$
\begin{aligned}
y(t) &= [x_1(t) + x_2(t)] * h(t) = x_1(t) * h(t) + x_2(t) * h(t) \\
&= y_1(t) + y_2(t) \Longleftrightarrow Y_1(s) + Y_2(s) \\
Y_1(s) &= X_1(s)H(s) = \frac{1}{(s+1)(s+5)} \\
&= \frac{1/4}{s+1} - \frac{1/4}{s+5}, \quad Re\{s\} > -1 \\
y_1(t) &= \frac{1}{4}(e^{-t} - e^{-5t})u(t)
\end{aligned}
$$

Exemplo

Solução exemplo 4.31

$$
\begin{aligned}
Y_2(s) &= X_2(s)H(s) = \frac{-1}{(s+2)(s+5)} \\
&= \frac{-1/3}{s+2} + \frac{1/3}{s+5}, \quad -5 < Re\{s\} < -2 \\
y_2(t) &= \frac{1}{3}[e^{-5t}u(t) + e^{-2t}u(-t)] \\
y(t) &= y_1(t) + y_2(t) = \frac{1}{3}e^{-2t}u(-t) + (\frac{e^{-t}}{4} + \frac{e^{-5t}}{12})u(t)
\end{aligned}
$$

Roteiro

Resposta em Frequência

- A resposta em frequência consiste na análise da resposta de um sistema a senóides cuja frequência varia de 0 a ∞
- A resposta em frequência é essencial no desenvolvimento de filtros
- Vimos que para um sistema LCIT, tem-se que:

$$e^{st} \quad \Longrightarrow \quad H(s)e^{st}$$

- Fazendo $s = j\omega$

$$\begin{aligned} e^{j\omega t} \quad &\Longrightarrow \quad H(j\omega)e^{j\omega t} \\ Re\{e^{j\omega t}\} = \cos\omega t \quad &\Longrightarrow \quad Re\{H(j\omega)e^{j\omega t}\} \end{aligned}$$

Resposta em Frequência

- Como

$$H(j\omega) = |H(j\omega)|e^{j\angle H(j\omega)}$$

- Tem-se que

$$\cos\omega t \implies |H(j\omega)|\cos\left(\omega t + \angle H(j\omega)\right)$$

- Sendo assim, a saída $y(t)$ para uma entrada $x(t) = \cos\omega t$ é dada por

$$y(t) = |H(j\omega)|\cos\left(\omega t + \angle H(j\omega)\right)$$

- Para $x(t) = \cos\omega t + \theta$, $y(t)$ é dado por

$$y(t) = |H(j\omega)|\cos\left(\omega t + \theta + \angle H(j\omega)\right)$$

Resposta em Frequência

- $H(j\omega)$ só pode ser calculado se $s = j\omega$ estiver na RDC de $H(s)$, ou seja, o sistema deve ser BIBO estável
- A amplitude da senóide de saída é amplificada ou atenuada por $|H(j\omega)|$
- A fase da senóide de saída é deslocada por $\angle H(j\omega)$
- O gráfico de $|H(j\omega)|$ versus ω é chamado de resposta de amplitude
- O gráfico de $\angle H(j\omega)$ versus ω é chamado de resposta de fase
- A resposta em frequência de um sistema consiste nas respostas de amplitude e de fase

Exemplo

Exemplo 4.23

Determinar a resposta em frequência de um sistema LCIT causal cuja função de transferência é dada por:

$$H(s) = \frac{s+0,1}{s+5}$$

Solução exemplo 4.23

$$H(j\omega) = \frac{j\omega+0,1}{j\omega+5}$$

$$|H(j\omega)| = \frac{\sqrt{\omega^2+0,01}}{\sqrt{\omega^2+25}}$$

$$\angle H(j\omega) = \arctan(10\omega) - \arctan(0,2\omega)$$

Exemplo

Exemplo 4.23

Determinar a resposta em frequência de um sistema LCIT causal cuja função de transferência é dada por:

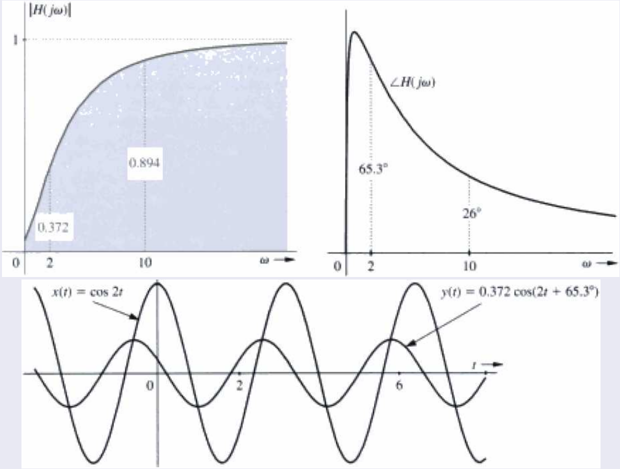
$$H(s) = \frac{s+0,1}{s+5}$$

Solução exemplo 4.23

$$\begin{aligned} H(j\omega) &= \frac{j\omega+0,1}{j\omega+5} \\ |H(j\omega)| &= \frac{\sqrt{\omega^2+0,01}}{\sqrt{\omega^2+25}} \\ \angle H(j\omega) &= \arctan(10\omega) - \arctan(0,2\omega) \end{aligned}$$

Exemplo

Solução exemplo 4.23



Exemplo

Exemplo 4.24

Determinar a resposta em frequência para os seguintes sistemas:

1. Um atrasador ideal de T segundos
2. Um diferenciador ideal
3. Um integrador ideal

Solução exemplo 4.24

1. $H(s) = e^{-sT} \longrightarrow H(j\omega) = e^{-j\omega T}$
2. $H(s) = s \longrightarrow H(j\omega) = j\omega = |\omega| e^{j\pi/2}$
3. $H(s) = 1/s \longrightarrow H(j\omega) = 1/(j\omega) = |1/\omega| e^{-j\pi/2}$

Exemplo

Exemplo 4.24

Determinar a resposta em frequência para os seguintes sistemas:

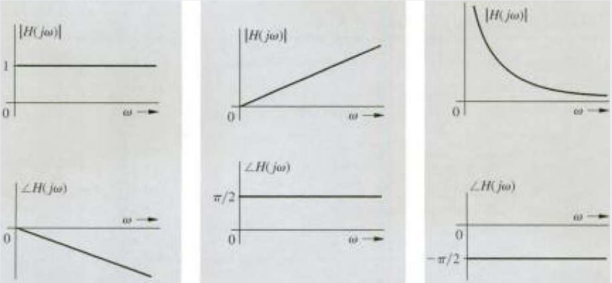
1. Um atrasador ideal de T segundos
2. Um diferenciador ideal
3. Um integrador ideal

Solução exemplo 4.24

1. $H(s) = e^{-sT} \longrightarrow H(j\omega) = e^{-j\omega T}$
2. $H(s) = s \longrightarrow H(j\omega) = j\omega = |\omega|e^{j\pi/2}$
3. $H(s) = 1/s \longrightarrow H(j\omega) = 1/(j\omega) = |1/\omega|e^{-j\pi/2}$

Exemplo

Solução exemplo 4.24



Exemplo

Exercício E4.14

Determine a resposta de um sistema LCIT especificado por

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y(t) = \frac{dx}{dt} + 5x(t)$$

se a entrada for a senóide $x(t) = 20\sin(3t + 35^o)$

Exemplo

Solução exercício E4.14

$$
\begin{aligned}
H(s) &= \frac{s+5}{s^2+3s+2} \longrightarrow H(j\omega) = \frac{j\omega+5}{3j\omega+2-\omega^2} \\
H(j3) &= \frac{5+3j}{-7+9j} = 0,511e^{-j96,91^o} \\
x(t) &= 20\sin(3t+35^o) = 20\cos(3t-55^o) \\
y(t) &= 20.0,511\cos(3t-55^o-96,91^o) \\
&= 10,23\cos(3t-151,91^o) \\
y(t) &= 10,23\sin(3t-61,91^o)
\end{aligned}
$$

Resposta em Frequência

- Senóides práticas são de duração finita, ou seja, começam em algum instante de tempo
- Para uma exponencial complexa de duração finita, tem-se que:

$$e^{j\omega t}u(t) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{s - j\omega}$$

- Assim,

$$Y(s) \quad = \quad X(s)H(s) = \frac{P(s)}{\underbrace{(s-\lambda_1)\cdots(s-\lambda_N)}_{Q(s)}(s-j\omega)}$$

Resposta em Frequência

- A expansão em frações parciais de $Y(s)$ resulta em:

$$Y(s) = \sum_{i=1}^{N} \frac{k_i}{s - \lambda_i} + \frac{H(j\omega)}{s - j\omega}$$

- O que resulta na resposta

$$y(t) = \underbrace{\sum_{i=1}^{N} k_i e^{\lambda_i t} u(t)}_{\text{comp. transitório } y_{tr}(t)} + \underbrace{H(j\omega) e^{j\omega t} u(t)}_{\text{comp. regime estacionário } y_{ss}(t)}$$

- Para um sistema assintoticamente estável, $y_{tr}(t)$ diminui com o tempo

Resposta em Frequência

- Já a componente de regime estacionário $y_{ss}(t)$ não diminui
- Usando um argumento similar ao usado anteriormente, a resposta de regime permanente (estacionária) para uma entrada causal $x(t) = \cos(\omega t)u(t)$ é dada por

$$y_{ss}(t) = |H(j\omega)| \cos\left[\omega t + \angle H(j\omega)\right] u(t)$$