Análise no Domínio do Tempo de Sistemas em Tempo Contínuo

Edmar José do Nascimento
(Análise de Sinais e Sistemas)
http://www.univasf.edu.br/˜edmar.nascimento

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Elétrica

Roteiro

1. Sistemas Contínuos no Tempo
   - Resposta de Sistemas Lineares
   - Resposta ao Impulso
   - Convolução
   - Estabilidade de Sistemas Lineares
   - Extras

Introdução

- Uma classe importante de sistemas lineares são os Sistemas Lineares Contínuos Invariantes no Tempo (LCIT)
    - Sistemas lineares diferenciais
- A análise desses sistemas pode ser realizada no domínio do tempo ou da frequência
    - No domínio da frequência, a análise é feita através das transformadas de Laplace e de Fourier

Sistemas Lineares Diferenciais

- Seja $x(t)$ a entrada e $y(t)$ a saída de um sistema LCIT, então

$$\begin{aligned} \tfrac{d^N y}{dt^N} & +a_1 \frac{d^{N-1}y}{dt^{N-1}} + \cdots a_{N-1}\frac{dy}{dt} + a_N y(t) \\ = & \quad b_{N-M}\frac{d^M x}{dt^M} + b_{N-M+1}\frac{d^{M-1}x}{dt^{M-1}} + \cdots + b_{N-1}\frac{dx}{dt} + b_N x(t) \end{aligned}$$

- Usando o operador $D = d/dt$, tem-se

$$\begin{aligned} (\quad D^N & +a_1 D^{N-1} + \cdots a_{N-1}D + a_N)y(t) \\ = & \quad (b_{N-M}D^M + b_{N-M+1}D^{M-1} + \cdots + b_{N-1}D + b_N)x(t) \end{aligned}$$

Sistemas Lineares Diferenciais

- O sistema LCIT pode ser representado por polinômios

$$
\begin{aligned}
Q(D)y(t) &= P(D)x(t) \\
Q(D) &= D^N + a_1 D^{N-1} + \cdots a_{N-1} D + a_N \\
P(D) &= b_{N-M} D^M + b_{N-M+1} D^{M-1} + \cdots + b_{N-1} D + b_N
\end{aligned}
$$

- Normalmente, $N \geq M$ para garantir que os sistemas sejam estáveis e que o ruído não seja amplificado

Roteiro

Resposta de um Sistema LCIT

- A resposta de um sistema LCIT pode ser expressa como a soma de duas componentes
  - Resposta de entrada nula (devido às condições iniciais)
  - Resposta de estado nulo (devido à entrada apenas)

Circuito RC

$$y(t) = v_C(0) + Rx(t) + \frac{1}{C}\int_0^t x(\tau)d\tau$$

Resposta de um Sistema LCIT

- A resposta de um sistema LCIT pode ser expressa como a soma de duas componentes
  - Resposta de entrada nula (devido às condições iniciais)
  - Resposta de estado nulo (devido à entrada apenas)

Circuito RC

$$y(t) = v_C(0) + Rx(t) + \frac{1}{C}\int_0^t x(\tau)d\tau$$

Resposta de Entrada Nula

- A resposta de entrada nula $y_0(t)$ é obtida observando-se a saída quando $x(t) = 0$

$$\begin{aligned} Q(D)y_0(t) &= 0 \\ (D^N + a_1 D^{N-1} + \cdots a_{N-1} D + a_N) y_0(t) &= 0 \end{aligned}$$

- A solução é obtida encontrando-se as raízes do polinômio $Q(\lambda)$

$$Q(\lambda) = \lambda^N + a_1 \lambda^{N-1} + \cdots a_{N-1}\lambda + a_N = 0$$

- Se $Q(\lambda)$ tiver N raízes distintas, então

$$Q(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_N) = 0$$

Resposta de Entrada Nula

- Finalmente, a resposta de entrada nula $y_0(t)$ é da forma

$$y_0(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + \cdots + c_N e^{\lambda_N t}$$

- O polinômio $Q(\lambda)$ é chamado de polinômio característico
- A equação $Q(\lambda) = 0$ é chamada de equação característica
- As constantes $c_1, c_2, \cdots, c_N$ são obtidas a partir de N condições iniciais
- As raízes $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_N$ são chamadas de raízes características, valores característicos, autovalores ou frequências naturais
- As exponenciais $e^{\lambda_i t}, i = 1, 2, \cdots N$ são chamadas de modos característicos do sistema

Resposta de Entrada Nula

- Quando as raízes de $Q(\lambda)$ são repetidas r vezes, tem-se:

$$
\begin{aligned}
Q(\lambda) &= (\lambda - \lambda_1)^r(\lambda - \lambda_{r+1})\cdots(\lambda - \lambda_N) \\
y_0(t) &= (c_1 + c_2 t + \cdots + c_r t^{r-1})e^{\lambda_1 t} + c_{r+1}e^{\lambda_{r+1}t} \cdots + c_N e^{\lambda_N t}
\end{aligned}
$$

- Para um sistema real, quando as raízes são complexas, elas ocorrem em pares conjugados $(\alpha \pm j\beta)$, logo:

$$
y_0(t) = c_1 e^{(\alpha+j\beta)t} + c_2 e^{(\alpha-j\beta)t}
$$

- Para um sistema real, a resposta $y_0(t)$ também é real, o que requer que c_1 e c_2 sejam conjugados $(c_1 = c_2^* = (c/2)e^{j\theta})$

$$
y_0(t) = ce^{\alpha t}\cos(\beta t + \theta)
$$

Resposta de Entrada Nula

Exemplo

Determinar a resposta de entrada nula para o sistema LCIT descrito por:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

Sendo, $y_0(0) = 0$ e $\dot{y}_0(0) = -5$.

Resposta

$$y_0(t) = -5e^{-t} + 5e^{-2t}$$

Resposta de Entrada Nula

Exemplo

Determinar a resposta de entrada nula para o sistema LCIT descrito por:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

Sendo, $y_0(0) = 0$ e $\dot{y}_0(0) = -5$.

Resposta

$$y_0(t) = -5e^{-t} + 5e^{-2t}$$

Resposta de Entrada Nula

Exemplo

Determinar a resposta de entrada nula para o sistema LCIT descrito por:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 6\frac{dy(t)}{dt} + 9y(t) = 3\frac{dx(t)}{dt} + 5x(t)$$

Sendo, $y_0(0) = 3$ e $\dot{y}_0(0) = -7$.

Resposta

$$y_0(t) = (3 + 2t)e^{-3t}$$

Resposta de Entrada Nula

Exemplo

Determinar a resposta de entrada nula para o sistema LCIT descrito por:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 6\frac{dy(t)}{dt} + 9y(t) = 3\frac{dx(t)}{dt} + 5x(t)$$

Sendo, $y_0(0) = 3$ e $\dot{y}_0(0) = -7$.

Resposta

$$y_0(t) = (3 + 2t)e^{-3t}$$

Roteiro

Resposta ao Impulso Unitário

- A resposta ao impulso unitário denotada por $h(t)$ representa a resposta de um sistema LCIT a uma entrada $\delta(t)$ aplicada em $t = 0$ com todas as condições iniciais iguais a zero para $t = 0^-$
- Seja o sistema LCIT

$$Q(D)y(t) = P(D)x(t)$$

- Como $M \leq N$, o caso mais geral pode ser representado por $M = N$, logo

$$\begin{aligned}
(\quad D^N & + a_1 D^{N-1} + \cdots a_{N-1} D + a_N) y(t) \\
= & \ (b_0 D^N + b_1 D^{N-1} + \cdots + b_{N-1} D + b_N) x(t)
\end{aligned}$$

Resposta ao Impulso Unitário

- A resposta ao impulso $h(t)$ pode ser obtida mais facilmente através da aplicação da transformada de Laplace
- No domínio do tempo, $h(t)$ pode ser obtida pelo método simplificado de casamento de impulso
- Como $h(t)$ é a resposta a uma entrada $\delta(t)$, a seguinte igualdade é verificada

$$
\begin{aligned}
(\quad D^N & \quad + a_1 D^{N-1} + \cdots a_{N-1} D + a_N) h(t) \\
& = \quad (b_0 D^N + b_1 D^{N-1} + \cdots + b_{N-1} D + b_N) \delta(t)
\end{aligned}
$$

Método Simplificado de Casamento de Impulso

- A resposta ao impulso $h(t)$ é dada por

$$h(t) = b_0\delta(t) + [P(D)y_n(t)]u(t)$$

- Sendo $y_n(t)$ a combinação linear dos modos característicos do sistema sujeitos às condições iniciais

$$\begin{aligned} y_n(0) &= \dot{y}_n(0) = \cdots = y_n^{(N-2)}(0) = 0 \\ y_n^{(N-1)}(0) &= 1 \end{aligned}$$

- Se $M < N$, então $b_0 = 0$ e consequentemente o termo $b_0\delta(t)$ não aparece em $h(t)$

Resposta ao Impulso Unitário

Exemplo

Determinar a resposta ao impulso para o sistema LCIT descrito por:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

Resposta

$$\begin{aligned} y_n(t) &= c_1e^{-t} + c_2e^{-2t} \\ y_n(t) &= e^{-t} - e^{-2t} \\ h(t) &= (-e^{-t} + 2e^{-2t})u(t) \end{aligned}$$

Resposta ao Impulso Unitário

Exemplo

Determinar a resposta ao impulso para o sistema LCIT descrito por:

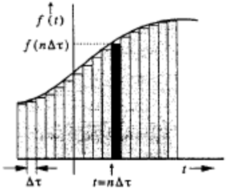
$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

Resposta

$$\begin{aligned} y_n(t) &= c_1e^{-t} + c_2e^{-2t} \\ y_n(t) &= e^{-t} - e^{-2t} \\ h(t) &= (-e^{-t} + 2e^{-2t})u(t) \end{aligned}$$

Resposta de Estado Nulo

- Na resposta ao estado nulo, todas as condições iniciais são iguais a zero
- Seja $x(t)$ uma entrada arbitrária e $p(t)$ um pulso de altura unitária e largura $\Delta\tau$
- $x(t)$ pode ser representado como uma soma de pulsos $x(n\Delta\tau)p(t - n\Delta\tau)$ começando em $t = n\Delta\tau$ com altura $x(n\Delta\tau)$



Resposta de Estado Nulo

- Tem-se que

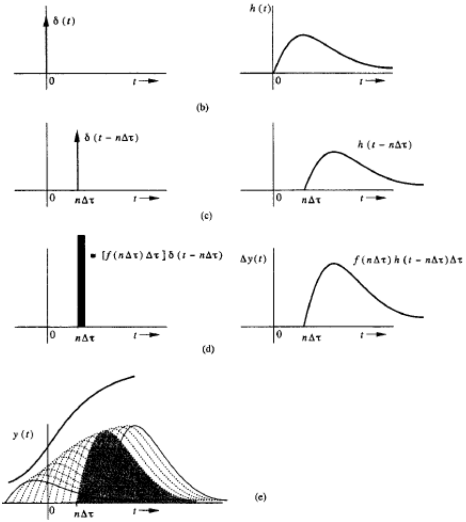
$$
\begin{aligned}
x(t) &= \lim_{\Delta\tau \to 0} \sum_n x(n\Delta\tau) p(t - n\Delta\tau) \\
&= \lim_{\Delta\tau \to 0} \sum_n \frac{x(n\Delta\tau)}{\Delta\tau} p(t - n\Delta\tau)\Delta\tau \\
&= \lim_{\Delta\tau \to 0} \sum_n x(n\Delta\tau) \delta(t - n\Delta\tau)\Delta\tau
\end{aligned}
$$

Resposta de Estado Nulo

- A resposta ao impulso para $x(t)$ é calculada com base nas propriedades dos sistemas LCIT

$$
\begin{aligned}
\text{entrada} &\Longrightarrow \text{saída} \\
\delta(t) &\Longrightarrow h(t) \\
\delta(t - n\Delta\tau) &\Longrightarrow h(t - n\Delta\tau) \\
(x(n\Delta\tau)\Delta\tau)\delta(t - n\Delta\tau) &\Longrightarrow (x(n\Delta\tau)\Delta\tau)h(t - n\Delta\tau) \\
\lim_{\Delta\tau\to 0}\sum_n x(n\Delta\tau)\delta(t - n\Delta\tau)\Delta\tau &\Longrightarrow \\
\lim_{\Delta\tau\to 0}\sum_n x(n\Delta\tau)h(t - n\Delta\tau)\Delta\tau &= y(t)
\end{aligned}
$$

Resposta de Estado Nulo



Roteiro

Resposta de Estado Nulo

- No limite, a resposta ao estado nulo $y(t)$ é dada por

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

- A integral acima é chamada de integral de convolução
- Conhecendo $h(t)$ é possível encontrar a resposta $y(t)$ para qualquer entrada
- Representa-se essa operação por $y(t) = x(t) * h(t)$
- Para dois sinais quaisquer $x_1(t)$ e $x_2(t)$, tem-se:

$$x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau$$

Propriedades da Convolução

- Comutatividade

$$x_1(t) * x_2(t) = x_2(t) * x_1(t)$$

- Distributividade

$$x_1(t) * [x_2(t) + x_3(t)] = x_1(t) * x_2(t) + x_1(t) * x_3(t)$$

- Associatividade

$$x_1(t) * [x_2(t) * x_3(t)] = [x_1(t) * x_2(t)] * x_3(t)$$

Propriedades da Convolução

- Deslocamento

$$
\begin{aligned}
x_1(t) * x_2(t) &= c(t) \\
x_1(t) * x_2(t-T) &= x_1(t-T) * x_2(t) = c(t-T) \\
x_1(t-T_1) * x_2(t-T_2) &= c(t-T_1-T_2)
\end{aligned}
$$

- Convolução com o impulso

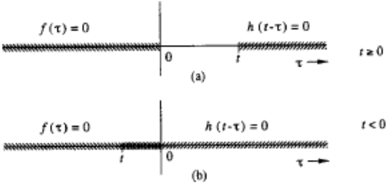
$$
x(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = x(t)
$$

- Largura
  - Se $x_1(t)$ tem largura T_1 e $x_2(t)$ tem largura T_2, então $x_1(t) * x_2(t)$ tem largura $T_1 + T_2$

Propriedades da Convolução

- Causalidade
  - Se $x(t)$ e $h(t)$ são causais, então a integral de convolução pode ser simplificada
  - A resposta $y(t) = x(t) * h(t)$ é dada por:

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \int_0^t x(\tau)h(t-\tau)d\tau, \quad t \geq 0 \\
&= 0, \quad t < 0
\end{aligned}
$$



Propriedades da Convolução

Exemplo

Determinar a resposta $y(t)$ para um sistema LCIT com resposta ao impulso $h(t) = e^{-2t}u(t)$ e entrada $x(t) = e^{-t}u(t)$

Resposta

$$y(t) = (e^{-t} - e^{-2t})u(t)$$

Propriedades da Convolução

Exemplo

Determinar a resposta $y(t)$ para um sistema LCIT com resposta ao impulso $h(t) = e^{-2t}u(t)$ e entrada $x(t) = e^{-t}u(t)$

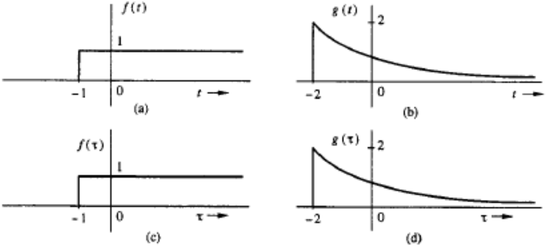
Resposta

$$y(t) = (e^{-t} - e^{-2t})u(t)$$

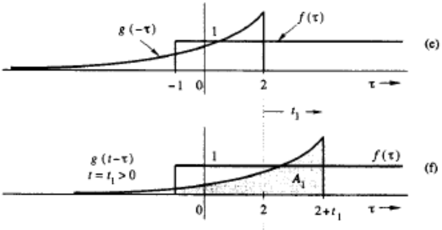
Método Gráfico da Convolução

- A convolução de dois sinais quaisquer $x(t)$ e $g(t)$ pode ser melhor entendida graficamente
- O procedimento consiste em:
  - Manter $x(\tau)$ fixa
  - Rotacionar $g(\tau)$ em relação ao eixo vertical resultando em $g(-\tau)$
  - Deslocar $g(-\tau)$ por t_0 segundos, resultando em $g(t_0 - \tau)$
  - A área referente ao produto de $x(\tau)$ com $g(t_0 - \tau)$ vale $c(t_0)$, o valor da convolução em $t = t_0$
  - Repita para todos os valores possíveis de t para obter $c(t) = x(t) * g(t)$

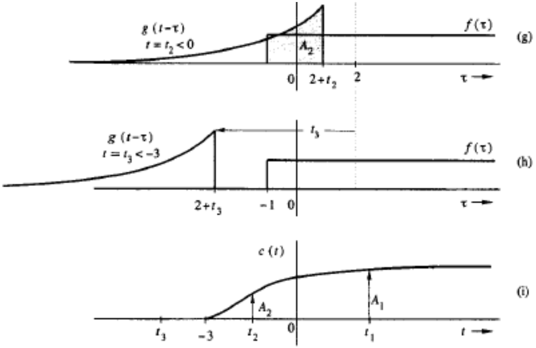
Método Gráfico da Convolução



Método Gráfico da Convolução

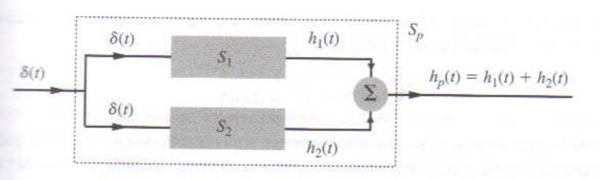


Método Gráfico da Convolução



Sistemas Interconectados

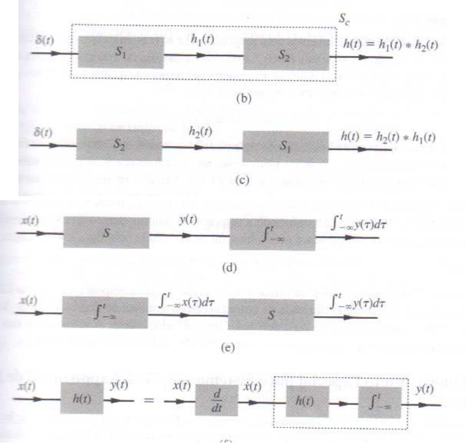
- Dois ou mais sistemas LCIT podem ser conectados de duas formas
  - Série
  - Paralelo
- Sistemas Interconectados em Paralelo



(a)

Sistemas Interconectados

- Sistemas Interconectados em Série



Função de Transferência

- Seja e^{st} uma exponencial com duração infinita e com parâmetro complexo s
- A resposta do sistema com resposta ao impulso $h(t)$ à entrada e^{st} é dada por

$$\begin{aligned} y(t) &= h(t) * e^{st} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{s(t-\tau)} d\tau \\ &= e^{st} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau \\ &= H(s) e^{st} \end{aligned}$$

- Sendo que,

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau$$

Função de Transferência

- $H(s)$ é chamada de função de transferência do sistema
- $H(s)$ pode ser também definido da seguinte maneira:

$$H(s) = \frac{\text{Sinal de saída}}{\text{Sinal de entrada}}\Big|_{\text{entrada}=e^{st}}$$

- Um sistema LCIT pode ser escrito na forma:

$$Q(D)y(t) = P(D)x(t)$$

- Logo

$$Q(D)H(s)e^{st} = H(s)[Q(D)e^{st}] = P(D)e^{st}$$

Função de Transferência

- Como

$$D^r e^{st} = s^r e^{st} \Rightarrow P(D)e^{st} = P(s)e^{st} \text{ e } Q(D)e^{st} = Q(s)e^{st}$$

- Logo

$$H(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

Estabilidade do Sistema

- A noção de estabilidade de um sistema pode ser tomada com base no equilíbrio de um cone
  - Cone equilibrado pela ponta - instável
  - Cone equilibrado pela base - estável
  - Cone deitado - equilíbrio neutro
- Dois critérios de estabilidade são comumente usados em sistemas
  - Estabilidade externa ou BIBO (Bounded-Input-Bounded-Output)
  - Estabilidade interna ou assintótica

Roteiro

Estabilidade Externa

- Para um sistema LCIT tem-se:

$$\begin{aligned} y(t) &= h(t) * x(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau \\ |y(t)| &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)||x(t-\tau)|d\tau \end{aligned}$$

- Se $x(t)$ é limitado, então $|x(t-\tau)| < K_1 < \infty$

$$|y(t)| \leq K_1 \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|d\tau$$

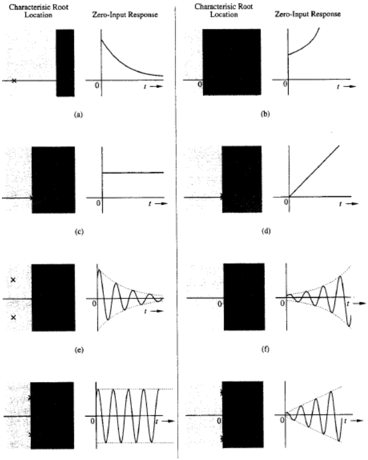
- Para a estabilidade BIBO, é necessário então que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|d\tau < \infty$$

Estabilidade Interna

- O sistema pode ser externamente estável, mas um de seus modos pode explodir com uma determinada condição
- A estabilidade interna pode ser verificada aplicando-se uma pequena condição inicial e verificando-se a saída
- Um critério simples pode ser obtido analisando-se a posição das raízes características no plano complexo
- De acordo com esse critério, o sistema pode ser:
  - Assintoticamente estável
  - Assintoticamente instável
  - Marginalmente estável

Estabilidade Interna



Roteiro

Condições Iniciais

- Para se obter a resposta de entrada nula são necessárias as condições iniciais $y_0(0), \dot{y}_0(0), \cdots$
- Em problemas reais, essas condições iniciais devem ser determinadas a partir de situações físicas
  - Em circuitos RLC, as condições iniciais são determinadas a partir das tensões nos capacitores e correntes nos indutores
- Admite-se que a entrada é aplicada no instante $t = 0$ e por isso, faz-se necessário distinguir os instantes $t = 0^-$ e $t = 0^+$
  - As variáveis de interesse nesses instantes não são necessariamente idênticas

Condições Iniciais

- A resposta total $y(t)$ é constituída de
  - Resposta de entrada nula $y_0(t)$ devida apenas às condições iniciais com a entrada $x(t) = 0$
  - Resposta de estado nulo devida apenas à entrada e com todas as condições iniciais iguais à zero
- Essas duas componentes da resposta total são independentes
- Para $t = 0^-$, a resposta total $y(t)$ é formada apenas pela resposta de entrada nula $y_0(t)$, pois a entrada ainda não foi aplicada, logo:

$$y(0^-) \quad = \quad y_0(0^-), \dot{y}(0^-) = \dot{y}_0(0^-), \cdots$$

Condições Iniciais

- A aplicação da entrada $x(t)$ em $t = 0$ não possui efeito em $y_0(t)$, logo

$$y_0(0^-) \quad = \quad y_0(0^+), \dot{y}_0(0^-) = \dot{y}_0(0^+), \cdots$$

- Entretanto, a resposta total em geral muda, ou seja

$$y(0^-) \quad \neq \quad y(0^+), \dot{y}(0^-) \neq \dot{y}(0^+), \cdots$$

Resposta Total

- A resposta total foi representada como a soma de duas componentes

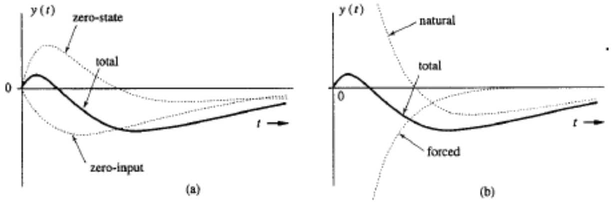
$$y(t) = \underbrace{\sum_{k=1}^{N} c_k e^{\lambda_k t}}_{\text{comp. de entrada nula}} + \underbrace{x(t) * h(t)}_{\text{comp. de estado nulo}}$$

- A componente de estado nulo contém modos característicos do sistema bem como modos não característicos
- Uma outra forma de representar a resposta total é agrupar todos os modos característicos na resposta natural $y_n(t)$ e os não característicos na resposta forçada $y_\phi(t)$, assim

$$y(t) = y_n(t) + y_\phi(t)$$

Resposta Total

- Resposta total para um circuito RLC série



Solução Clássica de Equações Diferenciais

- No método clássico de solução de equações diferenciais, são determinadas as componentes natural e forçada ao invés das componentes de entrada nula e de estado nulo
  - $y_n(t)$ também é chamada de solução homogênea
  - $y_\phi(t)$ também é chamada de solução particular
- A forma de $y_\phi(t)$ depende da entrada que está sendo aplicada
- A solução particular é determinada a partir da equação

$$Q(D)y_\phi(t) \quad = \quad P(D)x(t)$$

- As constantes da solução homogênea são determinadas a partir das condições iniciais de $y(t) = y_n(t) + y_\phi(t)$ em $t = 0^+$

Avaliação do Método Clássico

- O método clássico é relativamente simples para determinadas entradas (exponenciais, constantes, senóides, etc.), mas ele não permite separar o efeito da entrada
- Além disso, o método clássico não pode ser aplicado a uma entrada qualquer
- Outro inconveniente é que as condições em $t = 0^+$ são mais trabalhosas de serem obtidas
- No estudo teórico de sistemas lineares, o método clássico não é o mais adequado