

Introdução aos Sinais e Sistemas

Edmar José do Nascimento
(Análise de Sinais e Sistemas)

<http://www.univasf.edu.br/~edmar.nascimento>

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Elétrica

Roteiro

- 1 Introdução aos Sinais
 - Operações com Sinais
 - Classificação de Sinais
 - Modelos de Sinais

- 2 Introdução aos Sistemas
 - Classificação dos Sistemas

Definições

- Um sinal é um conjunto de dados ou informação
 - Sinal de telefone ou de televisão
 - Registros do índice Bovespa ao longo de uma seção
- Matematicamente, um sinal é representado por uma função de uma ou mais variáveis
 - Um sinal de voz é representado por uma amplitude de tensão em função do tempo
 - Um trecho de vídeo é representado pela variação de parâmetros de cor em função do tempo e da posição na tela

Energia e Potência de um sinal

- Quando se lida com sinais é necessário ter uma medida de sua "força"
- Dependendo do tipo de sinal, pode-se utilizar a **energia** ou a **potência** para indicar se ele é mais forte ou mais fraco
- Da eletricidade, sabe-se que:

$$p = vi; E = \int_{-\infty}^{\infty} p dt$$

- Para uma carga resistiva, tem-se que:

$$p = \frac{v^2}{R} = Ri^2; E = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v^2}{R} dt = \int_{-\infty}^{\infty} Ri^2 dt$$

Energia e Potência de um sinal

- Em sinais e sistemas considera-se uma carga normalizada ($R = 1\Omega$) e, desse modo, a energia de um sinal $x(t)$ pode ser definida como

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt$$

- Dessa forma, a energia assim definida não representa a energia real de um determinado sinal prático
- Se $x(t)$ for uma função complexa, a sua energia pode ser definida como

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

Energia e Potência de um sinal

- De modo análogo ao obtido para a energia, a potência de um sinal pode ser definida como a energia média em um dado intervalo de tempo, sendo assim, a potência de um sinal $x(t)$ pode ser definida como

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt$$

- Se $x(t)$ for uma função complexa, a sua potência pode ser definida como

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt$$

Energia e Potência de um sinal

- Pode-se mostrar que se $x(t)$ é um sinal periódico com período T_0 , o cálculo da sua potência é bastante simplificado, ou seja

$$P_x = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x^2(t) dt$$

- A integral acima pode ser calculada em qualquer intervalo de tempo de comprimento igual a T_0

Exemplo

Mostrar que a potência de $x(t) = C \cos(\omega_0 t + \theta)$ como $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ é dada por $P_x = \frac{C^2}{2}$

Energia e Potência de um sinal

- Pode-se mostrar que se $x(t)$ é um sinal periódico com período T_0 , o cálculo da sua potência é bastante simplificado, ou seja

$$P_x = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x^2(t) dt$$

- A integral acima pode ser calculada em qualquer intervalo de tempo de comprimento igual a T_0

Exemplo

Mostrar que a potência de $x(t) = C \cos(\omega_0 t + \theta)$ como $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ é dada por $P_x = \frac{C^2}{2}$

1 Introdução aos Sinais

- Operações com Sinais
- Classificação de Sinais
- Modelos de Sinais

2 Introdução aos Sistemas

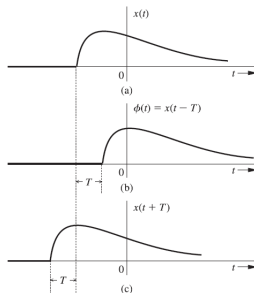
- Classificação dos Sistemas

- Algumas operações com sinais merecem destaque, são elas:
 - Multiplicação por um escalar
 - Deslocamento temporal
 - Escalamento temporal
 - Reversão temporal
 - Operações combinadas
- Multiplicação por um escalar
 - Dado um sinal $x(t)$, modifica-se a sua amplitude, obtendo-se um novo sinal $\phi(t) = cx(t)$
 - Se $c > 1$, o sinal é **amplificado**
 - Se $0 < c < 1$, o sinal é **atenuado**

- O deslocamento temporal pode ser de dois tipos: **atraso** ou **avanço**
- Considerando-se um sinal $x(t)$, a versão atrasada de T segundos $\phi(t)$ é obtida da seguinte forma
 - O que acontece com $x(t)$, acontece também com $\phi(t)$ após T segundos, ou seja, $\phi(t + T) = x(t)$
 - Assim, o sinal atrasado é representado por $\phi(t) = x(t - T)$, com $T > 0$
- O atraso $\phi(t) = x(t - T)$ corresponde a um deslocamento de T segundos para a direita do sinal $x(t)$

Deslocamento Temporal

- O avanço pode ser pensado como um atraso negativo, ou seja, o sinal avançado pode ser representado por
 - $\phi(t) = x(t + T)$, $T > 0$
- O avanço $\phi(t) = x(t + T)$ corresponde a um deslocamento de T segundos para a esquerda do sinal $x(t)$



Escalamento Temporal

- A **compressão** ou a **expansão** de um sinal no tempo é chamada de escalamento temporal
- Um sinal comprimido por um fator a , ($a > 1$), é representado por

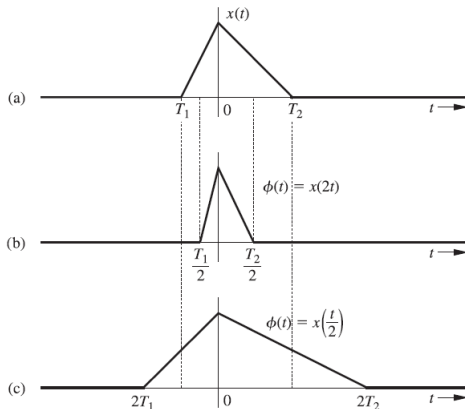
$$\phi(t) = x(at)$$

- Analogamente, um sinal expandido por um fator a , ($a > 1$), é representado por

$$\phi(t) = x\left(\frac{t}{a}\right)$$

Escalamento Temporal

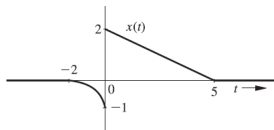
- Exemplo de uma compressão e de uma expansão por um fator de 2



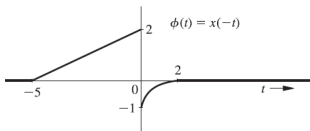
Reversão Temporal

- A reversão temporal consiste em uma rotação de 180 graus em torno do eixo das ordenadas
- A operação de reversão temporal é representada por

$$\phi(t) = x(-t)$$



(a)



(b)

Operações Combinadas

- Operações mais complexas podem combinar mais de uma das operações estudadas
- Pode-se representar uma operação combinada na forma $\phi(t) = x(at - b)$
 - Dependendo dos valores de a e b essa operação pode representar uma combinação de avanço, atraso, compressão, expansão ou reversão
- Uma operação combinada na forma $\phi(t) = x(at - b)$ pode ser realizada de três maneiras
 - $x(t)$ deslocado de b resultando em $x(t - b)$ seguido do escalamento de $x(t - b)$ por a resultando em $x(at - b)$
 - Escalamento de $x(t)$ por a resultando em $x(at)$ seguido do deslocamento temporal por b/a resultando em $x(at - b)$
 - Obtenção dos pontos de interesse de $\phi(t)$ a partir do gráfico de $x(t)$

Roteiro

- 1 **Introdução aos Sinais**
 - Operações com Sinais
 - **Classificação de Sinais**
 - Modelos de Sinais

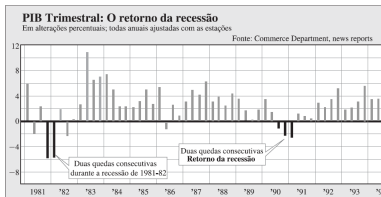
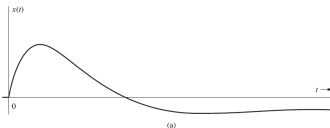
- 2 **Introdução aos Sistemas**
 - Classificação dos Sistemas

Classificação de Sinais

- Os sinais existentes podem ser classificados de diversas maneiras
 - Contínuos e discretos no tempo
 - Analógicos e digitais
 - Periódicos e não periódicos (aperiódicos)
 - Energia e potência
 - Determinísticos e aleatórios
 - Causais, não causais e anti-causais

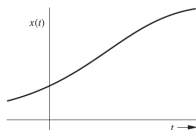
Sinais Contínuos e Discretos no Tempo

- Um sinal contínuo no tempo é aquele que é especificado para valores de tempo contínuo
- Um sinal discreto no tempo é aquele que é especificado para valores de tempo discretos

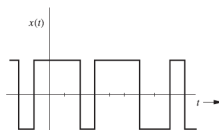


Sinais Analógicos e Digitais

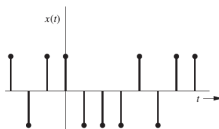
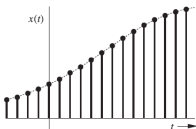
- Um sinal analógico é aquele cuja amplitude pode assumir qualquer valor em uma faixa contínua
- Um sinal digital é aquele cuja amplitude pode assumir apenas um valor pertencente a um conjunto finito de valores



(a)



(b)

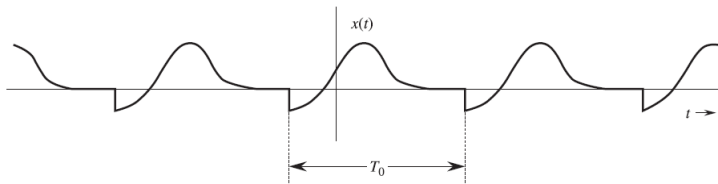


Sinais Periódicos e Aperiódicos

- Um sinal $x(t)$ é periódico se para alguma constante positiva T_0

$$x(t) = x(t + T_0), \forall t$$

- Se o sinal $x(t)$ não for periódico, ele é aperiódico



Sinais de Energia e de Potência

- Um sinal de energia é aquele que possui energia finita e não nula
- Um sinal de potência é aquele que possui potência finita e não nula
- Um sinal não pode ser de energia e potência ao mesmo tempo
- Um sinal pode não ser de energia nem de potência
- Sinais periódicos são em geral sinais de potência

Sinais Determinísticos e Aleatórios

- Um sinal determinístico é aquele cuja descrição física é completamente conhecida, seja através de um gráfico ou através de uma expressão matemática
- Por outro lado, um sinal aleatório admite apenas uma descrição probabilística (momentos, fdp, fda, etc.)

Sinais Causais, não Causais e Anti-causais

- Um sinal é causal se ele começar a partir do instante $t = 0$
- Caso o sinal comece antes de $t = 0$ e se estenda para $t > 0$ o sinal é chamado de não causal
- Se o sinal existir apenas para $t < 0$, o sinal é chamado de anti-causal.
- Como a variável de um sinal não está restrita ao tempo, os sinais não causais podem existir no mundo físico

Roteiro

1 Introdução aos Sinais

- Operações com Sinais
- Classificação de Sinais
- Modelos de Sinais

2 Introdução aos Sistemas

- Classificação dos Sistemas

Modelos Úteis de Sinais

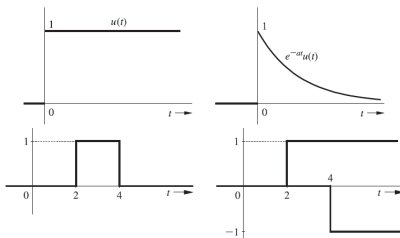
- Em sinais e sistema, faz-se frequentemente o uso de modelos de sinais seja para simplificar as notações ou obter modelos mais simples de se lidar
- Alguns modelos são bastante utilizados
 - Degrau unitário
 - Impulso unitário
 - Exponencial complexa

Degrau Unitário

- O degrau unitário é definido como

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

- O degrau unitário permite se ter uma representação compacta para sinais causais



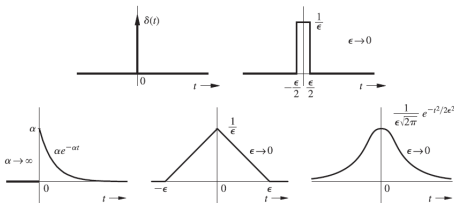
Impulso Unitário

- A "função" impulso unitário denotada por $\delta(t)$ foi definida por Dirac como

$$\delta(t) = 0, \quad t \neq 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

- Geometricamente, o impulso unitário pode ser definido a partir das seguintes figura fazendo-se $\epsilon \rightarrow 0$



Propriedades do Impulso Unitário

- O impulso unitário possui as seguintes propriedades

$$\phi(t)\delta(t) = \phi(0)\delta(t)$$

$$\phi(t)\delta(t - T) = \phi(T)\delta(t - T)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\delta(t)dt = \phi(0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = \phi(0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\delta(t - T)dt = \phi(T)$$

Propriedades do Impulso Unitário

- Uma definição matemática para o impulso pode ser dada em termos de funções generalizadas
 - Funções definidas por seu efeito em outras funções
- Usando essa definição, o impulso é definido através da propriedade da amostragem
 - O impulso unitário é definido como uma função na qual a área do seu produto com uma função $\phi(t)$ é igual ao valor de $\phi(t)$ no instante em que o impulso está localizado
- Com a abordagem de funções generalizadas pode-se relacionar o impulso unitário com o degrau unitário
 - A derivada do degrau é um impulso
 - A integral de um impulso é um degrau

Propriedades do Impulso Unitário

- A derivada do degrau unitário $u(t)$ é um impulso

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{dt} \phi(t) dt &= u(t) \phi(t) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \dot{\phi}(t) dt \\
 &= \phi(\infty) - 0 - \int_0^{\infty} \dot{\phi}(t) dt \\
 &= \phi(\infty) - \phi(t) \Big|_0^{\infty} = \phi(0)
 \end{aligned}$$

- Como a derivada de $u(t)$ satisfaz a propriedade de amostragem de $\delta(t)$, pode-se concluir no sentido generalizado que

$$\frac{du}{dt} = \delta(t)$$

Propriedades do Impulso Unitário

- Conseqüentemente, tem-se que

$$\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = u(t)$$

- As derivadas de um impulso podem também ser definidas através de funções generalizadas (ver problema 1.4-9 do livro texto)

Exemplo

Mostrar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-2) \cos\left(\frac{\pi t}{4}\right) dt = 0$$

Propriedades do Impulso Unitário

- Conseqüentemente, tem-se que

$$\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = u(t)$$

- As derivadas de um impulso podem também ser definidas através de funções generalizadas (ver problema 1.4-9 do livro texto)

Exemplo

Mostrar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-2) \cos\left(\frac{\pi t}{4}\right) dt = 0$$

Exponencial Complexa

- A exponencial complexa é definida por

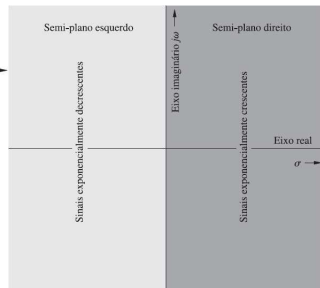
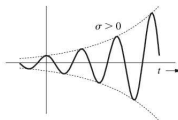
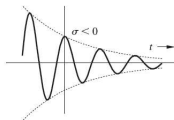
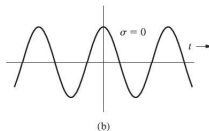
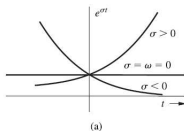
$$e^{st}, \text{ sendo } s = \sigma + j\omega$$

- A variável s é chamada de frequência complexa
- Usando a fórmula de Euler, pode-se mostrar que

$$e^{\sigma t} \cos \omega t = \frac{1}{2}(e^{st} + e^{s^*t})$$

- Ou seja, uma exponencial amortecida pode ser representada por uma combinação de exponenciais complexas

Exponencial Complexa



Funções Pares e Ímpares

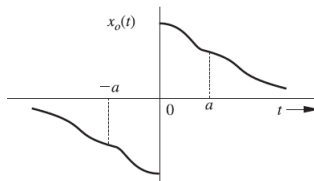
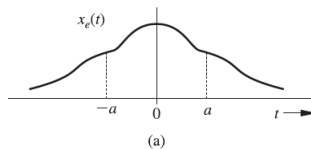
- Em algumas operações em sinais e sistemas é possível simplificar bastante os cálculos quando há simetria nos sinais
- Para um sinal par $x_e(t)$, tem-se que

$$\int_{-a}^a x_e(t) dt = 2 \int_0^a x_e(t) dt$$

- Para um sinal ímpar $x_o(t)$, tem-se que

$$\int_{-a}^a x_o(t) dt = 0$$

Funções Pares e Ímpares

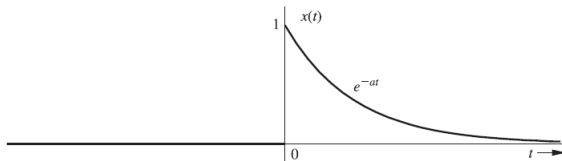


Funções Pares e Ímpares

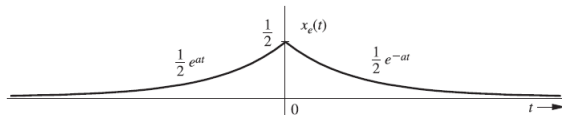
- Mesmo quando o sinal não é par nem ímpar ele pode ser decomposto em uma componente par e uma componente ímpar
- Pode-se verificar que um sinal qualquer $x(t)$ pode ser escrito como

$$x(t) = \underbrace{\frac{1}{2}[x(t) + x(-t)]}_{\text{par}} + \underbrace{\frac{1}{2}[x(t) - x(-t)]}_{\text{ímpar}}$$

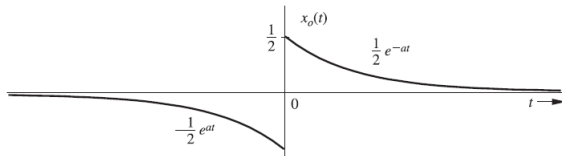
Funções Pares e Ímpares



(a)

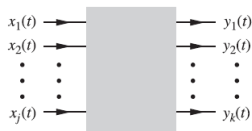


(b)



Definições

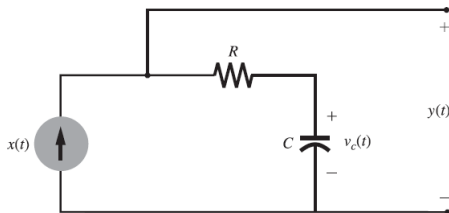
- Um sistema pode ser definido como sendo uma entidade que manipula um ou mais sinais para realizar uma determinada função, produzindo, assim, novos sinais
- Um sistema físico pode ser caracterizado pela sua relação entrada/saída
 - Dessa forma, um sistema pode ser visto como uma caixa preta com um conjunto de entradas $x_1(t), x_2(t), \dots, x_j(t)$ e saídas $y_1(t), y_2(t), \dots, y_k(t)$



Definições

- Um exemplo de relação entrada/saída é dado para o circuito RC mostrado abaixo, no qual tem-se que

$$y(t) = v_c(t_0) + Rx(t) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t x(\tau) d\tau, \quad t \geq t_0$$



Roteiro

1

Introdução aos Sinais

- Operações com Sinais
- Classificação de Sinais
- Modelos de Sinais

2

Introdução aos Sistemas

- Classificação dos Sistemas

Classificação dos Sistemas

- Os sistemas podem ser classificados em
 - Lineares e não lineares
 - Variantes e invariantes no tempo
 - Com memória (dinâmicos) e sem memória (instantâneos)
 - Causais e não causais
 - Contínuos e discretos no tempo
 - Analógicos e digitais
 - Inversíveis e não inversíveis
 - Estáveis e instáveis

Sistemas Lineares e não Lineares

- Um sistema é linear se ele verifica o princípio da superposição, ou seja, ele é simultaneamente aditivo e homogêneo
- Para um sistema linear, tem-se que

$$\begin{aligned} &\text{se } x_1 \rightarrow y_1 \text{ e } x_2 \rightarrow y_2 \\ &\text{então } k_1x_1 + k_2x_2 \rightarrow k_1y_1 + k_2y_2 \end{aligned}$$

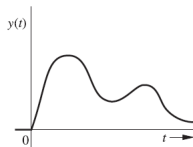
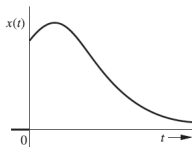
- Caso o sistema não verifique a princípio da superposição ele é dito ser não linear
- Um sistema linear permite que cada entrada seja considerada separadamente
- A maioria dos sistemas é não linear quando são consideradas todas as possibilidades de entradas

Sistemas Variantes e Invariantes no Tempo

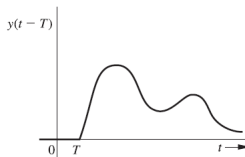
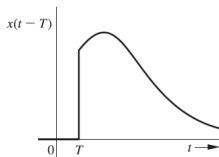
- Um sistema é invariante no tempo se um deslocamento na entrada provoca o mesmo deslocamento na saída, ou seja

$$\text{se } x(t) \rightarrow y(t)$$

$$\text{então } x(t - T) \rightarrow y(t - T)$$



(a)



Sistemas Variantes e Invariantes no Tempo

- Caso o sistema não verifique a propriedade de invariância no tempo ele é dito ser variante no tempo
- Sistemas variantes no tempo possuem parâmetros que variam com o tempo
- O formalismo estudado nesse curso permite tratar apenas sistemas lineares e invariantes no tempo (LIT)

Sistemas com e sem Memória

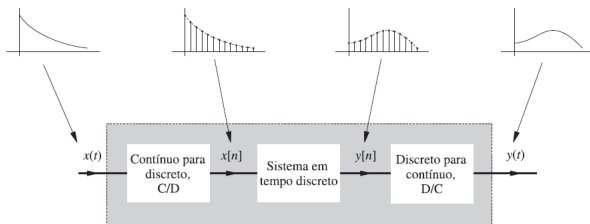
- Um sistema sem memória (instantâneo) é aquele cuja saída no instante t dependa apenas na entrada no instante t
 - Circuito resistivo
- Caso a saída no instante t dependa de valores passados ou futuros da entrada, o sistema é dito ser com memória (dinâmico)
 - Circuitos RC, RL e RLC

Sistemas Causais e não Causais

- Um sistema é causal quando a saída em um instante t_0 depende apenas de valores da entrada para $t \leq t_0$
 - A saída de um sistema causal não depende de valores futuros da entrada e por essa razão, ele é chamado de não antecipativo
- Os sistemas físicos reais são exemplos de sistemas causais quando a variável é o tempo
- Caso o sistema não seja causal ele é não causal

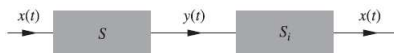
Sistemas em Tempo Contínuo e Discreto

- Sistemas contínuos são aqueles cujas entradas e saídas são sinais contínuos no tempo
- Sistemas discretos são aqueles cujas entradas e saídas são sinais discretos no tempo
- Sinais contínuos podem ser processados por sistemas discretos



Classificação dos Sistemas

- Um sistema pode ainda ser classificado como analógico ou digital dependendo da natureza dos sinais de entrada e saída
- Um sistema em que a entrada $x(t)$ pode ser obtido a partir da saída $y(t)$ é dito ser inversível
 - A operação inversa "desfaz" a operação efetuada pelo sistema
 - Um integrador é o inverso de um diferenciador



Sistemas Instáveis e Estáveis

- Os sistemas podem ser classificados em estáveis e instáveis segundo o critério de estabilidade externa
- Um sistema é estável (BIBO estável) se uma entrada limitada resulta em uma saída limitada
- Caso uma entrada limitada resulte em uma saída ilimitada, o sistema é instável