

Números Complexos e Senóides

Edmar José do Nascimento
(Análise de Sinais e Sistemas)

<http://www.univasf.edu.br/~edmar.nascimento>

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Elétrica

Roteiro

- 1 Números Complexos e Senóides
 - Números Complexos
 - Senóides

- Senóides

- Os números complexos surgiram inicialmente como um artifício matemático para a resolução de equações algébricas
 - Equações possuíam soluções reais
 - Surgiam raízes quadradas de números negativos em passos intermediários da solução
- Números reais passaram a ser um subconjunto dos complexos

Definição

- Um número complexo pode ser representado na forma

$$z = a + jb; \quad a, b \in \mathbb{R}; \quad j = \sqrt{-1}$$

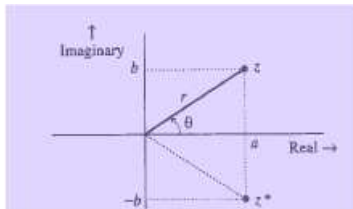
- As coordenadas (a, b) de um número complexo podem ser representadas no plano complexo
 - Eixos das abscissas - Parte real (Coordenada a)
 - Eixos das ordenadas - Parte imaginária (Coordenada b)
- Assim, tem-se:
 - $a = \text{Re}\{z\}$
 - $b = \text{Im}\{z\}$

Forma Polar

- Além da representação cartesiana, os números complexos são frequentemente representados na **forma polar**

$$a = r \cos \theta$$

$$b = r \sin \theta$$



Forma Polar

- A partir da expansão da série de Maclaurin para $e^{j\theta}$, obtém-se a **Fórmula de Euler**

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$$

- Portanto,

$$z = a + jb = r(\cos \theta + j \sin \theta) = re^{j\theta}$$

- Ou ainda,

$$z = |z|e^{j \arg z}$$

Forma Polar

- A correspondência entre as duas representações é facilmente obtida

$$a = r \cos \theta, b = r \sin \theta$$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}, \theta = \arctan \frac{b}{a}$$

- O conjugado de um número complexo $z = a + jb$ é definido como

$$z^* = a - jb = r(\cos \theta - j \sin \theta) = re^{-j\theta} = |z|e^{-j \arg z}$$

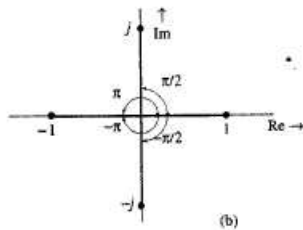
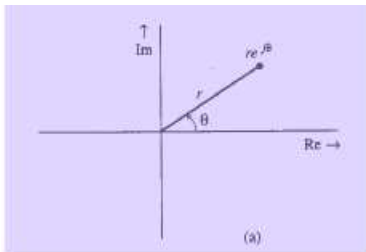
- Tem-se ainda que

$$z + z^* = 2a = 2\operatorname{Re}\{z\}$$

$$z \cdot z^* = r^2 = |z|^2$$

Identidades Úteis

- A partir das representações no plano complexo, podem ser obtidas várias relações



$$\begin{aligned}
 e^{\pm jn\pi} &= -1, n \text{ ímpar}; \quad e^{\pm j2n\pi} = 1, n \text{ inteiro} \\
 e^{j\pi/2} &= j, \quad e^{-j\pi/2} = -j \\
 e^{\pm jn\pi/2} &= \pm j, \quad n = 1, 5, 9, 13, \dots \\
 e^{\pm jn\pi/2} &= \mp j, \quad n = 3, 7, 11, 15, \dots
 \end{aligned}$$

Operações com Números Complexos

- Adição e subtração
 - Forma cartesiana
- Multiplicação e divisão
 - Forma cartesiana e polar
- Potenciação e radiciação
 - Forma polar

Roteiro

- 1 Números Complexos e Senóides
 - Números Complexos
 - Senóides

Senóides

- Uma senóide pode ser escrita como

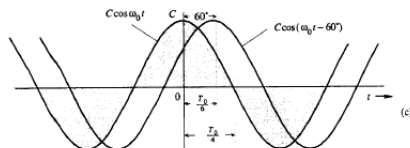
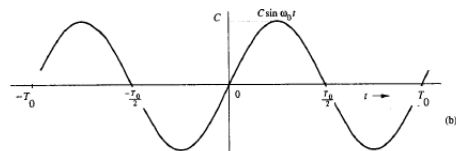
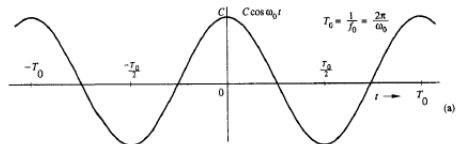
$$x(t) = C \cos(2\pi f_0 t + \theta) = C \cos(\omega_0 t + \theta)$$

- Sendo,
 - f_0 - frequência em Hertz
 - $\omega_0 = 2\pi f_0$ - frequência angular em radianos por segundo
 - θ - fase em radianos
- Casos particulares

$$C \cos(\omega_0 t - \pi/2) = = C \sin(\omega_0 t)$$

$$C \sin(\omega_0 t + \pi/2) = = C \cos(\omega_0 t)$$

Senóides



Adição de Senóides

- Senóides de mesma frequência mas com fases diferentes podem ser somadas resultando em uma senóide com mesma frequência

$$\begin{aligned} C \cos(\omega_0 t + \theta) &= C \cos \theta \cos \omega_0 t - C \sin \theta \sin \omega_0 t \\ &= a \cos \omega_0 t + b \sin \omega_0 t \end{aligned}$$

- Sendo,

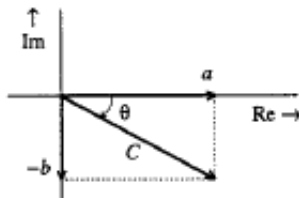
$$a = C \cos \theta, \quad b = -C \sin \theta$$

- Essas relações resultam em

$$C = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \theta = \arctan \frac{-b}{a}$$

Fasores

- C e θ são o módulo e a fase de $z = a - jb = Ce^{j\theta}$
- Uma senóide é então representada como um fasor de módulo C e ângulo θ



Exponenciais

- É de grande importância no estudo das transformadas a relação entre senóides e exponenciais
- Duas relações importantes podem ser obtidas a partir da fórmula de Euler

$$\cos \varphi = \frac{1}{2}(e^{j\varphi} + e^{-j\varphi})$$

$$\sin \varphi = \frac{1}{2j}(e^{j\varphi} - e^{-j\varphi})$$